

GEERT JAN OLSDER

Analyse de systèmes min-max

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 30, n° 1 (1996), p. 17-30

[<http://www.numdam.org/item?id=RO_1996__30_1_17_0>](http://www.numdam.org/item?id=RO_1996__30_1_17_0)

© AFCET, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANALYSE DE SYSTÈMES MIN-MAX (*)

par Geert JAN OLSDER ⁽¹⁾

Communiqué par Michel MINOUX

Résumé. – *Nous étudions des extensions de résultats connus sur les systèmes dans l'algèbre max-plus (ou min-plus) à des systèmes dans l'algèbre min-max (ces systèmes sont basés sur l'algèbre où on a les trois opérations max, min et addition). Les systèmes min-max sont non linéaires dans l'algèbre max-plus et dans l'algèbre min-plus. On introduit le concept du « circuit pulsatif », qui caractérise la vitesse d'une solution stationnaire du système. En général, le poids moyen d'un circuit pulsatif n'est ni maximal (comme pour les systèmes max-plus) ni minimal (comme pour les systèmes min-plus). Sous certaines conditions, les solutions des systèmes min-max montrent un comportement périodique, qui est lié aux circuits pulsatifs. Des solutions issues de conditions initiales arbitraires convergent en un nombre fini d'étapes vers un tel comportement. On peut utiliser des concepts de la théorie des jeux pour construire les circuits pulsatifs. On utilise des raisonnements analytiques et de la théorie des graphes pour la dérivation des résultats divers.*

Mots clés : Systèmes à événements discrets, systèmes min-max, circuit critique, max-plus algèbre, comportement périodique.

Abstract. – *We will study extensions of known results of max-plus (or min-plus) systems to systems where the underlying algebra consists of the three operations max, min and addition simultaneously (such systems are called min-max systems). Such systems are nonlinear in both the max-plus and the min-plus algebra. The notion of a "pulsative" circuit is introduced, which characterizes the speed of a stationary solution of the system. In general, the cycle mean of a pulsative circuit is neither maximal (as is the case for max-plus systems) nor minimal (as is the case for min-plus systems). Subject to certain conditions, the solutions of min-max systems show a periodic behaviour, which is directly related to the pulsative circuits. Solutions starting from arbitrary initial conditions converge in a finite number of steps to such a periodic behaviour. Game-theoretic notions are helpful for the construction of pulsative circuits. Both analytic and graph-theoretic reasoning is used in the derivation of the various results.*

Keywords: Discrete event systems, min-max systems, critical circuit, max-plus algebra, periodic behaviour.

(*) Cette recherche a eu lieu à INRIA Sophia-Antipolis, où l'auteur a passé une année sabbatique.
Reçu en juin 1993.

(¹) Department of Technical Mathematics and Informatics, Delft University of Technology,
P.O. Box 5031, 2600 AG Delft, The Netherlands.

1. LES SYSTÈMES ÉTUDIÉS

Dans ce travail nous étudierons le système

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \oplus B \otimes y(k), \quad (1)$$

$$y(k+1) = C \odot x(k) \wedge D \odot y(k). \quad (2)$$

On appelle la combinaison des vecteurs $x = (x_1, \dots, x_n)'$ et $y = (y_1, \dots, y_m)'$, où ' est la transposée, l'état du système. Les quantités A, B, C et D sont des matrices d'ordre $n \times n$, $n \times m$, $m \times n$ et $m \times m$ respectivement. On écrit $A = \{a_{ij}\}$, $B = \{b_{ij}\}$, $C = \{c_{ij}\}$ et $D = \{d_{ij}\}$. Nous supposons d'une part que les coordonnées de x et les coefficients de A et B sont des éléments de $R \cup \varepsilon$ et d'autre part que les coordonnées de y et les coefficients de C et D sont des éléments de $R \cup \top$. Les symboles ε et \top dénotent $-\infty$ et $+\infty$ respectivement. L'opérateur \otimes est la multiplication dans l'algèbre max-plus; \oplus est l'addition dans la même algèbre; les opérateurs \odot et \wedge sont respectivement la multiplication et l'addition dans l'algèbre min-plus. On fait la convention $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon$ et $\top \odot \varepsilon = \top$. La notation conventionnelle de (1) et (2) est:

$$x_i(k+1) = \max(a_{i1} + x_1(k), \dots, a_{in} + x_n(k), \\ b_{i1} + y_1(k), \dots, b_{im} + y_m(k)), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y_i(k+1) = \min(c_{i1} + x_1(k), \dots, c_{in} + x_n(k), \\ d_{i1} + y_1(k), \dots, d_{im} + y_m(k)), \quad i = 1, \dots, m.$$

Si on suppose qu'une condition initiale $(x(0), y(0))$ est donnée, on peut calculer l'évolution des équations (1) et (2) de façon unique, c'est-à-dire qu'on peut calculer $(x(k), y(k))$ pour $k = 1, 2, \dots$

Des applications des systèmes qui peuvent être écrites comme (1), (2), sont citées en [5] et en [2]. On peut décrire l'évolution des réseaux de Petri temporisés par des équations qui contiennent les opérateurs max et min, voir [1] et l'exemple suivant.

Exemple 1 : Considérer le réseau de Petri temporisé, qui n'est pas un graphe d'événement temporisé, dans la figure 1. Pour résoudre le conflit entre les deux transitions t_1 et t_2 qui prennent des jetons de la même place, nous instituons la règle que les deux transitions t_1 et t_2 tirent alternativement

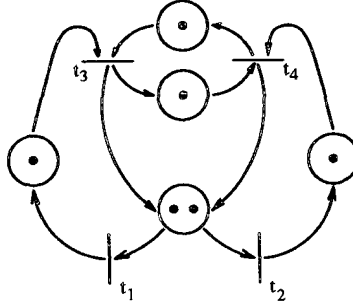


Figure 1. – Graphe de réseau de Petri temporisé.

(t_1 prend le premier jeton, t_2 le dernier). Les équations qui déterminent l'évolution du système sont

$$x_1(k+1) = (a_{13} \otimes x_2(k)) \oplus (a_{14} \otimes x_3(k)),$$

$$x_2(k+1) = (a_{31} \otimes y_1(k)) \oplus (a_{34} \otimes x_3(k)),$$

$$x_3(k+1) = (a_{42} \otimes x_1(k)) \oplus (a_{43} \otimes x_2(k)),$$

$$y_1(k+1) = (a_{13} \otimes x_2(k)) \wedge (a_{14} \otimes x_3(k)).$$

Le variable $x_i(k)$ correspond au temps sur lequel la transition t_{i+1} tire pour la k -ième fois, $i = 1, 2, 3$; le variable $y_1(k)$ correspond au temps sur lequel la transition t_1 tire pour la k -ième fois. Le paramètre a_{ij} dénote le temps de séjour associé à la place qui relie la transition t_j avec la transition t_i . Nous avons supposé que les temps de tir associés aux transitions sont nuls. ■

2. LA THÉORIE : POINT DE DÉPART ET LES PROBLÈMES ÉTUDIÉS

Avant de formuler les problèmes qui nous intéressent, commençons par énoncer quelques résultats connus. Le système (1), (2) est constitué de deux sous-systèmes indépendants

$$x(k+1) = A \otimes x(k), \quad y(k+1) = D \odot y(k), \quad (3)$$

qui sont interconnectés par les matrices B et C . Les propriétés suivantes des sous-systèmes (3) sont bien connues; voir [4]. (La plupart des définitions et des théorèmes sont donnés pour le système $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dans

l'algèbre max-plus ; il existe aussi des définitions et des théorèmes analogues pour les systèmes $y(k+1) = D \odot y(k)$ dans l'algèbre min-plus.)

DÉFINITION 2: *Le graphe de communication $\mathcal{G}(A)$ d'une matrice carrée A de taille $n \times n$ est un graphe orienté comportant un nœud pour chaque indice $1, \dots, n$. Ce graphe comporte un arc entre j et i ssi $a_{ij} \neq \varepsilon$. La valuation de cet arc est a_{ij} .*

DÉFINITION 3: *Pour chaque chemin $\zeta = \{t_1, t_2, \dots, t_{j+1}\}$ dans $\mathcal{G}(A)$, où t_i et t_{i+1} sont deux nœuds reliés par un arc (on parle d'un circuit si $t_{j+1} = t_1$ et d'un circuit élémentaire si en outre $t_{i_1} \neq t_{i_2}$, $i_1 \neq i_2$ et $i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, j\}$), on définit son poids moyen par $|\zeta|_w / |\zeta|_l$ (la division est celle de l'algèbre conventionnelle), où $|\zeta|_w \stackrel{\text{def}}{=} a_{t_2 t_1} \otimes \dots \otimes a_{t_{j+1} t_j}$ est le poids de ζ et $|\zeta|_l \stackrel{\text{def}}{=} j$ est sa longueur. Pour l'ensemble de tous chemins entre deux nœuds le(s) chemin(s) avec le poids moyen maximal est (sont) appelé(s) critique(s). Le(s) circuit(s) élémentaire(s) avec le poids moyen maximal (dans l'ensemble de tous les circuits) est (sont) appelé(s) pulsatif(s).*

THÉORÈME 4: *Si la matrice A est irréductible (de façon équivalente : $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe), il existe une valeur propre (notée λ_{\max}) qui est unique et un vecteur propre $v \neq \varepsilon$ (non nécessairement unique) tels que $A \otimes v = \lambda_{\max} \otimes v$. La valeur propre est égale au poids moyen maximal du (des) circuit(s) pulsatif(s).*

Pour une discussion de ce théorème on peut consulter [4], chapitre 24 ; voir aussi [2] par exemple pour une preuve compacte. La valeur propre correspondante à D (dans l'algèbre min-plus) est notée λ_{\min} .

THÉORÈME 5: *Pour toute matrice carrée A de valeur propre λ_{\max} , il existe des entiers d et M tels que $\forall m \geq M$ on ait $A^{m+d} = \lambda_{\max}^d \otimes A^m$. Le plus petit d vérifiant la propriété précédente est égal à la cyclicité du graphe critique de A (voir [2]).*

Dans le cas où il existe un et seulement un circuit ζ de $\mathcal{G}(A)$ dont le poids moyen est égal au poids moyen maximal, la cyclicité mentionnée est égale à $|\zeta|_l$. Pour calculer la valeur propre et un vecteur propre, plusieurs algorithmes existent, par exemple, l'algorithme de Karp (voir [7]), par la résolution de l'équation caractéristique, au moyen de l'optimisation linéaire (voir [2, 8]).

Maintenant nous considérons de nouveau le système (1), (2) que nous écrivons de façon plus compacte :

$$(x(k+1), y(k+1)) = \mathcal{M}((x(k), y(k))).$$

DÉFINITION 6: Un scalaire λ , $\varepsilon \leq \lambda \leq \top$, est appelé valeur propre de l'application \mathcal{M} , s'il existe un vecteur (x, y) , où x ou y a au moins une coordonnée finie (c.à.d. $\in R$), tel que

$$(\lambda \otimes x, \lambda \odot y) = \mathcal{M}((x, y)). \quad (4)$$

Le vecteur (x, y) s'appelle vecteur propre de \mathcal{M} .

Pour définir un « circuit pulsatif » on a besoin d'un sous-graphe de $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ avec $n + m$ nœuds construit de la façon suivante. Considérez la i -ième équation scalaire de (4), c.à.d. $(\lambda \otimes x, \lambda \odot y)_i = (\mathcal{M}((x, y)))_i$, $i = 1, 2, \dots, n + m$. Parmi les $n + m$ termes individuels dans le deuxième membre de cette expression (qui ont une des formes $a_{ik} + x_k$ ou $b_{ik} + y_k$ si $i \leq n$ et $c_{i-n,k} + x_k$ ou $d_{i-n,k} + y_k$ si $i > n$) il y en a au moins un qui conduit à l'égalité. Soient i_1, \dots, i_{l_i} de tels termes, on relie chaque nœud i_1, \dots, i_{l_i} , au nœud i par un arc orienté. On crée ces arcs pour $i = 1, 2, \dots, n + m$. Le graphe construit de cette façon est appelé *graphe de saturation* (associé à la valeur propre). Tous les circuits de ce graphe (la preuve qu'il y a des circuits est facile et est laissée au lecteur) sont appelés pulsatifs. De manière équivalente, on obtient :

DÉFINITION 7: Les circuits dans $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ qui déterminent la « vitesse » de \mathcal{M} , c'est-à-dire $1/\lambda$, sont appelés pulsatifs.

THÉORÈME 8: Supposons que A et D soient irréductibles et $B \neq \varepsilon$, $C \neq \top$. L'application \mathcal{M} a une valeur propre unique λ et un vecteur propre, correspondant à cette valeur propre, de coordonnées finies ssi $\lambda_{\max} \leq \lambda_{\min}$. Alors on a $\lambda_{\max} \leq \lambda \leq \lambda_{\min}$.

Hormis le théorème 8, dont la preuve a été donnée en [9], peu de propriétés de (1), (2) sont réellement connues. Dans ce travail nous considérons les points suivants.

- D'après le théorème 8 le système (1), (2) a un comportement périodique de période 1 (en supposant que les conditions soient vérifiées et que l'on choisisse les conditions initiales propres). Il existe une relation avec des circuits critiques. Comment définir de tels circuits? Ici on parle d'un comportement périodique si il existe des scalaires d, c, K , tel que $x(k+d) = x(k) \otimes c$, $y(k+d) = y(k) \odot c$, pour $k \geq K$.

• Si pour le système $x(k+1) = A \otimes x(k)$ dans l'algèbre max-plus on a $x(k+d) = x(k) \otimes c$, la moyenne arithmétique de la suite finie de termes $x(l)$, $l = k, k+1, \dots, k+d-1$ donne un vecteur propre et c/d est une valeur propre (voir [9] et [3]). Est-ce qu'une propriété similaire existe pour des systèmes min-max ?

• La solution de (1), (2), issue de $(x(0), y(0))$ arbitraire, converge en un nombre fini d'étapes vers un tel comportement ?

3. ANALYSE GÉNÉRALE

Dans cette section et les prochaines nous supposons que A et D sont irréductibles, $B \neq \varepsilon$, $C \neq \top$ et $\lambda_{\max} < \lambda_{\min}$. On considère l'évolution de (1), dans laquelle $y(k)$ n'est pas déterminé par (2) mais est défini comme une suite indépendante

$$y(k) = \alpha^k \otimes \bar{y}, \quad k = 0, 1, \dots, \quad (5)$$

où α est un nombre réel avec $\lambda_{\max} < \alpha < \lambda_{\min}$ et $\bar{y} \in (R \cup \varepsilon)^m$. Il existe un nombre K qui dépend entre autres de la condition initiale de (1), tel que la solution de

$$x(k+1) = Ax(k) \oplus \alpha^k B \bar{y} \quad (6)$$

pour $k \geq K$ est

$$x(k) = \alpha^k (\alpha^{-1} A)^* \otimes (\alpha^{-1} B) \bar{y}. \quad (7)$$

Ici une expression Q^* , où Q est une matrice carrée, est définie comme la série $Q^* \stackrel{\text{def}}{=} I \oplus Q \oplus Q^2 \oplus \dots$. La matrice I est la matrice identité (c.à.d. les éléments diagonaux sont 0, les autres éléments sont ε) du même ordre que Q . La série $(\alpha^{-1} A)^* = I \oplus \alpha^{-1} A \oplus \alpha^{-2} A^2 \oplus \dots$ est convergente parce que l'on a $\alpha > \lambda_{\max}$. On définit $\bar{x} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha^{-1} A)^* \otimes (\alpha^{-1} B) \bar{y}$ et on peut écrire

$$x(k) = \alpha^k \bar{x}, \quad k \geq K. \quad (8)$$

Maintenant on considère (2) où $x(k)$ est donné par (8) (au lieu de (1)). On peut résoudre

$$y(k+1) = \alpha^k C \bar{x} \wedge D y(k), \quad k \geq K, \quad (9)$$

et on obtient

$$y(k) = \alpha^k (\alpha^{-1} D)^* \wedge (\alpha^{-1} C) \bar{x}. \quad (10)$$

Cette solution est valable pour $k \geq L$, où L dépend de K et des vecteurs $x(k)$, $k = 0, 1, \dots, K-1$. Attention: il faut considérer (10) dans l'algèbre min-plus. Il en découle que $(\lambda^{-1} D)^*$ est égale à $I \wedge \alpha^{-1} D \wedge \alpha^{-2} D^2 \wedge \dots$, où les éléments diagonaux de I sont à 0 et les autres éléments sont égaux à \top . La série est convergente parce que $\alpha < \lambda_{\min}$. Si on définit $\tilde{y} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha^{-1} D)^* \wedge (\alpha^{-1} C) \bar{x}$, on obtient $y(k) = \alpha^k \tilde{y}$, $k \geq L$.

La combinaison de (10) et de la définition de \bar{x} donne

$$y(k) = \alpha^k (\alpha^{-1} D)^* \wedge (\alpha^{-1} C) \wedge (\alpha^{-1} A)^* \otimes (\alpha^{-1} B) \otimes \tilde{y}. \quad (11)$$

Si on veut que la solution donnée dans (11) soit égale à l'expression dans (5), alors on ferme la boucle entre les deux sous-systèmes. Cela est possible ssi

$$\tilde{y} = \bar{y} = (\alpha^{-1} D)^* \wedge (\alpha^{-1} C) \wedge (\alpha^{-1} A)^* \otimes (\alpha^{-1} B) \otimes \bar{y}. \quad (12)$$

Si il existe α avec $\lambda_{\max} < \alpha < \lambda_{\min}$ et \bar{y} tels que l'égalité (12) soit vraie, alors α est une valeur propre de \mathcal{M} et (\bar{x}, \bar{y}) est un vecteur propre correspondant. Si un tel α avec $\lambda_{\max} < \alpha < \lambda_{\min}$ n'existe pas, la valeur propre de \mathcal{M} est λ_{\max} si

$$h(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} \max_{\bar{y}} [\min_i ((\alpha^{-1} D)^* \wedge (\alpha^{-1} C) \wedge (\alpha^{-1} A)^* \otimes (\alpha^{-1} B) \otimes \bar{y})_i - \bar{y}_i]$$

est strictement inférieur à zéro pour $\alpha \in (\lambda_{\max}, \lambda_{\min})$. Si $h(\alpha) > 0$ pour $\alpha \in (\lambda_{\max}, \lambda_{\min})$, la valeur propre est λ_{\min} (voir [9]).

Pour le reste de cette section nous faisons l'hypothèse supplémentaire que l'application \mathcal{M} est simple.

DÉFINITION 9: L'application \mathcal{M} est appelée simple si chaque nœud du graphe de saturation de $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ a exactement un nœud directement en amont et si le graphe de saturation ne contient qu'un circuit (qui est automatiquement pulsatif et élémentaire).

Le graphe de saturation d'une application simple est constitué d'un circuit élémentaire (noté par ζ_p) et des chemins issus de ce circuit (le graphe ressemble à une fleur de tournesol). Supposons que λ soit la valeur propre et $(\bar{x}, \bar{y})'$ soit un vecteur propre de \mathcal{M} simple. Considérons le système (1), (2) issu de $x(0) = \bar{x}$, $y(0) = \bar{y}$. On a $((x(k), y(k)))' = \lambda^k (\bar{x}, \bar{y})'$. Maintenant nous faisons une petite perturbation dans la condition initiale: au lieu de $x(0)_{i_1} = \bar{x}_{i_1}$, où i_1 correspond à un nœud du circuit du graphe de saturation, on prend $x_{i_1} = \bar{x}_{i_1} + \delta$, où δ est un nombre proche de 0.

(Si un tel i n'existe pas on prend $y(0)_{j_1} = \bar{y}_{j_1} + \delta$, où j_1 correspond au même circuit.) Les autres $n + m - 1$ coordonnées de $(x(0), y(0))'$ restent les mêmes. Cette perturbation δ circule dans le circuit et se propage avec k dans les chemins du graphe de saturation, issus du circuit. Il n'y a pas d'autres perturbations pourvu que δ soit assez proche de 0. Chaque nœud de $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ rencontre la perturbation δ une fois par $|\zeta_p|_l$ étapes successives de k (pourvu que $k > K$, où K dépend de $|\zeta_p|_l$ et des longueurs des chemins du graphe de saturation). La solution de (1), (2) issue de la condition initiale perturbée a trois propriétés.

- La solution est périodique de période $|\zeta_p|_l$ dans le sens suivant

$$x_i(k + |\zeta_p|_l) = x_i(k) \lambda^{|\zeta_p|_l}, \quad i = 1, \dots, n,$$

$$y_j(k + |\zeta_p|_l) = y_j(k) \lambda^{|\zeta_p|_l}, \quad j = 1, \dots, m,$$

pour $k > K$.

• On a $x_i(k) = \lambda^k \bar{x}_i$, $k = \kappa, \kappa + 1, \dots, \kappa + |\zeta_p|_l - 1$ et $\kappa > K$, excepté pour un $k_i \in \{\kappa, \kappa + 1, \dots, \kappa + |\zeta_p|_l - 1\}$ pour lequel on a $x_i(k_i) = \lambda^{k_i} \bar{x}_i + \delta$. La même observation est valable pour $y_j(k)$.

- Dans la notation conventionnelle on a

$$\begin{aligned} & \frac{x_i(k) + \dots + x_i(k + |\zeta_p|_l - 1)}{|\zeta_p|_l} \\ &= \frac{\left(\sum_{l=k}^{k+|\zeta_p|_l-1} \lambda^l \right) + |\zeta_p|_l \bar{x}_i + \delta}{|\zeta_p|_l} = \bar{x}_i + \xi, \end{aligned} \quad (13)$$

où $\xi = \left(\left(\sum_{l=k}^{k+|\zeta_p|_l-1} \lambda^l \right) + \delta \right) / k$ ne dépend pas de \bar{x}_i . Il existe une équation identique pour les variables y_j . Le vecteur constitué des coordonnées $\bar{x}_i + \xi$, $i = 1, \dots, n$ et $\bar{y}_j + \xi$, $j = 1, \dots, m$ est un vecteur propre. Ainsi on a démontré que la moyenne arithmétique dans (13) (et dans une expression similaire pour les $y_j(k)$) est un vecteur propre !

La construction du vecteur propre au moyen de la moyenne arithmétique reste valable si on commence avec une perturbation plus générale : il faut que les perturbations des coordonnées qui correspondent aux nœuds de ζ_p soient assez proches de 0. Les perturbations des autres coordonnées sont

arbitraires (les dernières perturbations sont repoussées en dehors du système avec k croissant).

THÉORÈME 10: *Si \mathcal{M} est simple et si $(x(0), y(0))'$ est assez proche d'un vecteur propre (de la manière décrite ci-dessus), la solution de (1), (2) converge en un nombre fini d'étapes vers un comportement périodique. On peut calculer le vecteur propre (et la valeur propre) par la moyenne arithmétique.*

4. SYSTÈMES AVEC CONNEXIONS SCALAIRES ENTRE PARTIES MIN ET MAX

En dehors des hypothèses énoncées au début de la dernière section, nous supposons ici qu'un élément de B , b_{ij} , est un nombre réel ($\neq \varepsilon$) et que les autres éléments de B sont égaux à ε . Ainsi il n'existe qu'un élément de C , c_{kl} , qui n'est pas égal à \top ; les autres éléments de C sont égaux à \top . L'égalité (12) s'écrit maintenant

$$\bar{y}_j = ((\alpha^{-1} D)^*)_{jk} \wedge (\alpha^{-1} C)_{kl} \wedge ((\alpha^{-1} A)^*)_{li} \otimes (\alpha^{-1} B)_{ij} \otimes \bar{y}_j$$

et la valeur propre λ doit donc vérifier

$$((\lambda^{-1} D)^*)_{jk} \wedge (\lambda^{-1} C)_{kl} \wedge ((\lambda^{-1} A)^*)_{li} \otimes (\lambda^{-1} B)_{ij} = 0. \quad (14)$$

Dans le graphe $\mathcal{G}(\lambda^{-1} D)$, l'expression $((\lambda^{-1} D)^*)_{jk}$ est le plus petit poids parmi tous les poids des chemins qui relient les nœuds k et j . De façon similaire $((\lambda^{-1} A)^*)_{li}$ est le plus grand poids parmi tous les chemins de $\mathcal{G}(\lambda^{-1} A)$ qui relient les nœuds i et l . On peut donc en conclure que pour le calcul de la valeur propre de \mathcal{M} il ne faut considérer que le chemin critique (poids moyen maximal) de i à l dans $\mathcal{G}(A)$ et le chemin critique (poids moyen minimal) de k à j dans $\mathcal{G}(D)$. Le graphe $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est défini comme la combinaison des graphes $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(D)$ avec les arcs de j à i et de l à k .

DÉFINITION 11: *Un circuit élémentaire dans $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ qui relie i avec l , l avec k , k avec j et j avec i est appelé critique si les deux chemins qui sont des parties du circuit et qui appartiennent à $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(D)$ respectivement sont critiques. Un chemin dans $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ est appelé critique si il est une partie d'un circuit critique.*

Remarque 12: Un circuit critique dans $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ n'est pas nécessairement unique. Si $l = i$, on a $((\lambda^{-1} A)^*)_{ii} = 0$; et si $k = j$ on a $((\lambda^{-1} D)^*)_{jj} = 0$.

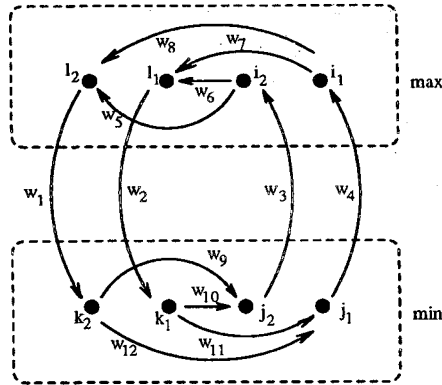


Figure 2. – Système \mathcal{M} avec les valeurs w_i .

Une interprétation de (14) donne

THÉOREME 13: *S'il existe λ avec $\lambda_{\max} < \lambda < \lambda_{\min}$ vérifiant (14), λ est la valeur propre de \mathcal{M} et est égale au poids moyen d'un circuit critique de $\mathcal{G}(\mathcal{M})$.*

Gunawardena [6] a démontré que pour les systèmes avec $m = n = 1$, la solution converge en un nombre fini d'étapes vers un comportement périodique de période 1 ou 2:

THÉOREME 14: *Si dans le système*

$$x(k+1) = (x(k) \otimes a_{11}) \oplus (y(k) \otimes b_{11}),$$

$$y(k+1) = (x(k) \odot c_{11}) \wedge (y(k) \odot d_{11}),$$

avec une condition initiale arbitraire, on a

- $a_{11} < (b_{11} + c_{11})/2 < d_{11}$, *il existe K , tel que*

$$x(k+1) = x(k) + (b_{11} + c_{11})/2$$

et $y(k+1) = y(k) + (b_{11} + c_{11})/2$ si $k > K$;

- $a_{11} \geq (b_{11} + c_{11})/2$, *il existe K , tel que $x(k+1) = x(k) + a_{11}$ et $y(k+1) = y(k) + a_{11}$ si $k > K$;*

- $(b_{11} + c_{11})/2 \geq d_{11}$, *il existe K , tel que $x(k+1) = x(k) + d_{11}$ et $y(k+1) = y(k) + d_{11}$ si $k > K$.*

La preuve use d'un théorème très élégant du point fixe. Une autre preuve, avec des moyens mathématiques élémentaires, mais qui occupe trop de place ici, a été donné en [10]. La généralisation des deux preuves aux systèmes de dimension plus grande paraît difficile.

5. SYSTÈMES AVEC CONNEXIONS VECTORIELLES

Nous supposons maintenant qu'il y a exactement deux éléments de B , $b_{i_1 j_1}$ et $b_{i_2 j_2}$, qui ne sont pas égaux à ε et qu'il y a exactement deux éléments de C , $c_{k_1 l_1}$ et $c_{k_2 l_2}$ qui ne sont pas égaux à \top . Les nœuds i_1 et i_2 sont appelés les nœuds d'entrée et les nœuds l_1 et l_2 les nœuds de sortie du graphe $\mathcal{G}(A)$. Similairement k_1 et k_2 respectivement j_1 et j_2 sont les nœuds d'entrée et les nœuds de sortie du graphe $\mathcal{G}(D)$. L'égalité (12) est constituée de deux équations scalaires qui ne sont pas d'identités ($\varepsilon = \varepsilon$) :

$$\left. \begin{aligned} \bar{y}_{j_1} &= [\Upsilon_{j_1 k_1 l_1 i_1 j_1} \bar{y}_{j_1} \oplus \Upsilon_{j_1 k_1 l_1 i_2 j_2} \bar{y}_{j_2}] \\ &\quad \wedge [\Upsilon_{j_1 k_2 l_2 i_1 j_1} \bar{y}_{j_1} \oplus \Upsilon_{j_1 k_2 l_2 i_2 j_2} \bar{y}_{j_2}] ; \\ \bar{y}_{j_2} &= [\Upsilon_{j_2 k_1 l_1 i_1 j_1} \bar{y}_{j_1} \oplus \Upsilon_{j_2 k_1 l_1 i_2 j_2} \bar{y}_{j_2}] \\ &\quad \wedge [\Upsilon_{j_2 k_2 l_2 i_1 j_1} \bar{y}_{j_1} \oplus \Upsilon_{j_2 k_2 l_2 i_2 j_2} \bar{y}_{j_2}] , \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

où

$$\Upsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5} \stackrel{\text{def}}{=} (\alpha^{-1} D)_{m_1 m_2}^* \alpha^{-1} c_{m_2 m_3} (\alpha^{-1} A)_{m_3 m_4}^* \alpha^{-1} b_{m_4 m_5},$$

c.à.d. $\Upsilon_{m_1 m_2 m_3 m_4 m_5}$ est le poids du chemin qui relie les nœuds m_5 dans $\mathcal{G}(D)$ à m_4 puis m_3 dans $\mathcal{G}(A)$, qui est, à son tour, relié à m_2 et m_1 dans $\mathcal{G}(D)$. Les parties du chemin entre m_4 et m_3 dans $\mathcal{G}(A)$ et entre m_2 et m_1 sont respectivement maximale (dans le sens du poids moyen) et minimale (aussi dans le sens du poids moyen), c.à.d. ces parties du chemin (qui sont des « sous-chemins ») sont critiques. Nous avons démontré le théorème suivant pour des systèmes avec deux connexions dans chacune des deux directions entre $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(D)$, mais la preuve pour le cas général est identique.

THÉORÈME 15 : *Pour étudier l'existence d'une valeur propre de \mathcal{M} qui vérifie $\lambda_{\max} < \lambda < \lambda_{\min}$ il suffit de considérer seulement les chemis critiques entre les nœuds d'entrée et les nœuds de sortie des graphes $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(D)$.*

DÉFINITION 16 : *Un circuit dans $\mathcal{G}(\mathcal{M})$ qui relie alternativement des chemins dans $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(D)$ n'est appelé critique que si tous ces chemins (dans $\mathcal{G}(A)$ ou $\mathcal{G}(D)$) sont critiques. Parmi tous les circuits critiques qui traversent à la fois $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(D)$, le circuit avec le poids moyen maximal (minimal) est appelé le circuit maximal* (minimal*).*

Remarque 17 : Nous avons introduit les notions « maximal* » et « minimal* » parce que les notions plus simples « maximal » et « minimal » ont été réservées pour des circuits dans $\mathcal{G}(A)$ ou $\mathcal{G}(D)$. ■

Avec des moyens mathématiques élémentaires (essentiellement, il faut distinguer tous les inégalités possibles et les étudier, voir [10] pour les détails) on peut démontrer :

THÉOREME 18 : *Sous les conditions de cette section, le circuit pulsatif n'est ni maximal* ni minimal*.*

On peut aussi étudier la propriété donnée dans le théorème 18 par des circuits critiques. Dans le reste de cette section nous supposons que $\lambda_{\max} < \lambda < \lambda_{\min}$ et il n'y a pas de restrictions sur le nombre d'éléments de B et de C qui ne sont pas égaux à ε ou \top .

THÉOREME 19 : *Si ζ_p est un circuit pulsatif et si il existe $b_{i_1 j_1} > \varepsilon$ qui n'est pas membre de ζ_p , alors ζ_p ne peut pas être minimal*.*

Preuve : Nous allons supposer que ζ_p est pulsatif et minimal* et nous allons obtenir une contradiction (démonstration par l'absurde). Nous construisons un circuit ζ_q de la façon suivante, voir la figure 3. Soit $l_1 \in \zeta_p$ un nœud de sortie dans $\mathcal{G}(A)$ et soit $k_2 \in \zeta_p$ un nœud d'entrée dans $\mathcal{G}(D)$ (remarquons que ces nœuds ne sont pas nécessairement uniques parce qu'il est possible que ζ_p relie $\mathcal{G}(A)$ et $\mathcal{G}(D)$ plusieurs fois). Le circuit ζ_q est défini comme le circuit qui relie i_1 avec l_1 au moyen d'un chemin critique dans $\mathcal{G}(A)$, qui relie l_1 avec k_2 suivant une partie de ζ_p et qui relie k_2 avec j_1 au moyen d'un chemin critique dans $\mathcal{G}(D)$ et enfin j_1 avec i_1 par l'arc $b_{i_1 j_1}$. Par définition, le poids moyen de ζ_q est plus grand que le poids moyen de ζ_p . Les activités de l_1 sont alors déterminées par le « fluide » entrant par ζ_q et non par celui entrant par ζ_p (parce que l'opérateur « max » est utilisé au nœud l_1). Ainsi on conclut que ζ_p n'est pas pulsatif et une contradiction a été obtenue. ■

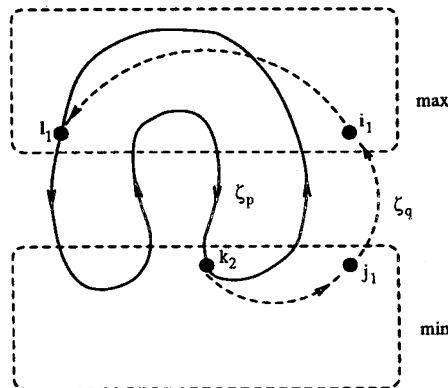


Figure 3. – Preuve qu'un circuit pulsatif n'est pas minimal*.

On peut démontrer le théorème suivant, dual au théorème précédent, de façon similaire.

THÉOREME 20: *Si ζ_p est un circuit pulsatif et si il existe $c_{k_1 l_1} < T$ qui n'est pas membre de ζ_p , alors ζ_p ne peut pas être maximal*.*

On peut baser un algorithme sur ces deux théorèmes pour déterminer le circuit pulsatif (ou, plus modestement, pour réduire le nombre des candidats au circuit pulsatif). Le circuit pulsatif ζ_p est un point selle dans le sens suivant. Si on construit un circuit ζ_q basé sur ζ_p comme dans la preuve du théorème 19, le poids moyen de ζ_q est plus petit que le poids moyen de ζ_p . Cette construction n'est possible que s'il existe un arc $b_{i_1 j_1} > \varepsilon$ qui n'est pas membre de ζ_p . D'autre part, si on construit un circuit ζ_q construit à partir de ζ_p comme dans la preuve du théorème 20 (possible s'il existe $c_{k_1 l_1} < T$ qui n'est pas membre de ζ_p), le poids moyen de ζ_q est plus grand que le poids moyen de ζ_p . On peut ainsi invoquer la théorie des jeux à deux joueurs de somme nulle.

Exemple 21: Considérons le système de section 5 comme représenté dans la figure 2. Supposons $w_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$ et $w_5 = 8$, $w_6 = 9$, $w_7 = 11$, $w_8 = 12$, $w_9 = 10$, $w_{10} = 12$, $w_{11} = 13$, $w_{12} = 13$. Le circuit pulsatif est $w_2 \rightarrow w_{11} \rightarrow w_4 \rightarrow w_7$. On peut vérifier que ce circuit est un point selle à la manière écrite ci-dessus.

Considérons maintenant le même système, mais avec $w_i = 0$, $i = 1, \dots, 4$ et $w_5 = 5$, $w_6 = 10$, $w_7 = 5$, $w_8 = 5$, $w_9 = 2$, $w_{10} = 1$, $w_{11} = 3$, $w_{12} = 7$. Le circuit pulsatif est $w_1 \rightarrow w_9 \rightarrow w_3 \rightarrow w_6 \rightarrow w_2 \rightarrow w_{11} \rightarrow w_4 \rightarrow w_8$. Il ne faut pas appliquer la méthode du point selle parce qu'il n'y a que des arcs $b_{i_1 j_1}$ ou $c_{k_1 l_1}$ qui sont membres de ζ_p .

6. CONCLUSION

Dans la théorie des systèmes min-max il faut distinguer des circuits maximaux (minimaux) et des circuits pulsatifs. Dans la théorie des systèmes max-plus (min-plus) ces ensembles de circuits coïncident. A cause de cette distinction la théorie des systèmes min-max caractérise des valeurs propres et des comportements périodiques plus complexes.

REMERCIEMENTS

Je remercie l'INRIA de son hospitalité pendant mon séjour sabbatique durant lequel ce travail a eu lieu et tout spécialement Odile Pourtallier de son aide concernant le français de cet article.

RÉFÉRENCES

1. F. BACCELLI, G. COHEN et B. GAUJAL, Recursive equations and basic properties of timed Petri nets, *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 1992, 2, p. 415-439.
2. F. BACCELLI, G. COHEN, G. J. OLSDER et J. P. QUADRAT, *Synchronization and Linearity*, Wiley, 1992.
3. J. G. BAKER et G. J. OLSDER, The power algorithm in max-algebra, *Linear Algebra and its Applications*, 1993, 187, p. 67-89.
4. R. A. CUNINGHAME-GREEN, *Minimax Algebra*, Number 166 in Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems. Springer-Verlag, Berlin, 1979.
5. J. GUNAWARDENA, Min-max functions, *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 1994, 4, p. 377-407.
6. J. GUNAWARDENA, *Periodic behaviour in timed systems with (and, or) causality. Part I: systems of dimensions 1 and 2*, Technical report, Department of Computer Science, Stanford University, Standord, CA 94305, USA, 1993.
7. R. M. KARP, A characterization of the minimum cycle mean in a digraph, *Discrete Mathematics*, 1978, 23, p. 309-311.
8. S. MORIOKA et T. YAMADA, Performance evaluation of marked graphs by linear programming, *International Journal of Systems Science*, 1991, 22, p. 1541-1552.
9. G. J. OLSDER, Eigenvalues of dynamic min-max systems, *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 1991, 1, p. 177-207.
10. G. J. OLSDER, *Analyse de systèmes min-max*, Technical Report 1904, INRIA, Sophia-Antipolis, France, 1993.