RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

A. BENCHAKROUN
J.-P. DUSSAULT
A. MANSOURI

Pénalités mixtes : un algorithme superlinéaire en deux étapes

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 27, n° 4 (1993), p. 353-374

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1993__27_4_353_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 27, n° 4, 1993, p. 353 à 374)

PÉNALITÉS MIXTES : UN ALGORITHME SUPERLINÉAIRE EN DEUX ÉTAPES (*)

par A. BENCHAKROUN ([1]), ([2]),
J.-P. DUSSAULT ([1]), ([3]) et A. MANSOURI ([1])

Résumé. – *Dans cet article, nous présentons une stratégie d'extrapolation fournissant de bons points de départ pour les sous-problèmes (sans contrainte) associés à une méthode de pénalité mixte appliquée à un problème général de programmation non linéaire. Les résultats asymptotiques sont intéressants puisque l'on obtient une convergence superlinéaire en deux étapes. De plus, nous montrons que le mauvais conditionnement qui compromet l'efficacité des méthodes de pénalité peut être contourné en transformant judicieusement les équations de Karush-Kuhn-Tucker.*

Mots clés : Pénalités mixtes, extrapolation, mauvais conditionnement.

Abstract. – *In this paper, we present an extrapolation strategy to obtain good starting points for the unconstrained subproblems coming from a mixed penalty algorithm in general constrained nonlinear programming. This strategy allows to obtain the two-steps superlinear local convergence property. Also, we show that the usuall ill-conditioning that plague most penalty algorithms may be removed using clever transformations of the Karush-Kuhn-Tucker equations.*

Keywords: Mixed penalties, extrapolation, ill-conditioning.

INTRODUCTION

Considérons le problème général de programmation non linéaire,

$$\min f(x)$$

sujet à

$$\left.\begin{array}{ll} g_i(x) \leqq 0, & 1 \leqq i \leqq m \\ h_j(x) = 0, & 1 \leqq j \leqq p \\ x \in \mathbb{R}^n. & \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

(*) Reçu septembre 1991.

([1]) Département de Mathématiques et d'Informatique, Université de Sherbrooke, Faculté des Sciences, Québec J1K 2R1, Canada.

([2]) Cette recherche a été rendue possible grâce à une subvention du C.RS.N.G. (OGP0036512).
([3]) Cette recherche a été rendue possible grâce à une subvention du C.RS.N.G. (OGP0005491).

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/93/04/$ 4.00

Une des nombreuses approches pour résoudre ce problème consiste à utiliser une méthode de pénalité. Fiacco et McCormick [4], en s'inspirant des travaux de Courant [2] et Frisch [5], ont fait une étude détaillée des différentes méthodes basées sur ce principe. Pour la résolution du problème (1.1), ils ont proposé une méthode de pénalités mixtes qui consiste à résoudre une suite de problèmes sans contrainte de la forme :

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} W(x, r_k) = f(x) - r_k \sum_{i=1}^{m} \log(-g_i(x)) + \frac{1}{2 r_k} \sum_{j=1}^{p} h_j^2(x) \quad (1.2)$$

où $\{r_k\}$ est une suite décroissante de nombres réels positifs et telle que $\lim_{k \to \infty} r_k = 0$. Ils ont démontré, moyennant certaines hypothèses, l'existence d'une fonction $x(r)$ différentiable au voisinage de $r=0$ et telle que $\lim_{k \to \infty} x(r) = x^*$, où x^* est une solution optimale du problème (1.1). De plus, ils ont montré que $x(r_k)$ est un minimum local strict du problème (1.2).

En 1969, Murray [7] a soulevé le problème du mauvais conditionnement pour les méthodes de pénalité en général, ce qui a eu pour effet de mettre en veilleuse cette approche pour une quinzaine d'années. Récemment, Broyden et Attia [1] ont apporté une solution au problème du mauvais conditionnement dans le cas des pénalités extérieures quadratiques. Quant à McCormick [6], il a suggéré une méthode basée sur l'inversion des matrices pour résoudre ce même problème dans le cas des barrières logarithmiques.

Dans cet article, nous déterminons une solution au problème (1.1) *via* la résolution approximative des problèmes (1.2) en utilisant une stratégie d'extrapolation. Une analyse détaillée de la convergence asymptotique nous amène à montrer que notre méthode conduit à un algorithme possédant la propriété de convergence superlinéaire en deux étapes. Nous montrons également qu'une généralisation des résultats de Broyden et Attia permet d'éviter le mauvais conditionnement en se limitant à des manipulations assez simples.

Cet article est structuré comme suit :

Dans la section 2, nous étudions une stratégie d'extrapolation pour la résolution des problèmes (1.2), nous énonçons les résultats asymptotiques de la méthode et finalement nous décrivons un algorithme pour la résolution du problème (1.1). La section 3 sera consacrée au problème du mauvais conditionnement. Enfin, dans la section 4 nous démontrons les résultats relatifs à la convergence asymptotique.

Avant d'aborder chacun de ces points, nous rappelons un résultat bien connu et auquel nous nous référerons plus tard. Ce résultat, résumé dans le théorème qui suit, donne les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre pour que le problème (1.1) admette un optimum local strict.

THÉORÈME 1 [4], *théorème 4 : On suppose que f, g_i et h_j sont de classe* C^2, $1 \leqq i \leqq m$ *et* $1 \leqq j \leqq p$. *Pour que* x^* *soit un optimum local strict du problème (1.1), il suffit qu'il existe deux vecteurs* $\lambda^* \in \mathbb{R}^n$ *et* $\mu^* \in \mathbb{R}^p$ *tels que :*

$$L(x^*, \lambda^*, \mu^*) = \nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla h_j(x^*) = 0,$$

$$\lambda_i^* g_i(x^*) = 0; \qquad 1 \leqq i \leqq m,$$

$$g_i(x^*) \leqq 0; \qquad 1 \leqq i \leqq m,$$

$$h_j(x^*) = 0; \qquad 1 \leqq j \leqq p,$$

$$\lambda_i^* \geqq 0; \qquad 1 \leqq j \leqq m,$$

et que, pour tout y non nul de $\mathbb{R}^n$ *qui vérifie :*

$$y^T \nabla g_i(x^*) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \in D^*,$$

$$y^T \nabla g_i(x^*) \leqq 0 \qquad \text{pour} \quad i \in I^* - D^*,$$

$$y^T \nabla h_i(x^*) = 0 \qquad \text{pour} \quad i \leqq j \leqq p,$$

on ait :

$$y^T \nabla_x^2 L(x^*, \lambda^*, \mu^*) y > 0, \tag{1.3}$$

où :

$$D^* = \{i / \lambda_i^* > 0\} \qquad \text{et} \qquad I^* = \{i / g_i(x^*) = 0\}.$$

2. STRATÉGIE D'EXTRAPOLATION ET RÉSULTATS ASYMPTOTIQUES

Rappelons que notre objectif est de déterminer une solution du problème (1.1) *via* la résolution de la suite de problèmes pénalisés :

$$\min_{x \in R^n} W(x, r_k) = f(x) - r_k \sum_{i=1}^{m} \log(-g_i(x)) + \frac{1}{2 r_k} \sum_{j=1}^{p} h_j^2(x) \tag{2.1}$$

où : $r_k \searrow 0$.

Au lieu de résoudre ces problèmes de façon exacte, nous nous proposons d'en déterminer une solution approximative et d'analyser le comportement de la suite constituée par les solutions obtenues.

Pour le moment supposons que nous ayons déterminé un point x_k vérifiant la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre du problème (2.1) avec une précision ϵ_k donnée, c'est-à-dire tel que :

$$\left\| \nabla f(x_k) - r_k \sum_{i=1}^{m} \frac{\nabla g_i(x_k)}{g_i(x_k)} + \frac{1}{r_k} \sum_{j=1}^{p} h_j(x_k) \nabla h_j(x_k) \right\| \leqq \varepsilon_k. \quad (2.2)$$

Le théorème qui suit justifie la démarche :

THÉORÈME 2 : *On suppose que :*

(i) *f, g_i et h_j sont de classe C^2, $1 \leqq i \leqq m$ et $1 \leqq j \leqq p$;*

(ii) *les conditions suffisantes d'optimalité du second ordre sont satisfaites en x^*, λ^*, μ^* pour le problème (2.1);*

(iii) *les gradients des contraintes actives (y compris les contraintes d'égalité) en x^* sont linéairement indépendants;*

(iv) *la stricte complémentarité est vérifiée : $\lambda_i^* = 0 \Leftrightarrow g_i(x^*) < 0$, $1 \leqq i \leqq m$.*

Alors, le système

$$\nabla f(x) - r \sum_{i=1}^{m} \frac{\nabla g_i(x)}{g_i(x)} + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{p} h_j(x) \nabla h_j(x) = \xi \quad (2.3)$$

définit sur un voisinage V_0 de $(r, \xi) = (0, 0)$ des fonctions uniques $x(r, \xi)$,

$$\lambda_i(r, \xi) = \frac{-r}{g_i(x(r, \xi))} \quad et \quad \mu_j(r, \xi) = \frac{\mu_j(x(r, \xi))}{r},$$

de classe C^1 sur V_0 et telles que

$$x(r, \xi) \to x^*, \quad \lambda_i(r, \xi) \to \lambda_i^* \quad et \quad \mu_j(r, \xi) \to \mu_j^*,$$

lorsque $r \searrow 0$ et $\xi \to 0$.

De plus, $x(r) = x(r, 0)$ est un minimum local strict de $W(x, r)$.

Preuve : 1. Pour montrer l'existence des fonctions différentiables au voisinage de $r = 0$, $\xi = 0$, nous appliquons le théorème des fonctions implicites au système $\Theta(x, \lambda, \mu, r, \xi) = 0$, défini comme suit :

$$\Theta(x,\ \lambda,\ \mu,\ r,\ \xi) = \begin{cases} \nabla f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(x) & \\ \quad + \sum\limits_{i=1}^{P} \mu_j \nabla h_j(x) - \xi = 0 & (2.4) \\ \lambda_i\, g_i(x) + r = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq m & (2.5) \\ h_j(x) - r\,\mu_j = 0, \qquad 1 \leqq j \leqq p & (2.6) \end{cases}$$

Remarquons que les conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre, pour le problème (1.1), impliquent que $\Theta(x^*,\ \lambda^*,\ \mu^*,\ 0,\ 0)=0$. D'autre part Θ est de classe $\mathcal{C}^1$ puisque f, g_i et h_j sont de classe $\mathcal{C}^2$. Pour appliquer donc le théorème des fonctions implicites, il reste à vérifier que le jacobien de Θ par rapport à $(x,\ \lambda,\ \mu)$ et évalué en $(x^*,\ \lambda^*,\ \mu^*,\ 0,\ 0)$ est une matrice non singulière.

Or le jacobien de Θ, noté $J\Theta(x,\ \lambda,\ \mu,\ r,\ \xi)$ est donné par la formule :

$$J\Theta(x,\ \lambda,\ \mu,\ r,\ \xi) = \left(\begin{array}{c|cc|cc} \nabla^2 f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla^2_{g_i}(x) + \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j \nabla^2 h_j(x) & \nabla g_1(x) \;\cdots & \nabla g_m(x) & \nabla h_1(x) \;\cdots & \nabla h_p(x) \\ \hline \lambda_1 \nabla^T_{g_1}(x) & g_1(x) & 0 & 0 & \\ \vdots & & & & \\ \lambda_m \nabla^T_{g_m}(x) & 0 & g_m(x) & & \\ \hline \nabla^T h_1(x) & 0 & & -r & 0 \\ \vdots & & & & \\ \nabla^T h_p(x) & & & 0 & -r \end{array}\right)$$

Pour montrer que $J\Theta(x^*,\ \lambda^*,\ \mu^*,\ 0,\ 0)$ est inversible, il suffit de montrer que $J\Theta(x^*,\ \lambda^*,\ \mu^*,\ 0,\ 0)\ Z = 0 \Rightarrow Z = 0$.

Soit donc $Z = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$, $z_1 \in \mathbb{R}^n$, $z_2 \in \mathbb{R}^m$ et $z_3 \in \mathbb{R}^p$.

L'équation $J\Theta(x^*,\ \lambda^*,\ \mu^*,\ 0,\ 0)Z=0$ est alors équivalente à :

$$\left(\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla^2 g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla^2 h_j(x^*)\right) z_1 + \sum_{i=1}^{m} z_2^i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} z_3^i \nabla h_j(x^*) = 0, \tag{2.7}$$

$$\lambda_i^* \nabla^T g_i(x^*) z_1 + g_i(x^*) z_2^i = 0, \qquad 1 \leqq i \leqq m, \tag{2.8}$$

$$\nabla^T h_j(x^*) z_1 = 0, \qquad 1 \leqq j \leqq p. \tag{2.9}$$

A partir de (2.8), on tire : $\lambda_i^* \nabla^T g_i(x^*) z_1 = 0$ pour $1 \leqq i \leqq m$ et $z_2^i = 0$ pour $i \notin I^*$.

En effet, par la complémentarité, on a que pour tout $i \notin I^*$, $g_i(x^*) < 0$ et $\lambda_i^* = 0$, d'où :

$$\lambda_i^* \nabla^T g_i(x^*) z_1 = 0 \quad \text{et par conséquent } z_2^i = 0.$$

D'autre part, pour $i \in I^*$, on a $g_i(x^*) = 0$, d'où $g_i(x^*) z_2^i = 0$ et par conséquent $\lambda_i^* \nabla^T g_i(x^*) z_1 = 0$.

Pour montrer que $z_1 = 0$, on remarque que :

$$J\Theta(x^*, \lambda^*, \mu^*, 0, 0) \quad \Rightarrow \quad Z^T J\Theta(x^*, \lambda^*, \mu^*, 0, 0) Z = 0.$$

Or cette dernière relation se réduit à :

$$z_1^T \left[\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i \in I^*} \lambda_i^* \nabla^2 g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla^2 h_i(x^*) \right] z_1 = 0.$$

Par (2.9) on a $\nabla^T h_i(x^*) z_1 = 0$ pour $1 \leqq i \leqq p$ et par (2.7) et la stricte complémentarité, on a $\nabla^T g_i(x^*) z_1 = 0$, pour $i \in I^*$. On conclut donc par (1.3) que $z_1 = 0$.

Comme $z_1 = 0$ et $z_2^i = 0$ pour $i \notin I^*$, alors (2.7) se réduit à

$$\sum_{i \in I^*} z_2^i \nabla g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} z_3^i \nabla h_j(x^*) = 0, \tag{2.12}$$

ce qui entraîne que $z_2 = z_3 = 0$ puisque les gradients des contraintes actives sont linéairement indépendants. Ceci montre finalement que $J\Theta(x^*, \lambda^*, \mu^*, 0, 0)$ est inversible. D'après le théorème des fonctions implicites, il existe un voisinage V_0 de $(r, \xi) = (0, 0)$ et des fonctions uniques $x(r, \xi)$, $\lambda(r, \xi)$ et $\mu(r, \xi)$ différentiables sur V_0 et telles que $x(r, \xi) \to x^*$, $\lambda(r, \xi) \to \lambda^*$ et $\mu(r, \xi) \to \mu^*$ lorsque $(r, \xi) \to (0, 0)$.

2. Montrons maintenant que $x(r) = x(r, 0)$ est un minimum local strict de $w(x, r)$.

On a $x(r)$, $\lambda(r)$ et $\mu(r)$ qui vérifient le système (1.4), (1.5) et (1.6).

De (2.5) et (2.6), on tire les relations :

$$\lambda_i(r) = \frac{-r}{g_i(x(r))} \qquad \text{et} \qquad \mu_j(r) = \frac{h_j(x(r))}{r}.$$

En remplaçant dans (2.4), on obtient la condition nécessaire d'optimalité du premier ordre pour le problème $\min\limits_{x \in R^n} W(x, r)$.

D'autre part, il est facile de vérifier que le hessien $\nabla^2 W(x(r), r)$ est une matrice définie positive pour r assez petit, ce qui achève la preuve. ■

COROLLAIRE 1 : *On suppose que les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites. Alors dans un voisinage de* $(r, \xi) = (0, 0)$ *et pour* $\|\xi\| < \varepsilon$, *on a :*

(i) $\|x(r, \xi) - x^*\| \sim O(\max(r, \varepsilon))$;

(ii) $\|\lambda(r, \xi) - \lambda^*\| \sim O(\max(r, \varepsilon))$;

(iii) $\|\mu(r, \xi) - \mu^*\| \sim O(\max(r, \varepsilon))$;

(iv) $|g_i(x(r, \xi))| \sim O(r)$, *pour* $i \in I^*$;

(v) $|h_j(x(r, \xi))| \sim O(r)$, *pour* $1 \leqq j \leqq p$.

Le théorème précédent va nous permettre d'établir un lien entre les solutions de deux sous-problèmes successifs. Soit donc $x_k = x(r_k, \xi_k)$ une solution ϵ_k-optimale du k-ième sous-problème. En utilisant l'existence de la trajectoire différentiable, nous déterminons, par extrapolation de x_k, un point $\hat{x}_{k+1}$ comme point de départ dans la recherche d'une solution approchée x_{k+1} du $(k+1)$-ième sous-problème. Comme nous le montrerons plus loin, la raison à cela est qu'une seule itération de Newton à partir de $\hat{x}_{k+1}$ nous permet d'obtenir un point x_{k+1} satisfaisant la relation $\|\xi_{k+1}\| < \varepsilon_{k+1}$.

Soit alors $\hat{x}_{k+1}$ le point défini comme suit :

$$\hat{x}_{k+1} = x(r_k, \xi_k) + \frac{\partial x}{\partial r}(r_k, \xi_k)(r_{k+1} - r_k) + \frac{\partial x}{\partial \xi}(r_k, \xi_k)(0 - \xi_k).$$

D'après le théorème 2,

$$x(r, \xi),\ \lambda_i(r, \xi) = \frac{-r}{g_i(x(r, \xi))} \qquad \text{et} \qquad \mu_i(r, \xi) = \frac{h_j(x(r, \xi))}{r}.$$

sont de classe C^1 au voisinage de $(r, \xi) = (0, 0)$.

En considérant les dérivées partielles dans la relation (2.3), on obtient :

$$\nabla^2 W_k \frac{\partial x}{\partial r}(r_k, \xi_k) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\nabla g_i(x_k)}{g_i(x_k)} + \frac{1}{r_k^2} \sum_{j=1}^{p} h_j(x_k) \nabla h_j(x_k),$$

$$\nabla^2 W_k \frac{\partial x}{\partial r}(r_k, \xi_k) = \text{Id} \quad (\text{matrice identité}),$$

où :

$$\nabla^2 W_k = \nabla^2 W(x_k,\ r_k) = \nabla^2 f(x_k) - \sum_{i=1}^{m} \frac{r_k}{g_i(x_k)} \nabla^2 g_i(x_k)$$
$$+ \sum_{i=1}^{m} \frac{r_k}{g_i^2(x_k)} \nabla g_i(x_k) \nabla^T g_i(x_k)$$
$$+ \sum_{j=1}^{p} \frac{h_j(x_k)}{r_k} \nabla^2 h_j(x_k) + \frac{1}{r_k} \sum_{j=1}^{p} \nabla h_j(x_k) \nabla^T h_j(x_k).$$

Ainsi, la direction d_k de l'extrapolation n'est autre que la solution du système $\nabla^2 W_k\, d = e_k$ où :

$$e_k = \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\nabla g_i(x_k)}{g_i(x_k)} + \frac{1}{r_k^2} \sum_{j=1}^{p} h_j(x_k) \nabla h_j(x_k) \right] (r_{k+1} - r_k) - \xi_k. \quad (2.13)$$

PROPOSITION 1 : *On suppose que les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites et que de plus f, g_i, et h_j, $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq p$, sont de classe C^3.*

Si $\varepsilon_k \sim O(r_k)$, alors :

$$\|x(r_{k+1},\ 0) - \hat{x}_{k+1}\| \sim O(r_k^2).$$

Preuve : Par le théorème des fonctions implicites, $x(r,\ \xi)$ est de classe C^2.

En utilisant la formule de Taylor à l'ordre 2 au voisinage de $(r,\ \xi) = (r_k,\ \xi_k)$, on a :

$$x(r_{k+1},\ 0) = x(r_k,\ \xi_k) + \frac{\partial x}{\partial r}(r_k,\ \xi_k)\ (r_{k+1} - r_k)$$
$$+ \frac{\partial x}{\partial r}(r_k,\ \xi_k)\ (0 - \xi_k)$$
$$+ O\left[(r_{k+1} - r_k)^2 + \|\xi_k\|^2\right],$$

ce qui donne, par définition de $\hat{x}_{k+1}$:

$$\|x(r_{k+1},\ 0) - \hat{x}_{k+1}\| \sim O\left[(r_{k+1} - r_k)^2 + \|\xi_k\|^2\right].$$

Puisque $\{ r_k \}$ est décroissante et $\|\xi_k\| < \varepsilon_k$, alors si $\varepsilon_k \sim O(r_k)$ on a :

$$\|x(r_{k+1},\ 0) - \hat{x}_{k+1}\| \sim O(r_k^2),$$

ce qui achève la preuve. ■

PROPOSITION 2 : *On suppose que les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites. Soit* $\hat{x}_{k+1}$ *le point obtenu par extrapolation à partir du point* x_k. *Si* $\varepsilon_k \sim O(r_k)$ *et* r_{k+1} *est de l'ordre de* r_k^α *avec* $1<\alpha<2$, *alors* :

(*a*) *Pour tout* $1 \leqq i \leqq m$, *on a* $1/|g_i(\hat{x}_{k+1})| \sim O(1/r_{k+1})$.

(*b*) *Pour tout* $1 \leqq j \leqq p$, *on a* $|h_j(\hat{x}_{k+1})| \sim O(r_{k+1})$.

Preuve : (*a*) Pour $i \notin I^*$, le résultat est évident par la continuité de g_i.

Pour $i \in I^*$, on a :

$$\lim_{k \to +\infty} -\frac{r_{k+1}}{g_i(x(r_{k+1}, 0))} = \lim_{k \to +\infty} \lambda_i(r_{k+1}, 0) = \lambda_i^* > 0,$$

par la stricte complémentarité.

On peut donc trouver un $\bar{k}>0$ tel que pour tout $k>\bar{k}$, on ait :

$$0 < \frac{\lambda_i^*}{2} < \frac{-r_{k+1}}{g_i(x(r_{k+1}, 0))} < 2\lambda_i^*$$

ou encore, puisque $\lambda_i^* > 0$:

$$0 < \frac{1}{2\lambda_i^*} < \frac{-g_i(x(r_{k+1}, 0))}{r_{k+1}} < \frac{2}{\lambda_i^*} \tag{2.14}$$

D'autre part, en utilisant le résultat de la proposition 1, on a :

$$\begin{aligned} g_i(\hat{x}_{k+1}) &= g_i(x(r_{k+1}, 0)) + O(\|\hat{x}_{k+1} - x(r_{k+1}, 0)\|) \\ &= g_i(x(r_{k+1}, 0)) + O(r_k^2). \end{aligned}$$

en remplaçant dans la relation (2.14), on obtient :

$$0 < \frac{1}{2\lambda_i^*} < \frac{-g_i(\hat{x}_{k+1})}{r_{k+1}} + \frac{1}{r_{k+1}} O(r_k^2) < \frac{2}{\lambda_i^*}.$$

Si r_{k+1} est de l'ordre de r_k^α avec $\alpha<2$, alors $(1/r_{k+1}) O(r_k^2) \to 0$ quand $k \to +\infty$ et ainsi, il existe $\bar{k}' > 0$ tel que pour tout $k > \max\{\bar{k}, \bar{k}'\}$ on a :

$$0 < \frac{1}{4\lambda_i^*} < \frac{-g_i(\hat{x}_{k+1})}{r_{k+1}} < \frac{4}{\lambda_i^*}$$

ou encore :

$$0 < \frac{\lambda_i^*}{4} < \frac{-r_{k+1}}{g_i(\hat{x}_{k+1})} < 4\lambda_i^*.$$

Ceci montre finalement que pour k suffisamment grand, on a :

$$0 < m < \left| \frac{r_{k+1}}{g_i(\hat{x}_{k-1})} \right| < M.$$

(*b*) En utilisant le résultat de la proposition 1, on a :

$$\begin{aligned} h_j(\hat{x}_{k+1}) &= h_j(x(r_{k+1}, 0)) + O(\|\hat{x}_{k+1} - x(r_{k+1}, 0)\|) \\ &= h_j(x(r_{k+1}, 0)) + O(r_k^2) \end{aligned}$$

le résultat découle alors du fait que $h_j(x(r_{k+1}, 0)) \sim O(r_{k+1})$ et r_{k+1} est de l'ordre de r_k^α avec $\alpha<2$. ■

Nous allons maintenant énoncer le théorème principal de cet article. Sa preuve ne sera donnée qu'à la section 4 car elle fait intervenir naturellement des concepts qui seront introduits à la section 3.

THÉORÈME 3 : *On suppose que les hypothèses du théorème 2 sont satisfaites et que de plus f, g_i et h_j, $1 \leqq i \leqq m$, $1 \leqq j \leqq p$ sont de classe C^3. Soit $\hat{x}_{k+1}$ le point obtenu par extrapolation à partir du point x_k. Si $\varepsilon_k \sim O(r_k)$ et r_{k+1} est de l'ordre de r_k^α avec $1<\alpha<2$, alors :*

(i) *La direction de Newton d_N à partir du point $\hat{x}_{k+1}$, définie par $\nabla^2 W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})\, d_N = -\nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})$, satisfait $d_N \sim O(r_k^2)$;*

(ii) $\|\nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})\| \sim O(r_k^2/r_{k+1})$;

(iii) $\|\nabla W(x_{k+1}^N, r_{k+1})\| \sim O(r_k^4/r_{k+1}^2)$, *où* $x_{k+1}^N = \hat{x}_{k+1} + d_N$.

Le corollaire qui suit est également important puisqu'il précise le taux de convergence de la méthode.

COROLLAIRE 2 : *Si $\epsilon_k = \beta r_k$ et $r_{k+1} > \gamma r_k^{4/3}$ pour des réels strictement positifs β et γ, alors pour k suffisamment grand, une seule itération de Newton à partir du point $\hat{x}_{k+1}$ donne un point $x(r_{k+1}, \xi_{k+1})$ satisfaisant la relation $\|\xi_{k+1}\| < \varepsilon_{k+1}$.*

Remarque : Dans la pratique, on prendra $r_{k+1} = r_k^\alpha$ avec $\alpha < 4/3$. En effet, dans ce cas, on a : $r_{k+1}/r_k^{4/3} = r_k^\alpha/r_k^{4/3} = 1/r_k^{4/3-\alpha} \to +\infty$ quand $k \to +\infty$, puisque $\alpha < 4/3$ et $r_k \to 0^+$. Ainsi, il existe un $k_0>0$ tel que pour tout $k \geqq k_0$ on a $r_{k+1}/r_k^{4/3} > \gamma$.

Nous sommes maintenant en mesure de préciser le cadre général d'un algorithme global pour le problème (1.1).

Algorithme

(*a*) *On suppose donnés un point de départ x_0 et deux suites $\{r_j\}$ et $\{\epsilon_j\}$ telles que $r_{j+1} > r_j^{4/3}$ et $\epsilon_j = r_j$. Poser $k=0$;*

x_d désigne le point de départ pour l'itération de Newton.

(*b*) ***A l'itération k**, on est au point x_k.*

***Tant que** le test d'arrêt n'est pas vérifié,*

1. ***Extrapolation :***

Déterminer *la direction de l'extrapolation d_k solution du système $\nabla^2 W(x_k, r_k)\, d = e_k$ et poser $\hat{x}_{k+1} = x_k + d_k$ [où e_k est donné par la relation (2.13)].*

Si $\|\nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})\| < \|\nabla W(x_k, r_{k+1})\|$, *alors poser* $x_d = \hat{x}_{k+1}$.

Sinon *poser* $x_d = x_k$.

2. ***Itération de Newton :***

Tant que $\|\nabla W(x_d, r_k)\| > \varepsilon_k$,

déterminer la direction de Newton d_N solution du système

$$\nabla^2 W(x_d, r_k)\, d = -\nabla W(x_d, r_k),$$

faire une recherche linéaire de type Armijo et poser $x_d = x_d + \alpha\, d_N$ où α est un pas admissible.

Poser $x_k = x_d$

Faire $k = k+1$ *et retourner en (b).*

Cet algorithme ainsi que les développements exposés plus haut appellent certaines remarques notamment en ce qui concerne la qualité du point $\hat{x}_{k+1}$ et l'admissibilité du pas unitaire. Mais avant de développer en détail ces deux points, mentionnons que nous écartons par hypothèse le cas dégénéré où tous les multiplicateurs optimaux du problème (1.1) sont nuls.

2.1. Acceptabilité asymptotique du point $\hat{x}_{k+1}$

Dans l'étape d'extrapolation et afin d'éviter les situations où le point extrapolé est moins bon que le point courant, l'extrapolé ne sera utilisé que s'il permet d'améliorer la norme du gradient, c'est-à-dire, si on a $\|\nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})\| < \|\nabla W(x_k, r_{k+1})\|$. Cependant, cette relation est toujours vérifiée asymptotiquement si l'on suppose qu'au moins un multiplicateur optimal λ_i^* ou μ_j^* est non nul.

En effet, d'une part, on a par le théorème 3,

$$\|\nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})\| \sim O\left(\frac{r_k^2}{r_{k+1}}\right),$$

et d'autre part,

$$\|\nabla W(x_k, r_{k+1})\| = \left\| \nabla W(x_k, r_k) - \frac{r_{k+1} - r_k}{r_k} \sum_{i=1}^{m} \frac{r_k}{g_i(x_k)} \nabla g_i(x_k) \right.$$
$$\left. + \frac{r_k - r_{k+1}}{r_{k+1}} \sum_{j=1}^{p} \frac{h_j(x_k)}{r_k} \nabla h_j(x_k) \right\|$$

ne tend pas vers 0, puisque

$$\nabla W(x_k, r_k) \to 0,$$
$$-\frac{r_{k+1} - r_k}{r_k} \sum_{i=1}^{m} \frac{r_k}{g_i(x_k)} \nabla g_i(x_k) \to \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla g_i(x^*) = \alpha$$
$$(\|\alpha\| < +\infty).$$

et le dernier terme $\sum_{j=1}^{p} ((r_k - r_{k+1})/r_{k+1})(h_j(x_k)/r_k) \nabla h_j(x_k)$ ne peut pas tendre vers $-\alpha$ car sinon on aurait, par la stricte complémentarité et l'indépendance des gradients des contraintes actives, $\lambda_i^* = \mu_j^* = 0$ pour tout $1 \leqq i \leqq m$ et $1 \leqq j \leqq p$.

2.2. Admissibilité du pas unitaire

Dans l'itération de Newton, on peut montrer qu'asymptotiquement, le pas unitaire est admissible.

En effet, soit $0 < \beta < 1/2$ et montrons que pour k suffisamment grand, on a :

$$W(\hat{x} + d_N) - W(\hat{x}) \leqq \beta\, d_N^T \nabla W(\hat{x}) \tag{2.15}$$

où $\hat{x}_{k+1}$ est noté $\hat{x}$.

Par la formule de Taylor, on a

$$W(\hat{x} + d_N) - W(\hat{x}) = d_N^T \nabla W(\hat{x}) + \frac{1}{2} d_N^T \nabla^2 W(\tilde{x})\, d_N,$$

où $\tilde{x} = \hat{x} + \alpha\, d_N$ avec $0 \leqq \alpha \leqq 1$.

De plus, en utilisant le fait que d_N est une direction de Newton, la condition d'admissibilité (2.15) est équivalente à :

$$\left(\beta - \frac{1}{2}\right) d_N^T \nabla^2 W(\hat{x})\, d_N + \frac{1}{2} d_N^T [\nabla^2 W(\tilde{x}) - \nabla^2 W(\hat{x})]\, d_N \leqq 0. \tag{2.16}$$

Pour que cette condition soit vérifiée, il suffit de montrer qu'asymptotiquement, $d_N^T \nabla^2 W(\hat{x})\, d_N$ domine

$$d_N^T [\nabla^2 W(\tilde{x}) - \nabla^2 W(\hat{x})]\, d_N.$$

Or on a :

$$\begin{aligned}\nabla^2 W(\hat{x}) = &\nabla^2 W(\hat{x}, r_{k+1}) = \nabla^2 f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{-r_{k+1}}{g_i(\hat{x})}\right) \nabla^2 g_i(\hat{x}) \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \left(\frac{h_j(\hat{x})}{r_{k+1}}\right) \nabla^2 h_j(\hat{x}) \\ &+ \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{-r_{k+1}}{g_i(\hat{x})}\right)^2 \nabla g_i(\hat{x}) \nabla^T g_i(\hat{x}) \\ &+ \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{j=1}^{p} \nabla h_j(\hat{x}) \nabla^T h_j(\hat{x}),\end{aligned}$$

en adoptant la notation $\delta(v) = v(\tilde{x}) - v(\hat{x})$ et en posant

$$\hat{\lambda}_i^{k+1} = \frac{-r_{k+1}}{g_i(\hat{x})}, \qquad \tilde{\lambda}_i^{k+1} = \frac{-r_{k+1}}{g_i(\tilde{x})} \qquad \text{et} \qquad \hat{\mu}_j^{k+1} = \frac{h_j(\hat{x})}{r_{k+1}}$$

on a :

$$\begin{aligned}\delta(\nabla^2 W) = &\delta(\nabla^2 f) + \sum_{i=1}^{m} \left[\tilde{\lambda}_i^{k+1} \delta(\nabla^2 g_i) + \hat{\lambda}_i^{k+1} \tilde{\lambda}_i^{k+1} \frac{\delta(g_i)}{r_{k+1}} \nabla^2 g_i(\hat{x})\right] \\ &+ \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{i=1}^{m} (\tilde{\lambda}_i^{k+1})^2 \delta(\nabla g_i \nabla^T g_i) \\ &+ \frac{1}{r_{k+1}^2} \sum_{i=1}^{m} (\hat{\lambda}_i^{k+1})^2 (\tilde{\lambda}_i^{k+1})^2 \left(\frac{\delta(g_i^2)}{-r_{k+1}}\right) \nabla g_i(\hat{x}) \nabla^T g_i(\hat{x}) \\ &+ \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j^{k+1} \delta(\nabla^2 h_j) \\ &+ \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{j=1}^{p} \delta(h_j) \nabla^2 h_j(\hat{x}) + \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{j=1}^{p} \delta(\nabla h_j \nabla^T h_j).\end{aligned}$$

En posant,

$$A_1 = \nabla^2 f(\hat{x}) + \sum_{i=1}^{m} \hat{\lambda}_i^{k+1} \nabla^2 g_i(\hat{x}) + \sum_{j=1}^{p} \hat{\mu}_j^{k+1} \nabla^2 h_j(\hat{x}),$$

$$B_1 = \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{i=1}^{m} (\hat{\lambda}_i^{k+1})^2 \nabla g_i(\hat{x}) \nabla^T g_i(\hat{x}) + \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{j=1}^{p} \nabla h_j(\hat{x}) \nabla^T h_j(\hat{x}),$$

$$A_2 = \delta(\nabla^2 f) + \sum_{i=1}^{m} \tilde{\lambda}_i^{k+1} \delta(\nabla^2 g_i) + \sum_{j=1}^{p} \tilde{\mu}_j^{k+1} \delta(\nabla^2 h_j),$$

$$B_2 = \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{i=1}^{m} [(\hat{\lambda}_i^{k+1})^2 \delta(\nabla g_i \nabla^T g_i) + \hat{\lambda}_i^{k+1} \tilde{\lambda}_i^{k+1} \delta(g_i) \nabla^2 g_i(\hat{x})]$$

$$+ \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{j=1}^{p} [\delta(h_j) \nabla^2 h_j(\hat{x}) + \delta(\nabla h_j \nabla^T h_j)],$$

$$B_3 = \frac{1}{r_{k+1}^2} \sum_{i=1}^{m} (\hat{\lambda}_i^{k+1})^2 (\tilde{\lambda}_i^{k+1})^2 \frac{\delta(g_i^2)}{-r_{k+1}} \nabla g_i(\hat{x}) \nabla^T g_i(\hat{x}),$$

les quantités $d_N^T \nabla^2 W(\hat{x}) d_N$ et $d_N^T [\nabla^2 W(\tilde{x}) - \nabla^2 W(\hat{x})] d_N$ s'écrivent :

$$d_N^T \nabla^2 W(\hat{x}) d_N = d_N^T A_1 d_N + d_N^T B_1 d_N$$

et

$$d_N^T [\nabla^2 W(\tilde{x}) - \nabla^2 W(\hat{x})] d_N = d_N^T A_2 d_N + d_N^T B_2 d_N + d_N^T B_3 d_N.$$

Montrons maintenant que $d_N^T A_1 d_N$ domine $d_N^T A_2 d_N$ et que $d_N^T B_1 d_N$ domine $d_N^T B_2 d_N + d_N^T B_3 d_N$.

Pour ce faire, remarquons d'abord qu'on a les propriétés suivantes : $\|\hat{x} - \tilde{x}\| \sim O(r_k^2)$; $\nabla^2 f$, $\nabla^2 g$ et $\nabla^2 h$ sont lipshitziennes et les quantités $\|\delta(\cdot)\|$ sont $O(r_k^2)$.

On a alors :

(i) $d_N^T A_1 d_N$ est borné inférieurement par $\gamma_1 \|d_N\|^2$ [car A_1 converge vers le hessien du lagrangien du problème (1.1) à l'optimum] alors que $d_N^T A_2 d_N$ est borné supérieurement par $\gamma_2 r_k^2 \|d_N\|^2$ (γ_1 et γ_2 étant deux constantes positives). Ainsi $d_N^T A_1 d_N$ domine $d_N^T A_2 d_N$.

(ii) $d_N^T B_1 d_N$ est borné inférieurement par $\gamma_3 (\|d_N\|^2 / r_{k+1})$ alors que $d_N^T B_2 d_N$ est borné supérieurement par $\gamma_4 r_k^2 (\|d_N\|^2 / r_{k+1})$ (γ_3 et γ_4 étant deux constantes positives). Pour borner $d_N^T B_3 d_N$, il suffit de remarquer que $\delta(g_i^2) = (g_i(\tilde{x}) + g_i(\hat{x}))\delta(g_i) \sim O(r_{k+1} r_k^2)$ pour $i \in I^*$. On montre alors facilement que $d_N^T B_3 d_N$ est $O((r_k^2/r_{k+1})(\|d_N\|^2/r_{k+1}))$. Ainsi, $d_N^T B_2 d_N + d_N^T B_3 d_N$ est $O((r_k^2/r_{k+1})(\|d_N\|^2/r_{k+1}))$ et puisque $r_{k+1} > r_k^2$, alors $d_N^T B_1 d_N$ domine $d_N^T B_2 d_N + d_N^T B_3 d_N$. Ce qui achève la preuve de l'admissibilité du pas unitaire.

Notons que dans le cas où $\nabla g_i^T(\hat{x}) d_N$ et $\nabla h_j^T(\hat{x}) d_N$ convergeraient vers zéro plus vite que $\|d_N\|$, on vérifie facilement que $d_N^T A_1 d_N$ domine encore $d_N^T A_2 d_N + d_N^T B_2 d_N$ et que $d_N^T B_1 d_N$ domine $d_N^T B_3 d_N$.

THÉORÈME 4 : *Avec les hypothèses du théorème 3 et du corollaire 2, et en supposant qu'au moins un multiplicateur optimal est non nul, on a :*

(i) *La suite de points $\{x_k\}$ générée par l'algorithme ci-dessus converge superlinéairement vers l'optimum x^* du problème (1.1).*

(ii) *De plus, pour k suffisamment grand, le point x_{k+1} est obtenu après seulement une extrapolation et une itération de Newton.*

Preuve : (i) D'après le corollaire 1, on a pour k suffisamment grand, $\|x_k - x^*\| \leqq M \cdot r_k$ (M constante positive).

D'autre part, d'après la relation (2.14) on a, pour tout $i \in I^*$ et pour k suffisamment grand, $r_k/(2\lambda_i) < |g_i(x_k)|$, g_i étant lipshitzienne, cela implique

$$M' \cdot r_k < \|x_k - x^*\|, \qquad (M' > 0) \tag{$\star$}$$

On a donc $\|x_k - x^*\|$ qui est du même ordre que r_k. Le résultat découle alors du fait que $\lim_{k\to\infty} r_{k+1}/r_k = 0$. [Notons que si $I^* = \emptyset$, il suffit de considérer les fonctions h_j pour obtenir une relation similaire à ($\star$).]

Le résultat (ii) est une conséquence directe de l'acceptabilité asymptotique du point $\hat{x}$, de l'admissibilité du pas unitaire et du résultat du corollaire 2. ■

3. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DU MAUVAIS CONDITIONNEMENT

Dans cette section, nous généralisons les techniques proposées par Broyden et Attia (1988) et Dussault (1990). Nous montrons que le mauvais conditionnement du hessien $\nabla^2 W(x, r)$ dû à la présence du terme

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{r}{g_i^2(x)} \nabla g_i(x) \nabla^T g_i(x) + \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{p} \nabla h_j(x) \nabla^T h_j(x),$$

peut-être évité en utilisant judicieusement de simples manipulations.

Pour ce faire, supposons sans perte de généralité que I^*, l'ensemble des indices des contraintes d'inégalité actives en x^*, est composé des m^* premières contraintes : $I^* = \{1, 2, \cdots, m^*\}$ où $m^* \leqq m$.

En posant :

$$E_U(x) = (\nabla h_1(x), \cdots, \nabla h_p(x), \nabla g_1(x), \cdots, \nabla g_{m^*}(x)),$$

$$E_R(x) = (\nabla g_{m^*+1}(x), \cdots, \nabla g_m(x)),$$

$$E(x) = (E_U(x), E_R(x)),$$

$$G(x, r) = \nabla^2 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \frac{-r}{g_i(x)} \nabla^2 g_i(x) + \sum_{j=1}^{p} \frac{h_j(x)}{r} \nabla^2 h_j(x),$$

$$V(x, r) = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{r}, \cdots, \frac{1}{r}, \frac{r}{g_i^2(x)}, \cdots, \frac{r}{g_m^2(x)}\right)$$

$$\left(\text{avec } p \text{ éléments en } \frac{1}{r}\right),$$

$\nabla^2 W(x, r)$ s'écrit :

$$\nabla^2 W(x, r) = G(x, r) + E(x) V(x, r) E^T(x).$$

D'autre part, pour x proche de x^*, la matrice $E_U(x)$ est de plein rang puisque ses colonnes sont les gradients des contraintes actives en x^* et qu'ils sont supposés linéairement indépendants. Ainsi, par le procédé d'orthogonalisation de Gram Schmidt, il existe une matrice orthogonale Q_x telle que :

$$Q_x^T E_U(x) = \begin{pmatrix} U \\ 0 \end{pmatrix},$$

où U est une matrice triangulaire supérieure non singulière.

Par suite, nous avons :

$$Q_x^T E(x) = \begin{pmatrix} U & R \\ 0 & S \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Le système $\nabla^2 W(x, r) d = e$ est alors équivalent à :

$$Q_x^T [G(x, r) + E(x) V(x, r) E^T(x)] = Q_x Q_x^T d = Q_x^T e,$$

ou encore :

$$[Q_x^T G(x, r) Q_x + Q_x^T E(x) V(x, r) (Q_x^T E(x))^T] \, Q_x^T d = Q_x^T e. \quad (3.2)$$

En posant :

$$V(x, r) = \begin{pmatrix} V_U & 0 \\ 0 & V_R \end{pmatrix}$$

avec

$$V_U = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{r}, \ldots, \frac{1}{r}, \frac{r}{g_i^2(x)}, \ldots, \frac{r}{g_{m^*}^2(x)}\right)$$

et

$$V_R = \operatorname{diag}\left(\frac{r}{g_{m^*+1}^2(x)}, \ldots, \frac{r}{g_m^2(x)}\right)$$

et en notant

$$Q_x^T G(x, r) Q_x \begin{pmatrix} \bar{G}_{11} & \bar{G}_{12} \\ \bar{G}_{12}^T & \bar{G}_{22} \end{pmatrix}; \qquad Q_x^T d \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad Q_x^T e = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix},$$

le système (3.2) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \bar{G}_{11} + U V_U U^T + R V_R R^T & \bar{G}_{12} + R V_R S^T \\ \bar{G}_{12}^T + S V_R R^T & \bar{G}_{22} + S V_R S^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Le mauvais conditionnement dans (3.3) est dû à la matrice V_U qui est non bornée lorsque $r \to 0$.

Pour remédier à cette situation, il suffit de multiplier le premier bloc ligne par r.

On obtient un nouveau système équivalent à (3.3) :

$$\begin{pmatrix} r\, U V_U U^T + r\, \bar{G}_{11} + r\, R V_R R^T & r\, \bar{G}_{12} + r\, R V_R S^T \\ \bar{G}_{12}^T + S V_R R^T & \bar{G}_{22} + S V_R S^T \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{d}_1 \\ \bar{d}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\, \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

La matrice associée au système (3.4) est bien conditionnée lorsque r tend zéro. En fait cette matrice va tendre vers la matrice régulière :

$$\begin{pmatrix} U^* V_U^* U^{*T} & 0 \\ \bar{G}_{12}^{*T} & \bar{G}_{22}^* \end{pmatrix}, \tag{3.5}$$

où $V_U^* = \operatorname{diag}(1, 1, \cdots, 1, \lambda_1^{*2}, \cdots, \lambda_{m^*}^{*2})$ avec $\lambda_i^* > 0$, $1 \leqq i \leqq m^*$, par la condition de la stricte complémentarité.

U^* est donnée par $Q_{x^*}^T E_U(x^*) = \begin{pmatrix} U^* \\ 0 \end{pmatrix}$ et

$$\bar{G}^* = Q_{x^*}^T \left[\nabla^2 f(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* \nabla^2 g_i(x^*) + \sum_{j=1}^{p} \mu_j^* \nabla^2 h_j(x^*) \right] Q_{x^*}.$$

Ainsi, une méthode pour déterminer la direction de l'extrapolation et la direction de Newton, et qui est numériquement stable, consiste à appliquer la procédure suivante :

1. Recherche des contraintes actives.
2. Décomposition de $E(x)$ et calcul de $\bar{G}$.
3. Détermination de $\bar{d}$ en résolvant le système bien conditionné correspondant.
4. Calcul de $d = Q_{x_k} \bar{d}$.

4. PREUVE DU THÉORÈME 3

Pour démontrer ce théorème, nous allons montrer d'abord certains résultats intermédiaires qui supposent les mêmes hypothèses que le théorème 3.

LEMME 1 : *La direction de Newton d_N est telle que : $d_N \sim O(r_k^2)$.*

Preuve : Dans la section précédente, on a vu que d_N peut s'écrire sous la forme : $d_N = Q_{\hat{x}_{k+1}}^T \bar{d}$, où $\bar{d}$ est solution d'un système du type :

$$M_{r_{k+1}} \bar{d} = \begin{pmatrix} r_{k+1} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

avec

$$\bar{e} = \begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = -Q_{\hat{x}_{k+1}}^T \nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})$$

et $M_{r_{k+1}}$ converge vers une matrice non singulière.

Pour simplifier l'écriture, on posera dorénavant $y = x(r_{k+1}, 0)$. Comme $\nabla W(y, r_{k+1}) = 0$, alors :

$$\bar{e} = Q_{\hat{x}_{k+1}}^T [\nabla W(y, r_{k+1}) - \nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})]. \tag{4.2}$$

En remplaçant $\nabla W(y, r_{k+1})$ et $\nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})$ par leurs expressions respectives, (4.2) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\bar{e} = & Q_{\hat{x}_{k+1}}^T \left\{ \nabla f(y) - \nabla f(\hat{x}_{k+1}) + \sum_{i=1}^{m} \frac{-r_{k+1}}{g_i(y)} [\nabla g_i(y) - \nabla g_i(\hat{x}_{k+1})] \right. \\
& \left. + \sum_{j=1}^{p} \frac{h_j(y)}{r_{k+1}} [\nabla h_j(y) - \nabla h_j(\hat{x}_{k+1})] \right\} \\
& + Q_{\hat{x}_{k+1}} \left\{ \nabla g(\hat{x}_{k+1}) \begin{pmatrix} \dfrac{-r_{k+1}}{g_1(y)} + \dfrac{r_{k+1}}{g_1(\hat{x}_{k+1})} \\ \vdots \\ \dfrac{-r_{k+1}}{g_m(y)} + \dfrac{r_{k+1}}{g_m(\hat{x}_{k+1})} \end{pmatrix} \right. \\
& \left. + \nabla g(\hat{x}_{k+1}) \left\{ \begin{pmatrix} \dfrac{h_1(y)}{r_{k+1}} - \dfrac{h_1(\hat{x}_{k+1})}{r_{k+1}} \\ \vdots \\ \dfrac{h_p(y)}{r_{k+1}} - \dfrac{h_p(\hat{x}_{k+1})}{r_{k+1}} \end{pmatrix} \right\} \right.
\end{aligned} \tag{4.3}$$

où

$$\nabla g(\cdot) = [\nabla g_1(\cdot), \cdots, \nabla g_m(\cdot)]$$

et

$$\nabla h(\cdot) = [\nabla h_1(\cdot), \cdots, \nabla h_p(\cdot)].$$

Puisque, par la proposition 1, on a $\|y - \hat{x}_{k+1}\| \sim O(r_k^2)$ alors, la norme du premier terme de droite de (4.3) est aussi $O(r_k^2)$.

En utilisant la relation (3.1) :

$$Q_{\hat{x}_{k+1}}^T [\nabla h(\hat{x}_{k+1}), \nabla g(\hat{x}_{k+1})] = \begin{pmatrix} \hat{U} & \hat{R} \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix},$$

le second terme de droite de (4.3) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \hat{U} & \hat{R} \\ 0 & \hat{S} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{r_{k+1}}(h_1(y) - h_1(\hat{x}_{k+1})) \\ \frac{1}{r_{k+1}}(h_p(y) - h_p(\hat{x}_{k+1})) \\ r_{k+1}\left(\frac{1}{g_1(y)} - \frac{1}{g_1(\hat{x}_{k+1})}\right) \\ r_{k+1}\left(\frac{1}{g_m(y)} - \frac{1}{g_m(\hat{x}_{k+1})}\right) \end{pmatrix}.$$

Par les propositions 1 et 2, on a :

$$\frac{1}{\|g(y)\|} \sim O\left(\frac{1}{r_{k+1}}\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{r_{k+1}}|h_j(y) - h_j(\hat{x}_{k+1})| \sim O\left(\frac{r_k^2}{r_{k+1}}\right).$$

D'autre part, pour $i \in I^*$, on a :

$$\begin{aligned} r_{k+1} \left| \frac{1}{g_i(y)} - \frac{1}{g_i(\hat{x}_{k+1})} \right| &= r_{k+1} \left| \frac{g_i(\hat{x}_{k+1}) - g_i(y)}{g_i(y)\, g_i(\hat{x}_{k+1})} \right| \\ &\sim r_{k+1} O\left(\frac{r_k^2}{r_{k+1}^2}\right) = O\left(\frac{r_k^2}{r_{k+1}}\right), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\bar{e}_1 \sim O\left(\frac{r_k^2}{r_{k+1}}\right).$$

Pour $i \notin I^*$, on a :

$$\frac{1}{g_i(y)} - \frac{1}{g_i(\hat{x}_{k+1})} \to 0 \quad \text{quand } k \to \infty,$$

ce qui permet de poser $\bar{e}_2 \sim O(r_k^2)$.

En résumé, on a :

$$\begin{pmatrix} r_{k+1}\, \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} \sim O(r_k^2)$$

et par conséquent $d_N \sim O(r_k^2)$ car Q est non singulière et $M_{r_{k+1}}$ converge vers une matrice non singulière. ■

COROLLAIRE 3 : *On a*

$$\|\nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})\| \sim O\left(\frac{r_k^2}{r_{k+1}}\right)$$

Preuve : Le résultat découle du fait que

$$\begin{pmatrix} \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} = -Q^T_{\hat{x}_{k+1}} \nabla W(\hat{x}_{k+1}, r_{k+1})$$

et que

$$\begin{pmatrix} r_{k+1}\, \bar{e}_1 \\ \bar{e}_2 \end{pmatrix} \sim O(r_k^2).$$

LEMME 2 : *Soit d_N la direction de Newton à partir de $\hat{x}_{k+1}$ et*

$$x^N_{k+1} = \hat{x}_{k+1} + d_N,$$

alors :

$$\|\nabla W(x^N_{k+1}, r_{k+1})\| \sim O\left(\frac{r_k^4}{r_{k+1}^2}\right).$$

Preuve : En appliquant à ∇W la formule de Taylor, on obtient :

$$\begin{aligned} \nabla W(x^N_{k+1}, r_{k+1}) =& \nabla f(\hat{x}_{k+1}) - r_{k+1} \sum_{i=1}^{m} \frac{\nabla g_i(\hat{x}_{k+1})}{g_i(\hat{x}_{k+1})} \\ &+ \frac{1}{r_{k+1}} \sum_{j=1}^{p} h_j(\hat{x}_{k+1}) \nabla h_j(\hat{x}_{k+1}) \\ &+ \nabla^2 f(\hat{x}_{k+1})\, d_N + r_{k+1} H_1\, d_N + \frac{1}{r_{k+1}} H_2\, d_N \\ &+ O(\|d_N\|^2) + r_{k+1}\, O\left(\frac{\|d_N\|^2}{\|g(\hat{x}_{k+1})\|^3}\right) \\ &+ \frac{1}{r_{k+1}} O(\|d_N\|^2) \end{aligned} \tag{4.4}$$

où H_1 et H_2 représentent respectivement les jacobiens de $\sum_{i=1}^{m} \nabla g_i / g_i$ et $\sum_{j=1}^{p} h_j \nabla h_j$ au point $\hat{x}_{k+1}$.

Par définition de la direction de Newton, la somme des six premiers termes du membre de droite dans (4.4) est nulle.

Il reste alors :

$$\begin{aligned}\|\nabla W(x_{k+1}^N, r_{k+1})\| &\sim O(\|d_N\|^2) + r_{k+1}\, O\left[\frac{\|d_N\|^2}{\|g(\hat{x}_{k+1})\|^3}\right]\\ &+ \frac{1}{r_{k+1}}\, O(\|d_N\|^2)\\ &\sim O(r_k^4) + O\left(\frac{r_k^4}{r_{k+1}^2}\right) + O\left(\frac{r_k^4}{r_{k+1}}\right)\\ &\sim O\left(\frac{r_k^4}{r_{k+1}^2}\right)\end{aligned}$$

puisque, par la proposition 2 et le lemme 1 on a :

$$\frac{1}{\|g(\hat{x}_{k+1})\|} \sim O\left(\frac{1}{r_{k+1}}\right), \qquad \|d_N\| \sim O(r_k^2),$$

et que $r_{k+1} > r_{k+1}^2$. Ceci achève la preuve.

La preuve du théorème 3 découle directement des lemmes 1 et 2, de la proposition 2 et du corollaire 3.

REMERCIEMENTS

Les auteurs tiennent à remercier les rapporteurs pour leurs suggestions constructives qui ont permis d'enrichir la version originale qui leur a été présentée.

Ils rappellent également que cette recherche a été rendue possible grâce à des subventions accordées par le Conseil de Recherche en Sciences et en Génie du Canada.

RÉFÉRENCES

1. C. G. Broyden et N. F. Attia, Penalty Functions, Newton's Method, and Quadratic Progamming, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1988, *58*, n° 3, p. 377-381.
2. R. Courant, Variationnal Methods for the Solution of Problems of Equilibrium and Vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*. 1943, *49*, p. 1-23.
3. J.-P. Dussault, Numerical Stability and Efficiency of Penalty Algorithms, *S.I.A.M. Num. Anal.* 1990, to appear.
4. A. V. Fiacco et G. P. McCormick, *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*, Wiley, New York, 1968.
5. K. R. Frish, *The Logarithmic Potential Method of Convex Programming*, Memorandum of May 13, University Institute of Economics, Oslo, 1955.
6. G. P. McCormick, The Projective SUMT Method for Convex Programming, *M.O.R.* 1989, *14*, p. 203-223.
7. W. Murray, Constrained Optimization, *Ph. D. thesis*, University of London, 1969.