RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

F. BENINEL
A. QANNARI
E. M. QANNARI

# Distance à centre additive

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 28, nº 4 (1994), p. 357-368
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1994__28_4_357_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 28, n° 4, 1994, p. 357 à 368)

# DISTANCE À CENTRE ADDITIVE (*)

par F. BENINEL ([1]), A. QANNARI ([1]) et E. M. QANNARI ([2])

Résumé. – *Pour nous permettre une représentation euclidienne d'une dissimilarité, nous proposons de la perturber par l'addition d'une distance à centre. Cette technique constitue une extension de la méthode dite méthode de la constante additive et les solutions que nous proposons semblent plus pertinentes. Pour la résolution du problème, nous développons la forme de Torgerson associée à la distance perturbée et nous étudions des conditions pour que cette forme soit semi définie positive.*

Mots clés : Dissimilarité, distance euclidienne, distance à centre, forme de Torgerson.

Abstract. – *In order to find a geometric representation of a non Euclidian matrix of dissimilarity, we study a perturbation of such dissimilarities by addition of a specific distance: the star distance. This technique extends the so-called "additive constant method". In a first step, we develop the Torgerson form associated with the perturbed matrix and, in a second step, we give conditions that ensure this form to be positive semi-definite.*

Keywords: Dissimilarity, Euclidean distance, star distance, Torgerson form.

## INTRODUCTION

Il arrive que les données observées se présentent directement sous forme d'un tableau de dissimilarités entre un ensemble d'individus. C'est le cas des distances génétiques entre espèces. C'est aussi le cas, en évaluation sensorielle de produits alimentaires, lorsque les juges donnent directement des proximités entre des produits au lieu de les évaluer individuellement. Dans d'autres cas de figures, il peut s'avérer plus pertinent de transformer un tableau de données en un tableau de dissimilarités car ceci procure plus de souplesse pour mettre en relief des aspects qui intéressent directement l'utilisateur. Les méthodes de représentations graphiques des tableaux de dissimilarités sont utiles car elles donnent un aperçu des positions relatives des individus. Cependant, lorsque la dissimilarité étudiée n'est

(*) Received July 1992.

([1]) IUT de Statistique, Centre du Dugesclin, place Chanzy, 79000 Niort.
([2]) ENITIAA, Laboratoire de Statistique, La Géraudière, 44072 Nantes Cedex.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/94/04/$ 4.00

pas euclidienne, l'utilisateur doit préalablement l'approcher par une distance euclidienne.

Soit $D$ une mesure de dissimilarité ($D_{ii} = 0$; $D_{ij} = D_{ji} \geq 0$) sur un ensemble d'items indexés par $I = \{1, 2, \ldots, n\}$. En positionnement multidimensionnel, l'un des problèmes est de trouver une représentation euclidienne de $D$.

Une mesure de dissimilarité, $D$, admet une représentation exacte s'il existe $n$ points $M_1, M_2, \ldots, M_n$ d'un espace euclidien, $E$, tels que :

$$D_{ij} = \|\overrightarrow{M_i M_j}\| \quad \text{pour tout couple } (i, j) \text{ de} I^2$$

où $\| \cdot \|$ est une norme euclidienne sur $E$. Une telle représentation est possible si, et seulement si la forme de Torgerson, $W(D)$, associée à $D$ est semi définie positive (sdp) (Shoenberg, 1937). Cette forme s'exprime :

$$W(D) = -\frac{1}{2}\left(I - \frac{1}{n} 1 I^t 1 I\right) D^* D \left(I - \frac{1}{n} 1 I^t 1 I\right)$$

où :

$*$ désigne le produit matriciel d'Hadamard (produit terme à terme);

$I$ la matrice identité d'ordre $n$;

et $1 I$ le vecteur de $R^n$ dont toutes les composantes sont égales à 1.

Lorsque $D$ n'est pas euclidienne, plusieurs stratégies visant à proposer des représentations euclidiennes approchées sont étudiées. Pour un développement de ces méthodes, nous renvoyons à De Leeuw (1982) et Beninel (1987).

La stratégie de la constante additive (Lingoes, 1971 ; Caillez, 1983) consiste à approcher $D$ par une distance euclidienne $\Delta$ définie par :

$$\Delta_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \text{si } i = j \\ \sqrt{D_{ij}^2 + c} & \text{sinon} \end{bmatrix}$$

Un choix optimal de la valeur $c$ est donné par $c = -2\lambda_n$ ; où $\lambda_n$ désigne la plus petite valeur propre de $W(D)$. Remarquons que $c$ est une quantité positive car $\lambda_n$ est une valeur négative en tant que dernière valeur propre de la matrice $W(D)$ qui n'est pas sdp.

Il nous semble que la stratégie de la constante additive est relativement contraignante car elle perturbe toutes les distances de la même manière. Comme nous le verrons dans l'exemple du paragraphe suivant, les dissimilarités initiales peuvent être structurées de telle sorte que des perturbations non uniformes conduisent à une meilleure solution. C'est ce que nous proposons par l'addition d'une distance à centre.

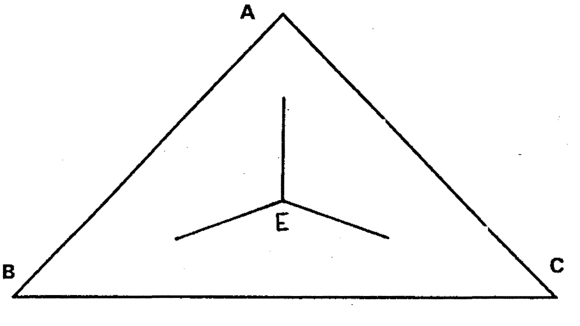
## 1. EXEMPLE

L'illustration de ce travail se fera sur la base de l'exemple ci-après tiré de Gower (1986).

Soit un ensemble de quatre items : $A$, $B$, $C$, $E$. Le tableau $D$, ci-après, fournit une dissimilarité sur cet ensemble :

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} A & B & C & E \end{array} \\ D = & \begin{bmatrix} 0 & & & \\ 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 0 & \\ 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ E \end{array} \end{array}$$

Nous pouvons imaginer $A$, $B$, $C$ comme étant les sommets d'un triangle équilatéral de côté égal à 1 ; le point $E$ est à égale distance des trois sommets $A$, $B$, $C$. Le positionnement du point E n'est pas possible en géométrie euclidienne (*voir* figure ci-après). En effet, un point équidistant de $A$, $B$, $C$ se situerait à une distance au moins égale à $\frac{\sqrt{3}}{3}$ de chacun des points.




La forme de Torgerson, $W(D)$, associé à $D$ est donné par :

$$W(D) = \frac{1}{64} \begin{bmatrix} 21 & -11 & -11 & 1 \\ -11 & 21 & -11 & 1 \\ -11 & -11 & 21 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

et admet pour valeur propres :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_4 = -\frac{1}{16}$$

La distance euclidienne, $\Delta$, qui approche la dissimilarité $D$ selon la méthode de la constante additive est donnée par :

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ \sqrt{D_{ij}^2 + 2|\lambda_4|} = \sqrt{D_{ij}^2 + \frac{1}{8}} & \text{sinon} \end{cases}$$

Le coût de l'approximation de $D$ par $\Delta$ peut être évalué par :

$$K(D, \Delta) = \sum_i \sum_j (\Delta_{ij}^2 - D_{ij}^2) = \frac{3}{2}$$

Il apparaît intuitivement que nous pouvons trouver une perturbation de moindre coût en changeant uniquement les distances du point $E$ aux autres points. Par exemple, la distance euclidienne donnée par :

$$\Delta'(A, B) = \Delta'(A, C) = \Delta'(B, C) = 1$$
$$\Delta'(A, E) = \Delta'(B, E) = \Delta'(C, E) = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{12}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

est de moindre coût :

$$K(D, \Delta') = \frac{1}{2}.$$

## 2. DISTANCE À CENTRE ADDITIVE

### 2.1. Distance à centre

Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des réels positifs, la dissimilarité définie sur l'ensemble, $I$, des items par :

$$c_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ x_i + x_j & \text{sinon} \end{cases}$$

est une distance dite à centre.

Les propriétés et les représentations d'une telle distance sont étudiées dans Lecalvé (1990).

La perturbation par une distance à centre additive consiste à substituer à une dissimilarité non euclidienne, $D$, une dissimilarité, $\Delta$, définie par :

$$\Delta_{ij}^2 = D_{ij}^2 + (1 - \delta^{ij})\, c_{ij}$$

où $\delta^{ij}$ est le symbole de Kronecker et $c_{ij}$ est l'élément générique d'une distance à centre. Ceci peut encore s'écrire :

$$\Delta_{ij}^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ D_{ij}^2 + x_i + x_j & \text{sinon} \end{cases}$$

Le coût associé à une telle perturbation, et que nous nous attacherons à minimiser par la suite, est donné par :

$$K(D, \Delta) = \sum_i \sum_j (\Delta_{ij}^2 - D_{ij}^2) = 2(n-1) \sum x_j$$

Remarquons que lorsque nous imposons à toutes les valeurs $x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ d'être égales, nous nous ramenons au cas de la constante additive.

### 2.2. Formes de Torgerson

Nous proposons d'expliciter la forme de Torgerson, $W(\Delta)$, associée à $\Delta$ en fonction de la forme de Torgerson, $W(D)$, associée à $D$ :

$$\forall (i, j) \in I^2 \qquad W(\Delta)_{ij} = \frac{1}{2} (\Delta_{i.}^2 + \Delta_{.j}^2 - \Delta_{..}^2 - \Delta_{ij}^2)$$

Plus précisément :

$$\Delta_{i.}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{ik}^2 = D_{i.}^2 + \frac{1}{n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} (x_i + x_k)$$

En désignant par $\overline{x} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$, il s'ensuit :

$$\Delta_{i.}^2 = D_{i.}^2 + \overline{x} + \frac{n-2}{n}\, x_i$$

Pour des raisons de symétrie, nous avons :

$$\Delta_{.j}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{kj}^2 = D_{.j}^2 + \overline{x} + \frac{n-2}{n}\, x_j$$

La quantité $\Delta_{..}^2$ est donnée par :

$$\Delta_{..}^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \Delta_{k.}^2 = D_{..}^2 + \frac{2n-2}{n} \overline{x}$$

En définitive, nous avons :

$$W(\Delta)_{ij} = \begin{bmatrix} W(D)_{ij} + \frac{\overline{x}}{n} + \frac{(n-2)}{n)} x_i & \text{si } i = j \\ W(D)_{ij} + \frac{\overline{x}}{n} - \frac{(x_i + x_j)}{n} & \text{si } i \# j \end{bmatrix}$$

ou encore sous forme matricielle :

$$W(\Delta) = W(D) + \frac{1}{n} \overline{x} 1 I^t 1 I + \frac{1}{n} B$$

où $B$ est la matrice définie par :

$$B_{ij} = \begin{bmatrix} (n-2) x_i & \text{si } i = j \\ -(x_i + x_j) & \text{si } i \# j \end{bmatrix}$$

## 2.3. Remarque

Il est facile d'établir que $1 I$ est vecteur propre de la matrice B associé à la valeur propre $\left(-\sum x_i\right)$. Ceci permet de vérifier que $1 I$ est vecteur propre de $W(\Delta)$ associé à la valeur propre nulle (propriété valable pour toutes les formes de Torgerson).

# 3. PROPRIÉTÉS DE $W(\Delta)$

Afin de permettre une représentation euclidienne des items sur la base de $\Delta$, nous proposons de chercher des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ telles que la matrice $W(\Delta)$ soit semi-définie positive (sdp).

## 3.1. Remarques

En vertu de la remarque (section 2.3), $W(\Delta)$ est sdp si, et seulement si pour tout vecteur, $V_1$, orthogonal à $1 I$, nous avons :

$$^t V_1 W(\Delta) V_1 \geq 0.$$

En effet, considérant un vecteur $V$ de $R^n$, nous pouvons écrire $V = V_1 + \alpha 1 I$ où $\alpha$ est un réel et $V_1$ est un vecteur orthogonal à $1 I$.

Il s'ensuit par conséquent que :

$$\begin{aligned} {}^tV\,W(\Delta)\,V &= {}^tV_1\,W(\Delta)\,V_1 + \alpha^2\,{}^t1\,I\,W(\Delta)\,1\,I + 2\,\alpha\,{}^tV_1\,W(\Delta)\,1\,I \\ &= {}^tV_1\,W(\Delta)\,V_1 \end{aligned}$$

Par la suite, nous désignerons par $E$ l'espace vectoriel des vecteurs orthogonaux à $1\,I$.

### 3.2. Propriété

Soit $X$ la matrice diagonale dont le $i$-ième élément de la diagonale est égal à $x_i$ $(i = 1,\, 2,\, \ldots,\, n)$. Une condition nécessaire et suffisante pour que $W(\Delta)$ soit sdp est que $W(D) + X$ soit sdp sur $E$.

En effet, d'après la remarque 3.1 $W(\Delta)$ est sdp si, et seulement si ${}^tV\,W(\Delta)\,V \geq 0$ pour tout vecteur, $V$, orthogonal à $1\,I$. En désignant par $v_i$ $(i = 1,\, \ldots,\, n)$ la $i$-ième composante du vecteur $V$, nous nous proposons de développer ${}^tV\,W(\Delta)\,V$.

$$\begin{aligned} {}^tV\,W(\Delta)\,V &= {}^tV\,W(D)\,V + \frac{1}{n}\,\overline{x}\,{}^tV\,1\,I\,{}^t1\,I\,V + \frac{1}{n}\,{}^tV\,BV \\ &= {}^tV\,W(D)\,V + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} B_{ii}\,v_i^2 + \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} v_i\,B_{ij}\,v_j\right) \\ &= {}^tV\,W(D)\,V + \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(n-2)\,x_i\,v_i^2 - \sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} v_i\,(x_i + x_j)\,v_j\right] \\ &= {}^tV\,W(D)\,V + \frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n} n\,x_i\,v_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n} x_i\,v_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_i\,v_i\,v_j\right] \\ &= {}^tV\,W(D)\,V + \sum_{i=1}^{n} x_i\,v_i^2 - 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i\,v_i\,v_j \\ &= {}^tV\,W(D)\,V + \sum_{i=1}^{n} x_i\,v_i^2 \end{aligned}$$

car $\sum_{j=1}^{n} v_j = 0$ du fait de l'orthogonalité des vecteurs $1\,I$ et $V$.

À partir de cette propriété, nous nous proposons de chercher des éléments $(x_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ de sorte que $(W(D) + X)$ soit sdp sur $E$. Parmi les solutions admissibles, nous retenons une solution pour laquelle $\sum x_i$ est minimal (coût minimal).

## 4. SOLUTION DU PROBLÈME

Notons $(V_j)_j \in J$ $(J = \{1, 2, \ldots, n-1\})$ une base de $E$ formée de vecteurs propres de $W(D)$. Posons :

$$J_+ = \{j \in J \text{ tels que } {}^tV_j\, W(D)\, V_j \geq 0\};$$
$$J_- = \{j \in J \text{ tels que } {}^tV_j\, W(D)\, V_j < 0\}.$$

### 4.1. Proposition

Des conditions suffisantes pour que $W(D)+X$ soit sdp sont données par :

(i) $\forall j \in J_- \,:\, {}^tV_j\,(W(D) + X)\, V_j \geq 0$ et

(ii) $\forall (i, j) \in J \times J_-;\, i \neq j \,:\, {}^tV_j\, X\, V_i = 0.$

En effet, soit $V$ un vecteur quelconque de $E$. Nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$V = \sum_{j \in J} \alpha_j\, V_j, \text{ où } \alpha_j\ (j \in J) \text{ sont des réels.}$$

Il vient :

$$\begin{aligned}
&{}^tV\,(W(D) + X)\,V \\
&\quad = {}^t\Big(\sum_{j\in J_+} \alpha_j V_j + \sum_{j\in J_-} \alpha_j V_j\Big)(W(D) + X)\Big(\sum_{j\in J_+} \alpha_j V_j + \sum_{j\in J_-} \alpha_j V_j\Big) \\
&\quad = {}^t\Big(\sum_{j\in J_+} \alpha_j V_j\Big)(W(D) + X)\Big(\sum_{j\in J_+} \alpha_j V_j\Big) \\
&\qquad + {}^t\Big(\sum_{j\in J_-} \alpha_j V_j\Big)(W(D) + X)\Big(\sum_{j\in J_-} \alpha_j V_j\Big) \\
&\qquad + 2\,{}^t\Big(\sum_{j\in J_+} \alpha_j V_j\Big)(W(D) + X)\Big(\sum_{j\in J_-} \alpha_j V_j\Big).
\end{aligned}$$

Soit

$$\begin{aligned} A &= {}^t\Big(\sum_{j \in J_+} \alpha_j V_j\Big)(W(D) + X)\Big(\sum_{j \in J_+} \alpha_j V_j\Big) \\ &= \sum_{j \in J_+} \alpha_j^2\, {}^tV_j\, W(D)\, V_j + {}^t\Big(\sum_{j \in J_+} \alpha_j V_j\Big) X \Big(\sum_{j \in J_+} \alpha_j V_j\Big). \end{aligned}$$

La quantité $A$ est donc positive en tant que somme de deux termes positifs. Soit :

$$\begin{aligned} B &= {}^t\Big(\sum_{j \in J_-} \alpha_j V_j\Big)(W(D) + X)\Big(\sum_{j \in J_-} \alpha_j V_j\Big) \\ &= \sum_{j \in J_-} \alpha_j^2\, {}^tV_j\,(W(D) + X)\, V_j \qquad \text{(d'après la condition (ii))}. \end{aligned}$$

Il apparaît, donc, que cette quantité est positive en vertu de la condition (i).

Soit enfin :

$$C = {}^t\Big(\sum_{j \in J_-} \alpha_j V_j\Big)(W(D) + X)\Big(\sum_{j \in J_+} \alpha_j V_j\Big)$$

$C$ est nul car les vecteurs $V_j\,(j \in J_+)$ et $V_k\,(k \in J_-)$ sont des vecteurs propres (orthogonaux) de $W(D)$ et du fait de la condition (ii).

La solution que nous proposons consiste, donc, en la résolution du programme linéaire suivant :

$$\operatorname{Min} \sum_i x_i \quad \text{(coût minimum)}$$

sous les contraintes :

(i) $\forall j \in J_-\ :\ {}^tV_j\,(W(D) + X)\,V_j \geq 0$

(ii) $\forall (i, j) \in J \times J_-$ et $j \neq i\ :\ {}^tV_i\, X\, V_j = 0$

(iii) $\forall i \in J\ :\ x_i \geq 0$

Il s'agit d'un programme linéaire classique dont la solution est donnée par la méthode du simplexe.

### 4.2. Remarque

Les conditions (i) et (ii) sont vérifiées lorsque nous prenons $x_i = c$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ; avec $c \geq -\lambda_n$, $\lambda_n$ étant la plus petite valeur propre (négative) de $W(D)$. La solution de la constante additive garantit l'existence d'une solution et apparaît, donc, comme un cas particulier de la perturbation par une distance à centre.

### 4.3. Application

Nous avons vu pour l'exemple discuté au paragraphe 1 que les valeurs propres de $W(D)$ sont :

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2}, \qquad \lambda_3 = 0, \qquad \lambda_4 = -\frac{1}{16}$$

Des vecteurs propres associés à $\lambda_1$, $\lambda_2$ et $\lambda_4$ sont donnés respectivement par :

$$V_1 = \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad V_2 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix} \qquad V_4 = \begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -3 \end{vmatrix}$$

En explicitant les conditions de la proposition 5.1, nous sommes conduits au programme linéaire suivant :

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \quad \text{minimum}$$

sous les contraintes :

$$\begin{aligned} & x_i \geq 0\,(i = 1, 2, 3, 4) \\ & -\frac{12}{16} + x_1 + x_2 + x_3 + 9\,x_4 \geq 0 \\ & x_1 - x_2 = 0 \\ & x_1 + x_2 - 2\,x_3 = 0 \end{aligned}$$

Une solution de ce problème est donnée par

$$\begin{aligned} & x_1 = x_2 = x_3 = 0 \\ & x_4 = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

Le coût associé à cette solution a été calculé au paragraphe 1.

## 5. STABILITÉ DE LA PRÉORDONNANCE

Rappelons que deux indices de dissimilarité $D$ et $\Delta$ sur un même ensemble $I$ ont une même préordonnance si, et seulement si :

$$\forall (i, j, k, l) \in I^4 \, (D_{ij} - D_{kl}) \, (\Delta_{ij} - \Delta_{kl}) \geq 0 \quad \text{(iiii)}$$

La solution préconisée en 4.1 ne tient pas compte *a priori* de la préordonnance.

Nous pouvons, cependant, rajouter des contraintes supplémentaires visant à munir $\Delta$ de la même préordonnance que $D$. Ces contraintes s'écrivent :

$$(D_{kl}^2 - D_{ij}^2) \, (x_i + x_j - x_k - x_l) \leq (D_{ij}^2 - D_{kl}^2)^2 \, \forall (i, j, k, l) \in I^4$$

En effet :
du fait que : $(D_{ij}^2 - D_{kl}^2) = (D_{ij} - D_{kl}) \, (D_{ij} + D_{kl})$ et que $(D_{ij} + D_{kl})$ est positif, nous avons : $(\Delta_{ij} - \Delta_{kl}) \, (D_{ij} - D_{kl})$ est de même signe que $(\Delta_{ij}^2 - \Delta_{kl}^2) \, (D_{ij}^2 - D_{kl}^2)$.

$(\Delta_{ij}^2 - \Delta_{kl}^2) \, (D_{ij}^2 - D_{kl}^2)$ s'écrit :

$$\begin{aligned}(\Delta_{ij}^2 - \Delta_{kl}^2) \, (D_{ij}^2 - D_{kl}^2) &= (D_{ij}^2 - D_{kl}^2) \, (D_{ij}^2 - D_{kl}^2 + x_i + x_j - x_k - x_l) \\ &= (D_{ij}^2 - D_{kl}^2)^2 + (D_{ij}^2 - D_{kl}^2) \, (x_i + x_j - x_k - x_l)\end{aligned}$$

Soit par conséquent :
$\Delta$ et $D$ ont une même préordonnance si, et seulement si :

$$(D_{kl}^2 - D_{ij}^2) \, (x_i + x_j - x_k - x_l) \leq (D_{ij}^2 - D_{kl}^2)^2 \, \forall (i, j, k, l) \in I^4$$

À cause des propriétés de symétrie des dissimilarité et de la transitivité de la préordonnance, beaucoup de contraintes sont redondantes.

Il est aisé de vérifier que le nombre de contraintes du type (iiii) se ramène à $((n + 1) \, (n - 2)/2)$. Le programme s'écrit alors :

$$K (\Delta, D) = \sum x_i \quad \text{minimum;}$$

sous les contraintes :

(i) $\forall j \in J_- \quad {}^t V_j \, (W \, (D) + X) \, V_j \geq 0$

(ii) $\forall (i, j) \in J \times J_- \ {}^tV_i X V_j = 0$

(iii) $\forall i \in J \ x_i \geq 0$

(iiii) $(D_{kl}^2 - D_{ij}^2)(x_i + x_j - x_k - x_l) \leq (D_{ij}^2 - D_{kl}^2)^2 \, \forall (i, j, k, l) \in I^4$.

## RÉFÉRENCES

F. Beninel, *Problèmes de représentation sphériques des tableaux de dissimilarité*, Thèse de 3e cycle, Université de Rennes-I, 1987.

F. Cailliez, The Analytical Solution to the Additive Constant Problem, *Psychometrika*, 1983, *48*, p. 305-308.

J. De Leeuw, W. Heiser, Theory of Multidimensional scaling, Handbook of statistics 2, P. R. Krishnaïah and L. N. Kanal eds, 1982, p. 285-316.

J.-C. Gower, P. Legendre, Metric and Euclidean properties of dissimilarity coefficients, *J. of Classification*, 1986, *3*, p. 5-48.

G. Lecalvé, Distance à centre, *Statistique et Analyse des Données*, 1985, *10*, n° 2, p. 29-44.

J.-C. Lingoes, Some Boundary Conditions for a Monotone Analysis of Symetric Matrices, *Psychometrika*, 1971, *36*, p. 195-203.

I. J. Shoenberg, On Certain Metric Space Arizing from Euclidean Spaces by a Change of Metric and their imbedding in Hilbert Space, *Annals of Mathematics*, 1937, *38*, 4, p. 787-793. Thèse de 3e cycle, Université de Rennes-I, 1987.