

F. KERVEGANT

N. LIMNIOS

C. COCOZZA-THIVENT

A. DUBREUIL-CHAMBARDEL

## **Évaluation probabiliste approchée des grands arbres de défaillance**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 26, n° 2 (1992),  
p. 125-137

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1992\\_\\_26\\_2\\_125\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1992__26_2_125_0)

© AFCET, 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>



## ÉVALUATION PROBABILISTE APPROCHÉE DES GRANDS ARBRES DE DÉFAILLANCE (\*)

par F. KERVEGANT <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>, N. LIMNIOS <sup>(1)</sup>, C. COCOZZA-THIVENT <sup>(1)</sup>  
et A. DUBREUIL-CHAMBARDEL <sup>(2)</sup>

---

Résumé. — *L'évaluation de la probabilité d'occurrence d'un événement indésirable modélisé par arbre de défaillance implique fréquemment une réduction de l'ensemble des coupes minimales. Cette étude propose une méthode d'estimation d'une borne supérieure de l'erreur commise lorsque les simplifications sont effectuées en fonction d'un critère d'ordre fixé.*

Mots clés : Arbre de défaillance; coupes; critère d'ordre; erreur de troncature.

Abstract. — *Probabilistic evaluation of fault trees generally implies minimal cut sets truncation. This report presents a methodology for error estimation of minimal cut sets size truncation.*

Keywords : Fault tree; cut set; cut-off size; truncation error.

### 1. INTRODUCTION

L'évaluation de la probabilité d'occurrence d'un événement indésirable ou événement-sommet modélisé par arbre de défaillance s'effectue généralement à partir de la détermination et quantification des ensembles minimaux qui regroupent les coupes et chemins minimaux, la suite de l'article se réfère aux coupes mais reste aussi applicable en terme de chemins.

Du fait de la taille ou complexité des systèmes modélisés, la détermination ou quantification de l'ensemble des coupes minimales peut être impossible ou induire un ensemble de coupes trop important pour leur évaluation.

---

(\*) Reçu en janvier 1990.

<sup>(1)</sup> Université de Technologie de Compiègne, Département Génie Informatique, Division Mathématiques Appliquées, B.P. n° 649, 60206 Compiègne Cedex.

<sup>(2)</sup> Direction des Études et Recherches de EDF, Département Études de Sûreté et Fiabilité, 1, avenue du général de Gaulle, 92141 Clamart Cedex.

La démarche alors adoptée consiste à limiter le nombre de coupes minimales prises en compte pour l'évaluation probabiliste de l'événement indésirable.

Ces limitations s'effectuent soit au niveau de la construction de l'arbre de défaillance en limitant les niveaux de décomposition hiérarchique, soit en introduisant des critères limitant le nombre de coupes retenues pour l'évaluation.

Les critères actuellement utilisés sont de deux types : qualitatif ou quantitatif, nous présentons ci-dessous chacun de ces critères et les justifications généralement admises :

- le critère d'ordre qui sélectionne les coupes minimales de longueurs égales ou inférieures au seuil fixé. Pour le critère d'ordre, nous considérons que plus la longueur de la coupe minimale est importante, plus sa probabilité d'occurrence est faible et l'erreur engendrée sur l'évaluation probabiliste de l'événement indésirable est donc plus faible;

- le critère probabiliste qui sélectionne les coupes minimales dont la probabilité d'occurrence est égale ou supérieure au seuil fixé. Pour le critère probabiliste, nous estimons que si ce seuil est faible par rapport à la probabilité d'occurrence de l'événement indésirable, l'erreur commise sur l'évaluation probabiliste de l'événement indésirable est alors faible.

Ces démarches souvent nécessaires pour l'évaluation probabiliste de l'événement indésirable donnent une borne inférieure de cette probabilité et ne permettent pas de maîtriser l'ordre de grandeur de l'erreur commise; d'autre part, les justifications citées ci-dessus ne sont pas toujours suffisantes :

- des coupes, chacune de faible probabilité d'occurrence, peuvent avoir une forte contribution du fait de leur nombre;

- des coupes de longueur importante peuvent avoir des probabilités d'occurrence supérieures à celles de taille inférieure.

Ce travail a pour objectif de développer une méthodologie d'approximation des erreurs commises sur l'évaluation probabiliste de l'événement-sommet lors d'une troncature par critère d'ordre sur les coupes minimales.

Deux méthodes relatives à la résolution de ce problème ont été proposées dans la littérature ([1]-[2]).

## 2. PROBLÈME DE TRONCATURE DES COUPES ET MÉTHODE DE HUGHES

Soit  $K$  l'ensemble des coupes minimales, nous effectuons une partition de cet ensemble en notant :

A 1 : l'ensemble des coupes minimales d'ordre inférieur ou égal au critère d'ordre fixé  $k_s$  avec  $P(A 1)$  sa probabilité d'occurrence.

A 2 : l'ensemble des coupes minimales d'ordre supérieur au critère d'ordre fixé  $k_s$  avec  $P(A 2)$  sa probabilité d'occurrence.

L'erreur relative commise en négligeant les coupes minimales d'ordre strictement supérieur au seuil de troncature fixé  $k_s$  est définie dans les articles cités ci-dessus par :

$$E(k_{s+1}) = \frac{P(A 1)}{P(A 2)}$$

Pour les deux articles [1, 2], le problème réside dans la majoration de  $P(A 2)$  sous l'hypothèse que les événements de base sont indépendants.

La démarche proposée par Modarres et Dezfuli [2] se décompose en deux étapes d'approximation :

- La première étape consiste à majorer le nombre de coupes de longueur  $k$  par la combinatoire de  $k$  défaillances parmi  $N$  événements de base.
- La deuxième étape consiste à majorer la probabilité d'occurrence d'une coupe en faisant l'hypothèse que tous les événements de base sont équiprobables et leur probabilité égale à la plus grande probabilité d'occurrence recensée dans la liste des événements de base.

La méthode proposée par Hughes [1] consiste à majorer la probabilité totale des coupes négligées en majorant la probabilité de l'ensemble des coupes de longueur  $k$ , notée  $P(k)$  par la combinatoire des probabilités d'occurrence de  $k$  événements de base et la probabilité de non occurrence de  $(N-k)$  événements de base. Pour cette méthode les événements de base sont pris en compte avec leurs données réelles.

Par la méthode de Hughes, nous avons donc les formulations suivantes :

$$P(k) = \sum_{\substack{r_i=1,0 \\ r_1+r_2+\dots+r_N=k}} (1-p_1)^{1-r_1} \cdot p_1^{r_1} \cdot (1-p_2)^{1-r_2} \cdot p_2^{r_2} \cdot \dots \cdot (1-p_N)^{1-r_N} \cdot p_N^{r_N}$$

et

$$P(k) \leq R(k)$$

$$R(k) = A \cdot \frac{\alpha^k}{k!}$$

avec :

$$A = \prod_{i=1, N} (1 - p_i)$$

$$\alpha = \sum_{i=1}^N \frac{p_i}{(1 - p_i)}$$

La majoration de la probabilité de l'ensemble des coupes tronquées à l'ordre  $k_s$ , notée  $\beta(k_{s+1})$  s'exprime alors par :

$$\beta(k_{s+1}) = \beta(0) - \sum_{k=0}^{k_s} R(k)$$

où :

$$\beta(0) = A \cdot e^\alpha$$

avec :

$N$  : nombre d'événements.

$p_i$  : probabilité d'occurrence de l'événement  $i$ .

$k_s$  : seuil de troncature des coupes minimales.

Notre travail se fonde plus particulièrement sur la méthode proposée par Hughes, l'approche proposée par Modarres et Dezfuli étant plus conservative.

A partir des simulations effectuées, nous avons relevé deux types de problèmes pour lesquels les écarts entre l'erreur approximée et l'erreur réelle sont importants (ex : 10<sup>3</sup> % au lieu de 1 %).

Ces problèmes sont dus aux surestimations des probabilités de l'ensemble des coupes d'ordre  $k$  du fait, d'une part de l'approximation de type structurale du nombre de coupes par la combinatoire de  $k$  événements défaillants parmi  $N$ ; d'autre part de l'approximation de type probabiliste de la probabilité d'occurrence d'une coupe d'ordre  $k$ .

Étant donné que ces deux paramètres sont étroitement liés dans l'application de cette méthode nous avons cherché à dissocier les effets de chacun d'eux sur les différents essais caractérisés par des écarts importants entre erreur approximée et erreur réelle.

Nous présentons schématiquement les deux types de problèmes relevés :

*Type 1* : Répartition irrégulière des coupes.

Le problème est dû à l'ordre de la troncature. Le poids des coupes minimales jusqu'à l'ordre  $k$  est négligeable par rapport au poids des coupes d'ordre supérieur à  $k$ .

*Exemple* : Considérons un arbre de défaillance de 1000 événements de base, chaque événement a une probabilité d'occurrence égale à  $2 \cdot 10^{-4}$ , l'évaluation approchée de l'événement indésirable ne prend en compte que les coupes minimales d'ordre inférieur ou égal à 2, dont la répartition est la suivante :

- 2 coupes d'ordre 1;
- 2 coupes d'ordre 2.

La répartition des coupes d'ordre supérieur n'est pas connue.

A partir de ces conditions nous allons développer les calculs d'estimation des probabilités des coupes par la méthode de Hughes ainsi que l'évaluation exacte des coupes minimales d'ordre 1 et 2, notées respectivement  $P^*(1)$  et  $P^*(2)$ .

Estimation des probabilités des coupes par la méthode de Hughes :

$$R(1) = 1000 \cdot (1,6 \cdot 10^{-4}).$$

$$R(2) = 5 \cdot 10^5 \cdot (3,28 \cdot 10^{-8}).$$

Évaluation exacte de ces probabilités :

$$P^*(1) = 2,2 \cdot 10^{-4}.$$

$$P^*(2) = 2,4 \cdot 10^{-8}.$$

Nous constatons que les majorations diffèrent principalement du fait de la majoration du nombre de coupes d'un ordre donné.

*Type 2* : Dispersion des probabilités d'occurrence des événements de base.

Si des événements de base ont des probabilités d'occurrence prépondérantes, les estimations des probabilités des coupes minimales et plus particulièrement des coupes à faible ordre sont fortement pondérées par ces composants.

*Exemple* : Considérons un arbre de défaillance à dix événements de base dont la répartition des probabilités d'occurrence est la suivante :

- 9 événements de base ont des probabilités d'occurrence égales à  $10^{-9}$ .
- 1 événement de base a une probabilité d'occurrence égale à  $10^{-1}$ .

La répartition des coupes n'est pas connue.

Nous développons uniquement l'estimation de la probabilité de l'ensemble

des coupes de longueur 1 par la méthode de Hughes :

$$R(1) = 10^{-1} \cdot (1 - 10^{-1})^9 + 9 \cdot 10^{-9} \cdot (1 - 10^{-1}) \cdot (1 - 10^{-9})^8$$

Ceci donne une majoration de la probabilité de l'ensemble des coupes de longueur 1 de l'ordre de  $10^{-1}$ . Or pour cet exemple, l'arbre défini peut posséder deux coupes minimales d'ordre 1 de probabilité d'occurrence égale à  $10^{-9}$ .

Nous proposons donc de modifier la méthode proposée par Hughes afin de pallier les problèmes recensés.

### 3. PROPOSITIONS D'AMÉLIORATION

Les modifications que nous apportons à la méthode proposée par Hughes sont de deux natures :

- l'une de ces modifications est de type méthode et concerne l'approximation de la probabilité de l'ensemble des coupes d'ordre  $k$ , notée  $P_1(k)$ ;
- l'autre concerne la démarche méthodologique.

#### 3.1. Modification de type méthode

Compte tenu des limites présentées ci-dessus, nous nous proposons donc d'améliorer l'approximation de la probabilité d'occurrence des coupes d'ordre  $k$ , notée  $P_1(k)$ .

Pour cela, nous introduisons deux paramètres supplémentaires :

- le nombre maximal des coupes, noté  $N_{\max}$ ;
- la longueur maximale des coupes, notée  $L_{\max}$ .

Par l'utilisation de ces paramètres, nous modifions le principe de l'approximation des probabilités de l'ensemble des coupes d'ordre  $k$  qui selon la méthode de Hughes se base sur la combinatoire des défaillances de  $k$  événements et le bon fonctionnement des événements restants et nous revenons à la notion de coupes.

Ces paramètres nous permettent d'affiner l'approximation de la probabilité des coupes d'ordre  $k$  en modifiant l'estimation du nombre de coupes d'ordre  $k$ ; cette approximation est la principale cause des problèmes de type 1.

A partir de ces paramètres, nous exprimons la probabilité des coupes de longueur  $k$  par :

$$P_1(k) = N_{\max} * P_{\max}(k)$$

avec :

$$P_{\max}(k) = \prod_{i=1}^k p_i; \quad k \in [0, L_{\max}]$$

où  $p_i$  est la probabilité d'occurrence de l'événement de base  $i$ ; ces probabilités sont ordonnées par ordre décroissant.

### 3.2. Modification de la démarche méthodologique

Notre démarche se décompose en deux phases :

1<sup>re</sup> phase : Estimation de l'erreur commise.

Cette première phase a pour objet de donner l'estimation d'une borne supérieure de l'erreur commise lors de la troncature en intégrant la modification de type méthode présentée ci-dessus.

La démarche méthodologique devient donc :

– Évaluation de la probabilité d'occurrence de l'événement-sommet en fixant un critère de troncature  $k_s$ :  $P'$ (Top); ainsi que détermination des paramètres  $N_{\max}$  et  $L_{\max}$ .

– Majoration des probabilités des coupes d'ordre  $k$ ; pour  $k \in [k_{s+1}, L_{\max}]$  par :

$$P'(k) = \text{Min}(P_1(k), R(k))$$

et évaluation des probabilités totales des coupes négligées par :

$$\beta(k_{s+1}) = \sum_{k=k_{s+1}}^{L_{\max}} P'(k)$$

– Approximation de l'erreur relative commise par :

$$E(k_{s+1}) = \frac{\beta(k_{s+1})}{P'(\text{Top})}$$

2<sup>e</sup> phase : Analyse et décomposition.

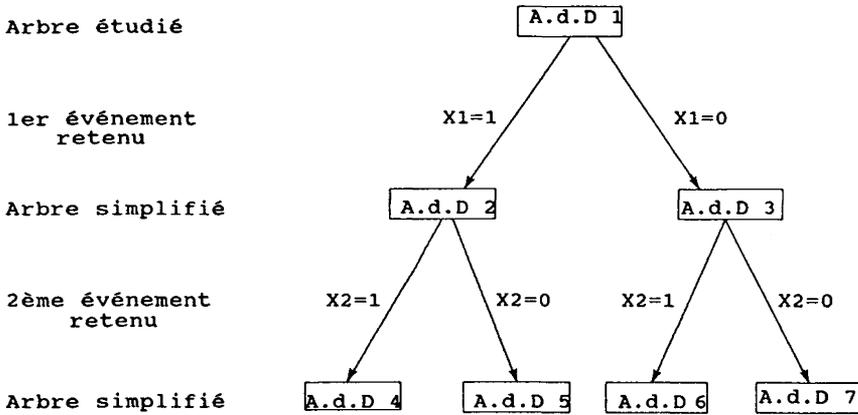
Suite à la première phase de traitement, l'analyste dispose donc de l'évaluation de la probabilité d'occurrence de l'événement-sommet pour un seuil fixé, ainsi que de l'estimation de l'erreur maximale.

Dans le cas où cette estimation satisfait les besoins de précision cette deuxième phase n'a alors pas d'objet.

Dans le cas contraire, deux types d'action sont à envisager :

– Soit l'analyste reprend toute la démarche en modifiant le critère de troncature, dans le cas où il juge que l'imprécision sur l'estimation est due au niveau de troncature effectué.

– Soit il se trouve confronté à des spécificités structurelles qui rendent trop forte la majoration de l'erreur malgré la prise en compte lors de l'exécution de la phase 1 des données structurelles  $L_{\max}$  et  $N_{\max}$ .



Seules les évaluations des Arbres de Défaillance (A.d.D), notés AdD4, AdD5, AdD6, AdD7 sont nécessaires aux évaluations de l'AdD1.

Nous avons les relations suivantes :

$$P(\text{A.d.D 1}) = P_{X1} \cdot [P_{X2} \cdot P(\text{A.d.D 4}) + (1 - P_{X2}) \cdot P(\text{A.d.D 5})] \\ + (1 - P_{X1}) \cdot [P_{X2} \cdot P(\text{A.d.D 6}) + (1 - P_{X2}) \cdot P(\text{A.d.D 7})]$$

$$B(\text{A.d.D 1}) = P_{X1} \cdot [P_{X2} \cdot B(\text{A.d.D 4}) + (1 - P_{X2}) \cdot B(\text{A.d.D 5})] \\ + (1 - P_{X1}) \cdot [P_{X2} \cdot B(\text{A.d.D 6}) + (1 - P_{X2}) \cdot B(\text{A.d.D 7})]$$

L'erreur commise pour l'A.d.D étudié est donc :

$$E = \frac{B(\text{A.d.D 1})}{P(\text{A.d.D 1})}$$

Figure 1. – Décomposition et évaluation de l'erreur commise exemple à deux niveaux de décomposition.

Notre option a été dans ce cas présent de réduire la complexité structurelle de l'arbre de défaillance par décomposition de cet arbre autour d'événements-pivots ou en fonction de modules simples.

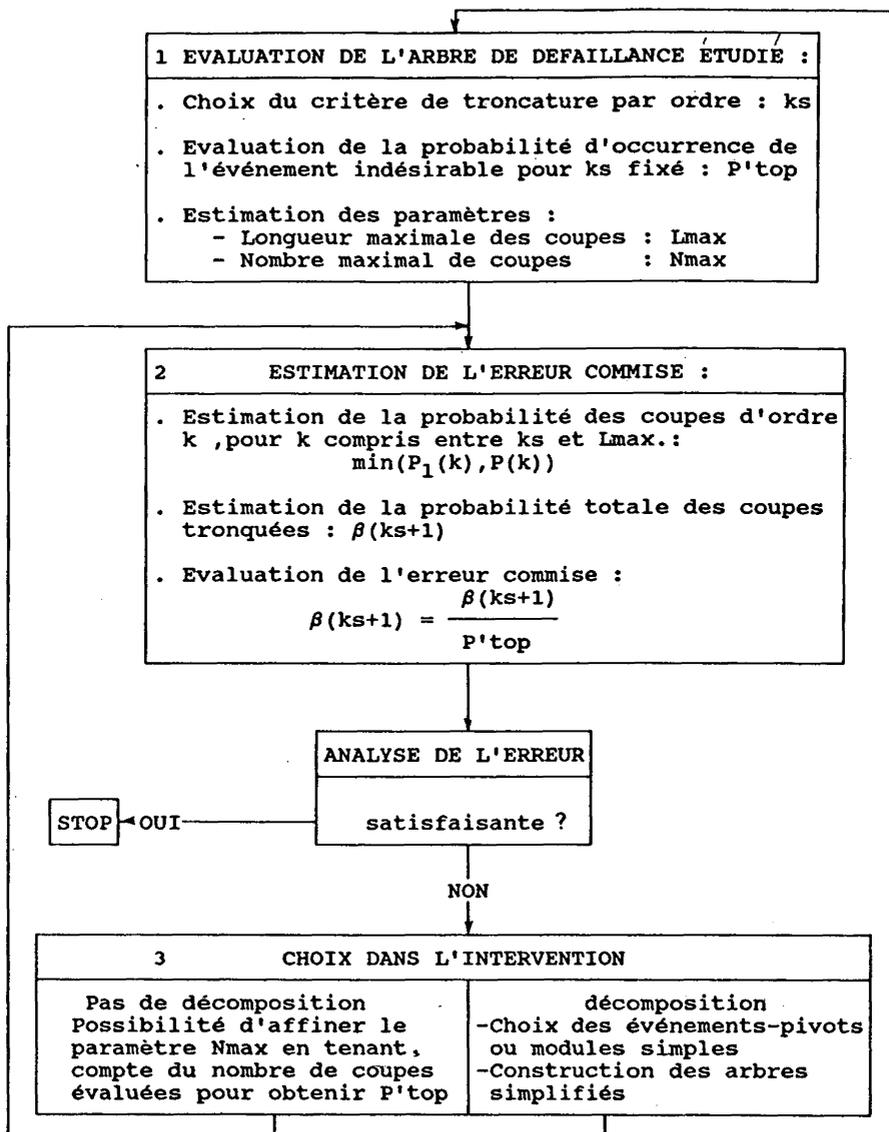


Figure 2. — Schéma général de la méthodologie d'estimation de l'erreur commise lors d'une troncature par critère d'ordre.

La décomposition s'effectue en fonction d'événements choisis par l'analyste parmi l'ensemble des événements répétés ou forts en terme de probabilité d'occurrence. La figure 1 présente un exemple traité par le principe de la décomposition autour d'événements pivots. Par cette démarche les ordres de troncature sont définis pour les arbres simplifiés terminaux sur la figure 2 les arbres de défaillance notés AdD4, AdD5, AdD6, AdD7. Nous évaluons alors pour chacun de ces arbres de défaillance et selon la phase 1 de la démarche la majoration des probabilités totales des coupes négligées. Mais la majoration de la probabilité totale des coupes négligées au niveau de l'arbre de défaillance étudié (AdD1) n'est alors pas fonction d'un seuil de troncature fixé pour cet arbre mais dépend des critères de troncature fixés au niveau des arbres de défaillance simplifiés et terminaux.

La démarche générale (Phase 1 et Phase 2) est schématisée à la figure 2.

#### 4. RÉSULTATS

Le tableau ci-dessous rassemble les résultats obtenus pour deux simulations effectuées suivant la méthode proposée par Hughes, puis en tenant compte respectivement des deux types de modifications apportées.

La logique des arbres de défaillance étudiés ci-dessous ainsi que les données probabilistes de leurs événements de base sont présentées en annexe.

Les résultats représentent les estimations des erreurs relatives commises suite à une troncature sur l'ordre des coupes ainsi que la valeur réelle de l'erreur maximale.

##### Par la méthode de Hughes

	Arbre 1 : ks=5	Arbre 2 : ks=2
Erreur en %	590	2.36 10 <sup>3</sup>
Intervalle de P'(Top)	[1.335 10 <sup>-11</sup> , 9.213 10 <sup>-11</sup> ]	[8.72 10 <sup>-4</sup> , 2.14 10 <sup>-2</sup> ]

##### Méthode intégrant Nmax et Lmax

##### Méthode intégrant Nmax et Lmax et décomposition

	Arbre 1 : ks=5	Arbre 2 : ks=2
Erreur en %	0.69	165
Intervalle de P'(Top)	[1.335 10 <sup>-11</sup> , 1.344 10 <sup>-11</sup> ]	[9.09 10 <sup>-4</sup> , 2.4 10 <sup>-3</sup> ]

##### Evaluations exactes

	Arbre 1 : ks=5	Arbre 2 : ks=2
P(Top)	1.3353 10 <sup>-11</sup>	9.210 <sup>-4</sup>

Les résultats présentés ci-dessus reflètent les différentes possibilités offertes par notre démarche :

– pour l'arbre 1, l'analyste a jugé que la phase 1 de la démarche donne des résultats satisfaisants et n'envisage pas la décomposition de l'arbre de défaillance.

– pour l'arbre 2, l'analyste a opté pour la décomposition de l'arbre autour d'un seul événement-pivot et suite à cette décomposition les résultats obtenus sont jugés satisfaisants, même si la majoration de l'erreur commise ainsi que l'intervalle de la probabilité d'occurrence de l'événement-sommet peuvent être affinés.

## 5. CONCLUSIONS

Dans le cadre de l'évaluation de la probabilité d'occurrence d'un événement indésirable modélisé par arbre de défaillance, cette étude nous a permis de développer une méthode générale destinée à l'estimation des erreurs commises lors de la simplification de l'ensemble des coupes minimales par un critère d'ordre. Nous avons d'autre part montré les performances de cette méthode par rapport aux méthodes développées [1]-[2] du fait principalement de la prise en compte des paramètres structurels  $L_{\max}$  et  $N_{\max}$ , ces paramètres étant souvent des informations obtenues directement par les logiciels de traitement des arbres de défaillance.

## BIBLIOGRAPHIE

1. R. P. HUGHES, Fault Tree Truncation Error Bounds, *Reliability Engineering*, 1986, 17, p. 37-46.
2. M. MODARRES et H. DEZFULI, A Truncation Methodology for Evaluating large Fault Tree, *I.E.E.E. Trans. Reliability*, 1984, R 33, p. 325-328.

## ANNEXES

ARBRE 1

Structure :

Porte	Type	Entrées				
E.I	*	A1	A2	TOP2	TOP3	A4
TOP2	+	A6	A7	A8	TOP4	
TOP3	+	A9	A10	A5	A3	
TOP4	*	A11	A12			

Note : \* indique une porte ET  
+ indique une porte OU

Données :

Événements de base	Probabilités d'occurrence
A1	2.00E-02
A2	3.00E-03
A3	3.00E-02
A4	4.50E-03
A5	6.00E-04
A6	8.00E-04
A7	7.00E-04
A8	7.00E-05
A9	1.00E-06
A10	9.00E-04
A11	6.00E-04
A12	8.00E-06

ARBRE 2 :

Structure :

Porte	Type	Entrées				
E.I	+	Z1	Z2	Z3	Z4	Z5
Z1	*	A1	Z6	Z7		
Z6	+	A3	Z8	A4	A5	A7
Z7	*	Z9	Z10			
Z8	+	A11	A12	A13	A14	A15
Z9	+	A10	A16	A17	A18	A19
Z10	+	A20	A21	A22	A9	A8
Z2	+	A12	A23	Z11	Z12	
Z11	*	A16	A24	Z13	A25	A26
Z12	+	A22	Z14	A27	A28	A29
Z13	*	A31	A32	A33	A34	
Z14	+	A35	A36	A37	A38	A39
Z3	*	A12	A40	Z15	Z16	
Z15	+	A41	A42	A43	A44	A48
Z16	+	Z17	Z18	A18	A45	Z19
Z17	*	A49	A50	A51		
Z18	*	A52	A53	A54		
Z19	*	A46	A47	A6		
Z4	+	Z20	Z21			
Z20	*	A55	A56	Z22		
Z21	*	A57	A58			
Z22	+	A59	A60	Z23		
Z23	*	A65	A66			
Z5	*	A61	A62	A63	A64	

Données :

Evénements de base	Probabilités d'occurrence	Evénements de base	Probabilités d'occurrence
A1	2.00E-02	A34	6.00E-04
A2	3.00E-04	A35	8.78E-05
A3	3.00E-05	A36	1.00E-08
A4	4.50E-06	A37	1.55E-05
A5	6.00E-04	A38	1.50E-05
A6	8.00E-07	A39	1.00E-05
A7	7.00E-07	A40	1.20E-05
A8	7.00E-03	A41	4.70E-06
A9	1.00E-03	A42	1.78E-06
A10	9.00E-05	A43	1.65E-06
A11	6.00E-04	A44	1.00E-09
A12	8.00E-05	A45	8.00E-09
A13	1.45E-02	A46	1.45E-09
A14	7.50E-04	A47	7.50E-09
A15	1.00E-06	A48	1.00E-06
A16	9.00E-03	A49	9.00E-03
A17	6.00E-04	A50	6.00E-04
A18	8.78E-05	A51	8.78E-05
A19	1.45E-04	A52	1.00E-08
A20	1.45E-03	A53	4.55E-06
A21	7.50E-06	A54	1.50E-06
A22	1.00E-06	A55	1.76E-01
A23	1.00E-06	A56	1.00E-02
A24	4.70E-06	A57	1.00E-02
A25	1.78E-05	A58	1.32E-02
A26	1.65E-07	A59	1.22E-03
A27	9.00E-05	A60	3.00E-02
A28	6.00E-05	A61	2.00E-03
A29	8.00E-05	A62	1.00E-04
A30	1.45E-08	A63	5.50E-03
A31	7.50E-06	A64	5.00E-02
A32	1.00E-06	A65	7.00E-02
A33	9.00E-03	A66	8.10E-02