RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

F. BENDALI
A. QUILLIOT

Réseaux stochastiques

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 24, nº 2 (1990), p. 167-190
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1990__24_2_167_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 24, n° 2, 1990, p. 167 à 190)

RÉSEAUX STOCHASTIQUES (*)

par F. BENDALI (1) et A. QUILLIOT (2)

Résumé. — *Réseaux Stochastiques. Nous considérons ici des univers d'états et d'actions dont les effets à partir d'un état donné sont partiellement indéterminés et obéissent à une loi de probabilité indépendante des actions antérieurement effectuées. Partant d'un état initial y_0 et cherchant à atteindre un état final x_0 on se préoccupe alors de déterminer des stratégies de plus grande sécurité ou de plus petite distance dans le cas où chaque exécution d'une action implique un certain laps de temps. Nous formalisons en vue de résoudre ces problèmes un concept de réseaux stochastiques, et nous montrons que certains algorithmes usuels relatifs aux cheminements dans les réseaux (Bellmann, Dantzig, Dijsktra, A*) peuvent alors être reformulés.*

Mots clés : Réseaux; plus courts chemins; Robot STRIPS.

Abstract. — *We consider here a state and action universe, assuming that the effect of any action which may be launched from a given state is not completely determined and depends on some probability distribution. Then, when some initial state x_0 and some final state y_0 are given, we try to determine a strategy which allows to go from x_0 to y_0 the fastest (in a probabilistic sense) or the most surely possible. We provide a mathematical framework for this problem through the concept of stochastic network and prove that the classical shortest path algorithms (Dijkstra, Dantzig, Bellman, A*) can be rewritten in this context.*

Keywords : Networks; shortest paths; STRIPS Robot.

1. INTRODUCTION

Considérons le problème suivant : Un robot (un programme joueur de Bridge, par exemple) désire passer d'un état à un autre par le biais d'un certain registre d'actions, auxquelles sont associées des préconditions et dont les effets ne sont que partiellement déterminés, selon diverses lois de probabilités. Notre robot échaffaude donc une stratégie, susceptible de maximiser sa

---

(*) Reçu en mars 1989.

(1) Laboratoire ARTEMIS-I.M.A.G., 38402 Saint-Martin-d'Hères, France.
(2) Université Blaise-Pascal (Clermont-II), Département de Mathématiques Appliquées, 63177 Aubière, France.

Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/90/02 167 24/$ 4.40

probabilité d'atteindre l'objectif assigné, ou bien encore de minimiser son espérance de temps consacré à la réalisation de cet objectif.

Nous supposerons ici (hypothèse malheureusement souvent abusive), que la probabilité $p(s_0, s, a)$ de passer à l'état s dès lors que l'on applique l'action a depuis l'état s_0 n'est pas susceptible de varier au fil du temps, et ne dépend donc pas des actions qui ont pu éventuellement être effectuées antérieurement à a. Notre problème se formalisera donc en recherche de stratégies optimales de déplacement dans des réseaux d'états d'arrivées possibles, correspondant aux applications possibles des différentes actions à l'état de départ. Dans ce qui suivra, nous préciserons la modélisation ainsi choisie, et montrerons que les techniques usuelles de cheminement dans les réseaux (Algorithmes de Dijkstra, Dantzig, Bellman, Exploration A^* pour des modèles de robotique de type STRIPS ou apparentés) peuvent être adaptées au problème ainsi posé.

Remarque 0 : *La problématique ainsi introduite (problèmes de la sécurité et de la distance, définis ultérieurement) est à rapprocher de celle engendrée dès lors que l'on veut faire de la programmation dynamique en environnement aléatoire. Les problèmes posés sont néanmoins différents : les processus auxquels nous nous intéressons ici sont forcément finis, puisqu'ils s'interrompent une fois l'objectif atteint, et que dans le cas contraire on conclut à un échec. Nous ne nous interessons donc pas à des stratégies stationnaires optimales (pour reprendre la terminologie utilisée en* [1] *ou* [9]) *mais plutôt à des stratégies optimales d'approche à un état stationnaire trivial (on est sur l'objectif et on y reste).*

2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

On nommera réseau stochastique la donnée d'un ensemble X de sommets et d'un ensemble S d'arcs stochastiques, un arc stochastique étant pour nous la donnée d'un sommet d'origine x et d'une distribution de probabilité p sur X. Un tel réseau sera noté $G =_{st} (X, S)$, un arc stochastique (on dira *st*-arc) étant alors noté $s = [x, p] = [x, (p_{s,y}, y \in X)]$, x étant l'origine de s et noté aussi $o(s)$, l'ensemble des sommets y de X tels que $p_{s,y}$ est non nul étant le support de s et noté $supp(s)$.

Une boucle de G en $x \in X$ sera le *st*-arc $s = (x, p)$ tel que : $p_{s,x} = 1$.

Si $s \in S$, un élément de $supp(s)$ sera aussi dit extrémité de s.

Remarque 1 : *Le concept ainsi introduit n'est à confondre, ni avec celui du graphe aléatoire, ni avec celui du graphe représentatif d'une chaîne de Markow.*

A un réseau stochastique $G={}_{st}(X, S)$, on associera la matrice $Sto(G)$ indexée sur $S.X$ et définie par : $Sto(G)_{s,y}=p_{s,y}$, ainsi que la matrice $M(G)=I(G)-Sto(G)$, $I(G)$ étant définie par : $I(G)_{s,y}=1$ si $y=o(s)$ et 0 sinon.

Si $G={}_{st}(X, S)$ est un réseau stochastique, on pose pour tout $x\in X$:

$$d_G^+(x)=|\{s\in S/o(s)=x\}|;$$
$$d_G^-(x)=\sum_{s\in S} p_{s,x}.$$

On remarque :

PROPOSITION 1

$$\sum_{x\in X} d_G^+(x)=\sum_{x\in X} d_G^-(x).$$

Démonstration : Chacune des deux quantités ci-dessus est en fait égale au nombre de *st*-arcs du réseau considéré. □

Si $G={}_{st}(X, S)$ est un réseau stochastique, on note $G^*=(X, E(S))$ le graphe orienté défini sur X par : $[x, y]\in E(S)$ si il existe $s\in S$ tel que $o(s)=x$ et $p_{s,y}\neq 0$.

Un *st*-arc s d'un réseau stochastique $G={}_{st}(X, S)$ peut être éventuellement muni d'une longueur $l(s)$ qui est en fait un vecteur $(l(s, y), y\in X)$ représentatif des durées des transitions possibles dès que l'on applique s à partir de $o(s)$. On pose alors :

$$\bar{l}(s)=\sum_{y\in X} l(s, y).p_{s,y}.$$

Soit $G={}_{st}(X, W)$ un réseau stochastique et $F\subset S$; le réseau stochastique ${}_{st}(X, F)$ est nommé réseau partiel de G. Si $A\subset X$ est tel que tout $f\in F$ possède son origine et son support dans A, A est dit stable par F et le réseau induit $G_{A,F}={}_{st}(A, F)$ est dit sous-réseau induit de G par A et F.

Soit $G={}_{st}(X, S)$ un réseau stochastique et $A\subset X$; on notera $Red(G,A)$ le réseau stochastique ${}_{st}(A\cup\{\text{Nil}\}, \{r_A(s), s\in S\})$ ainsi construit :

Nil est un point spécial considéré comme n'appartenant pas à X et représentant la fusion des éléments de $X-A$;

r_A transforme tout *st*-arc d'origine $x\in X-A$ en une boucle de Nil sur lui-même;

r_A transforme tout *st*-arc $s=[x, p]$ d'origine $x\in A$ en un *st*-arc $[x, q]$ où q est indexé sur $A\cup\{\text{Nil}\}$, égal à p pour tout indice $y\in A$ et tel que :

$$q_{R_A(s),\text{Nil}}=\sum_{y\in X-A} p_{s,y}.$$

Soit $G=(X, E)$ un réseau (ordinaire) et $x_0 \in X$; l'ensemble C_{x_0} des sommets x de G à partir desquels on peut suivre un chemin orienté menant en x_0 sera nommé composante semi-connexe de x_0 dans G. Si $C_{x_0}=X$, alors G sera dit semi-connexe vers x_0. Il est d'autre part connu qu'un tel réseau peut se décomposer en composantes fortement connexes, le réseau défini par les arcs connectant entre elles ces composantes connexes étant sans circuit. Un bloc terminal pour G sera une telle composante de laquelle ne sort aucun arc du réseau.

Si le réseau G s'écrit H^* où H est un réseau stochastique, on parlera de blocs terminaux pour H aussi bien que pour G.

3. PROBLÈMES DE LA SÉCURITÉ ET DE LA DISTANCE

Soient $G={}_{st}(X, S)$ un réseau stochastique, x_0 et y_0 2 sommets de ce réseau. Une stratégie z vers x_0 dans G est le choix pour tout sommet $x \neq x_0$ de G d'un st-arc $z(x)$. A une telle stratégie correspond une certaine probabilité $\pi(z, x_0, y_0)$ d'atteindre un jour x_0 en partant de y_0 et en suivant le st-arc-$z(x)$ à chaque passage sur le sommet $x \in X$.

Résoudre le problème de la sécurité pour la donnée G, x_0, y_0 consiste à choisir une stratégie z maximisant $\pi(z, x_0, y_0)$.

Dans l'hypothèse où existent de telles stratégies z telles que $\pi(z, x_0, y_0)=1$ et où les st-arcs de G sont munis de longueurs, résoudre le problème de la distance consiste à choisir parmi les stratégies z telles que $\pi(z, x_0, y_0)=1$ celle qui minimise l'espérance de distance de x_0 à y_0. (Par longueur on peut entendre coût.)

C'est à ces deux problèmes de la sécurité et de la distance que nous allons nous intéresser au cours de ce travail.

4. MATRICES DE MARKOV. RAPPELS

Une matrice carrée est dite de Markov si elle peut s'écrire $M=Sto(G)$ où $G={}_{st}(X, S)$ est un réseau stochastique tel que : $\forall x \in X$, $d_G^+(x)=1$.

X s'identifie alors avec l'ensemble des colonnes de M et S avec celui des lignes, et on pose $G=Mar(M)$.

Il est connu que : (*voir* [1], [6]).

• La multiplicité algébrique de la valeur propre 1 de M est égale à sa multiplicité géométrique et encore égale au nombre de blocs terminaux du réseau $Mar(M)$.

Si t est le nombre de ces blocs terminaux, on peut trouver t vecteurs $q_1, \ldots, q_t$ indépendants, positifs ou nuls et de somme des coordonnées 1, et tels que pour tout $i \in 1, \ldots, t$, $q_i . M = q_i$.

• Si la cardinalité de chacun de ces blocs terminaux est 1, alors les autres valeurs propres de M sont de module strictement inférieur à 1.

• Si la cardinalité de chacun des blocs terminaux de $Mar(M)$ est 1 et si partant d'un sommet y_0 quelconque de $Mar(M)$ origine d'un certain arc s_0 de $Mar(M)$ associé à une ligne i_0 de M l'on se déplace le long des st-arcs de $Mar(M)$, alors la probabilité q_j que l'on a de se retrouver à l'état stationnaire (après avoir effectué un nombre infini d'actions) sur le sommet terminal associé à la colonne j de M est fournie par :

$$q_j = \lim_{n \to +\infty} ((0, 0, \ldots, \underset{\substack{\uparrow \\ i_0}}{1}, 0, \ldots,) . M^n)_j.$$

5. ARBRES ET CIRCUITS

La notion de réseau stochastique prolonge celle de réseau ordinaire, et aussi, les problèmes de la sécurité et de la distance constituent des extensions des problèmes de recherche de chemins et de plus courts chemins dans les réseaux. Très naturellement, notre démarche va constituer à reproduire pour les réseaux stochastiques les méthodes appliquées aux réseaux usuels.

Les outils de base pour les réseaux usuels concernent la connexité ainsi que les notions d'arbres et de circuits. Nous devons dans un premier temps nous doter d'outils similaires applicables aux réseaux stochastiques.

DÉFINITION : On dira qu'un réseau stochastique $G = {}_{st}(X, S)$ est un arbre de racine $x_0 \in X$ si le réseau G^* est semi-connexe vers x_0 et si l'on a :

$$d_G^+(x_0) = 0; \qquad \forall x \in X - \{x_0\}, \quad d_G^+(x) = 1.$$

On dira que G est un circuit si G^* est fortement connexe et si pour tout sommet x de G on a $d_G^+(x) = 1$.

$F \subset S$ sera dit former un arbre de G de racine x_0, si le réseau stochastique partiel ${}_{st}(X, F)$ est un arbre de racine x_0; le couple A, F avec $A \subset X$, $F \subset S$

sera dit former un circuit de G si A est stable par F et si le sous-réseau induit $G_{A,F}$ est un circuit.

Le réseau stochastique $G={}_{st}(X, S)$ sera dit un 2-arbre de racines x_0, $x_1 \in X$ si le réseau G^* contient exactement 2 blocs terminaux réduits aux sommets x_0 et x_1 et si l'on a :

$$\forall x \in X - \{x_0, x_1\}, \quad d_G^+(x)=1.$$

Il est connu que si dans un réseau usuel, un sommet est atteignable par un chemin depuis tous les autres sommets, alors il existe dans ce réseau une arborescence ayant pour racine ce sommet. De même nous pouvons annoncer :

PROPOSITION 2 : *Soit $G={}_{st}(X, S)$ un réseau stochastique et $x_0 \in X$ tel que G^* soit semi-connexe vers x_0. Alors il existe $F \subset S$ qui forme un arbre de G de racine x_0.*

Démonstration : Soit $x \in X - \{x_0\}$ tel que $d_G^+(x) \geqq 2$; il nous suffit de prouver qu'il est possible de retirer de S un certain st-arc d'origine x sans perdre la semi-connexité vers x_0. Soit $s \in S$ tel que $o(s)=x$ et A la composante semi-connexe de x_0 dans le réseau $({}_{st}(X, S-\{s\}))$. Si $A \neq X$ alors $x \in A$ et pour tout $y \in X - A$, il existe un chemin de G^* allant de y à x (orienté). D'autre part le st-arc s possède des extrémités dans A. Dès lors, n'importe quel st-arc $s' \neq s$ d'origine x peut être retiré de S sans que la semi-connexité vers x_0 de G^* soit altérée. □

PROPOSITION 3 : *Soit $G={}_{st}(X, S)$ un réseau stochastique et $x_0 \in X$ tels que :*

$$d_G^+(x_0)=0; \qquad \forall x \in X - \{x_0\}, \quad d_G^+(x)=1.$$

G est alors un arbre de racine x_0 si et seulement si la matrice $M(G)$ est de rang m où m est la cardinalité de S.

Démonstration : Si G est un arbre de racine x_0, on peut lui rajouter une boucle reliant x_0 à lui-même, de manière à obtenir un réseau $Bo(G, x_0)$. La matrice $Sto(Bo(G, x_0))$ est alors une matrice de Markov qui possède 1 comme valeur propre de multiplicité algébrique égale à 1. Le résultat s'ensuit par définition de $M(G)$.

Réciproquement, si $M(G)$ est de rang m, alors $Bo(G, x_0)$ possède un seul bloc terminal forcément réduit au sommet x_0 ce qui implique la semi-connexité de G vers x_0, et donc le fait que G soit un arbre de racine x_0. □

Remarque 2 : *On en déduit aisément que si $G={}_{st}(X, S)$ est un arbre de racine $x_0 \in X$, u un vecteur indexé sur X et tel que $u_{x_0}=0$, alors il existe v*

indexé sur X tel que :

$$u = M(Bo(G, x_0)).v.$$

Distances à la racine dans un arbre

Un arbre ayant une racine donnée dans un réseau stochastique nous fournit une stratégie pour atteindre sûrement cette racine à partir de tout sommet du réseau. Dans le cas où nos arcs stochastiques sont munis de longueur, nous devons indiquer comment se calculent les espérances de distances des sommets à la racine selon cette stratégie.

Supposons donc que les *st*-arcs de l'arbre $G = {}_{st}(X, S)$ soient pourvus de longueurs $l(s)$, $s \in S$.

Le système $D = (D_x, x \in X)$ d'espérances de distances des sommets de G à la racine est alors défini par le système d'équations :

$$D_{x_0} = 0; \quad \forall s \in S, \qquad D_{0(s)} = \sum_{y \in X} p_{s,y}.D_y + \bar{l}(s); \tag{E1}$$

qui admet une solution unique.

On peut résoudre le système (E1) par substitutions successives : ayant étiqueté les sommets $x_0, \ldots, x_n$ de G de telle sorte que pour tout $i \in 1, \ldots, n$ le *st*-arc de G issu de x_i possède au moins une extrémité dans $x_0, \ldots, x_{i-1}$, on peut exprimer dans (E1) (D_{x_n} en fonction de $D_{x_0}, \ldots, D_{x_{n-1}}$, puis recommencer à partir de $D_{x_{n-1}}$, et ainsi de suite jusqu'à obtenir une seule équation portant sur D_{x_1}.

Nommons $bo(x_0)$ la boucle en x_0 de $Bo(G, x_0)$ et complétons le vecteur distance $\bar{l}$ indexé sur S par $\bar{l}(bo(x_0)) = 0$. On obtient alors :

PROPOSITION 4 : *La solution D de* (E1) *peut ainsi s'écrire comme la limite de la suite de vecteurs* $D^n = (D_x^n, x \in X)$ *définie par :*

$$\left.\begin{aligned} D^0 &= 0; \\ D^{n+1} &= Sto(Bo(G, x_0)).D^n + \bar{l} \qquad pour \quad n \geqq 0. \end{aligned}\right\} \tag{E2}$$

Remarque 3 : *L'identification dans* $Bo(G, x_0)$ *entre st-arcs et sommets autorise l'écriture ci-dessus.*

Démonstration : L'équation (E2) peut se réécrire :

$(D^{n+1}-v)=Sto(Bo(G, x_0)).(D^n-v)$ où v est tel que :

$M(Bo(G, x_0)).v=\bar{1}$ (et existe conformément à la remarque 2).

Dès lors le fait que pour $n \to +\infty$, la matrice $Sto(Bo(G, x_0))^n$ converge assure le résultat. □

Remarque 4 : *La convergence de D^n définie par* (E2) *sera linéaire, c'est-à-dire qu'il existera $t \in]0,1[$ et $k \in R^+$ indépendants de n tels que :*

$$\forall n \in N \| D^n - D \| \leqq k . t^n.$$

($\|.\|$ *ici la norme est usuellement associée aux endomorphismes définis sur des espaces euclidiens.*)

Problème de la sécurité dans un 2-arbre

Soit maintenant un réseau stochastique $G={}_{st}(X, S)$, $x_0 \in X$, A la composante semi-connexe de x_0 dans G.

La signification du réseau stochastique réduit $Red(G, A)$ défini en 2 et de la notion de 2-arbre est claire. Si nous sommes situés sur un sommet x de G qui n'est pas dans A, nos chances d'atteindre x_0 sont nulles. Construire $Red(G, A)$ revient donc à fusionner tous ces sommets « inutiles » de $X-A$ en un seul (*Nil*), et la recherche d'une stratégie dans G pour atteindre x_0 se ramène alors à celle d'un 2-arbre dans $Red(G, A)$, de racines x_0 et *Nil*.

PROPOSITION 5 : *On peut extraire de l'ensemble des st-arcs du réseau stochastique $Red(G, A)$ défini en* 2, *une famille F de st-arcs induisant un réseau partiel de $Red(G, A)$ qui est un* 2-*arbre de racines x_0 et Nil.*

Démonstration : On raisonne comme pour la proposition 2. Si x est un sommet de $Red(G, A)$ différent de x_0 et *Nil*, et de degré sortant supérieur à 2, il est possible de retirer un *st*-arc issu de x de $Red(G, A)$ sans augmenter le nombre de composantes semi-connexes de ce réseau. □

Nous pouvons maintenant évoquer le calcul des probabilités d'atteindre une des racines à partir des sommets d'un 2-arbre :

Si $G={}_{st}(X, S)$ est un 2-arbre de racines x_0 et x_1, on notera $Bo(G, x_0, x_1)$ le réseau obtenu en rajoutant deux boucles en x_0 et x_1 à S. $Sto(Bo(G, x_0, x_1))$ sera dès lors une matrice de Markov : 1 sera valeur propre de multiplicité 2 de cette matrice dont toutes les autres valeurs propres seront de module <1. La convergence de $Sto(Bo(G, x_0, x))^n$ sera assurée quand $n \to +\infty$ et le vecteur $P=(P_x, x \in X)$ fournissant les probabilités d'atteindre un jour le sommet x_0 en partant de x quelconque et en suivant les arcs de G sera donné comme solution unique du système d'équations :

$$P_{x_0}=1, \qquad P_{x_1}=0,$$
$$\forall s \in S, \quad P_{0(s)}=\sum_{y \in X} P_y \, . \, p_{s,y}. \tag{E3}$$

ou encore comme limite de la suite P^n, $n \in N$, définie aisi :

$$P_{x_1}^0=0; \qquad \forall x \in X-\{x_1\}, \quad P_x^0=1;$$
$$P^{n+1}=Sto(Bo(G, x_0, x_1)) \, . \, P^n,$$

la convergence de P^n vers P étant linéaire.

Notion de longueur d'un circuit

Il est connu que, dans un réseau usuel dont les arcs sont munis de longueurs, il n'est possible de parler de systèmes de distance que si il n'existe pas dans ce réseau de circuit de longueur négative (circuit absorbant). Nous devons donc, dans le cadre d'un réseau stochastique, expliquer ce que va être la longueur d'un circuit et nous doter d'outils pour la manipulation de circuits.

Si $G=_{st}(X, S)$ est un circuit, la matrice de Markov $Sto(G)$ admet 1 comme valeur propre avec la multiplicité 1, et il existe donc un vecteur unique q indexé sur les st-arcs de G, positif ou nul et de somme des coordonnées égale à 1 et tel que : $q \, . \, Sto(G)=q$.

Si à chaque st-arc $s \in S$ correspond un vecteur distance $l(s)=(l(s, y), y \in X)$, on pose : long(G) = longueur du circuit $G=\sum_{s \in S} q_s \, . \, \bar{l}(s)$.

Remarque 5 : *Il faut comprendre les quantités $l(s)$, $s \in S$ comme étant algébriques. En fait de distances, il peut s'agir de coûts. Une longueur de circuit* peut donc éventuellement être négative.

PROPOSITION 6 : *Soient $G=_{st}(X, S)$, $x_0 \in X$ tels que :*

$$d_G^+(x_0)=0 \qquad \textit{et} \qquad \forall x \in X-\{x_0\}, \quad d_G^+(x)=1.$$

G est alors un arbres si et seulement si il n'existe pas $A \subset X$, $F \subset S$ tels que A soit stable par F et tels que $G_{A,F}$ soit un circuit (on dira aussi que G ne contient pas de circuit).

Soient $G=_{st}(X, S)$, x_0 et $x_1 \in X$, tels que :

$$d_G^+(x_0)=d_G^+(x_1)=0 \qquad \textit{et} \qquad \forall x \in X-\{x_0, x_1\}, \quad d_G^+(x)=1.$$

G est alors un 2-arbre si et seulement si il ne contient pas de circuit.

Démonstration. — Si $A \subset X$ est stable pour les st-arcs issus de ses sommets, alors A devra contenir x_0 (ou x_1). Le fait que ces deux sommets soient de degré sortant d_G^+ égal à 0, fait que A ne sera composante fortement connexe de G^* que si il est réduit à x_0 ou x_1. Réciproquement, si $A \subset X$ est un bloc terminal de G autre que celui défini par x_0 (ou éventuellement par x_1), alors il est facile de voir que A et $S_A = \{ s \in S/o(s) \in A \}$ forment un circuit de G. □

PROPOSITION 7 : *Si $G = {}_{st}(X, S)$ et un circuit et si $s \in S$, alors le réseau partiel ${}_{st}(X, S - \{ s \})$ obtenu en retirant s de S est un arbre de racine $o(s)$.*

PROPOSITION 8 : *Soit $G = {}_{st}(X, S)$ un réseau stochastique tel que pour tout $x \in X$, $d_G^+(x) \geqq 1$.*

Alors G contient forcément un circuit.

Démonstration : On peut supposer que pour tout $x \in X$, on a $d_G^+(x) = 1$; dès lors on vérifie que pour tout bloc terminal A, A et $S_A = \{ s \in S/o(s) \in A \}$ forment un circuit de G. □

PROPOSITION 9 : *Soit $G = {}_{st}(X, S)$ un circuit. La longueur $long(G)$ est alors non négative si et seulement si le système d'inéquations $D \leqq Sto(G).D + \bar{l}$ possède une solution $D = (D_x, x \in X)$.*

N.B. : Ici le vecteur $\bar{l}$ est le vecteur $\bar{l} = (\bar{l}(s), s \in S)$, la remarque (3) relative à l'identification de S et X s'applique ici.

Démonstration : Le sens « si » de cette équivalence est évident.

Réciproquement, les deux programmes linéaires :

$$(Id - Sto(G)).D \leqq \bar{l}; \qquad D \in R^{|X|}; \qquad z_{\max} = 0. \tag{P1}$$

$$q.(Id - Sto(G)) = 0; \qquad q \geqq 0 \text{ est dans } R^{||S|}; \qquad z_{\min} = q.l. \tag{P2}$$

sont duaux. G étant un circuit, (P2) possède une solution réalisable, et l'absence de solution pour (P1) impliquera donc que la borne inférieure du $z_{\min}$ dans (P2) soit $-\infty$, soit aussi le fait que $long(G)$ soit négatif. □

6. LE PROBLÈME DE LA SÉCURITÉ POUR DES RÉSEAUX STOCHASTIQUES EXHAUSTIFS

Nous entendonc ici par réseau exhaustif un réseau dont on puisse envisager de fournir explicitement tous les sommets, et cela par opposition à un réseau d'états, dont les sommets vont correspondre aux états possibles pour un robot, en nombre extrêmement grand, et dont on ne pourra dès lors envisager la définition que sous une forme implicite.

Si $G={}_{st}(X, S)$ est un réseau stochastique, si $x_0 \in X$, et si σ définit une stratégie vers x_0 dans G, nous poserons $\sigma(x)=st$-arc d'origine x associé à σ.

Dans tout ce qui suit nous identifierons la notion de stratégie vers x_0 et celle de famille F de st-arcs telle que pour tout $x \in X-x_0$, il existe au plus un st-arc $s \in \mathrm{F}$ tel que $o(s)=x$.

Posons A = composante semi-connexe de x_0 dans G. Il est clair que le problème de la sécurité concerne uniquement les sommets de A et que sa solution sera la même dans G et dans $Red(G, A)$. Notons alors $(\mathrm{E3})_k$ le programme linéaire suivant :

$$\begin{gathered} P=(P_x,\ x \in X) \text{ est } \geqq 0; \\ P_{x_0}=1; \\ \forall s \in S, \quad p_{o(s)} \geqq \sum_{y \in X} p_{s,y} \,.\, P_y; \\ z_{\min}=k \,.\, P; \end{gathered} \qquad (\mathrm{E3})_k$$

où $k=(k_x,\ x \in X)$ est un vecteur quelconque indexé sur x.

Si P est une solution réalisable de $(\mathrm{E3})_k$ (il en existe clairement), nous noterons $S(P) \subset S$ la famille des st-arcs de G dont l'origine est dans $A-\{x_0\}$ et qui sont associés à des contraintes de $(\mathrm{E3})_k$ serrées pour P, $S_A(P)$ la famille de st-arcs de $Red(G, A)$ définie par :

$$S_A(P)=\{r_{\mathrm{A}}(s),\ s \in S(P)\}.$$

Explication : Clairement, nous attendons d'un vecteur $P=(P_x,\ x \in X)$ solution du problème de la sécurité dans G qu'il soit solution optimale de $(\mathrm{E3})_k$ pour un certain vecteur k bien choisi. Le théorème suivant nous indique que le choix de k est en fait sans importance, et nous montre comment la stratégie optimale se déduit alors de la famille de St-arcs $S_A(P)$ définie ci-dessus :

THÉORÈME I : *Soit F une solution réalisable de* $(\mathrm{E3})_0$. *Les deux assertions suivantes sont alors équivalentes :*

(1) *Pour tout vecteur k à coordonnées strictement positives, P est solution optimale de* $(\mathrm{E3})_k$;

(2) *P_x est nul pour tout $x \in X-A$ et de plus il est possible d'extraire un 2-arbre de $S_A(P)$ vers x_0 et Nil.*

Démonstration :

$(2) \Rightarrow (1)$ Soit donc P solution réalisable de $(\mathrm{E3})_k$ satisfaisant (2). Il nous suffit de vérifier qu'il ne peut exister P', solution réalisable de $(\mathrm{E3})_0$, et $x \in X$ tel que $P'_x < P_x$. Supposons l'inverse et posons $B = \{x \in X / P^{\pi}_x - P_x$ soit minimal$\}$. On aura alors que $B \subset A$ et aussi que B est stable par ceux des arcs de $S(P)$ qui ont leur origine en B. Cela impliquera encore que B n'est pas dans la composante semi-connexe de x_0 dans G, soit que $B \not\subset A$ et donc une contradiction.

$(1) \Rightarrow (2)$ Soit donc P qui est optimal pour $(\mathrm{E3})_I$ où I est le vecteur à coordonnées toutes égales à 1. Il est clair que pour $x \notin A$, $P_x = 0$. Si $S_A(P)$ ne définit pas un 2-arbre de $Red(G, A)$, c'est le réseau partiel défini par $S_A(P)$ sur $A \cup \{Nil\}$ contient un bloc terminal B qui ne contient ni x_0 ni *Nil*. Mais le fait qu'aucun *st*-arc de $S(P)$ ne puisse simultanément posséder son origine en B et une extrémité hors de B implique qu'il sera possible de trouver un petit nombre positif δ tel que P' défini par : $P'_x = P_x$ si $x \notin B$ et $P'_x = P_x - \delta$ si $x \in B$ sera solution réalisable de $(\mathrm{E3})_I$ et donc contredira l'optimalité de P. □

Le vecteur P solution optimale de $(\mathrm{E3})_I$ sera dès lors nommé vecteur de meilleures probabilités d'atteindre x_0 dans G. Plaçons-nous dès lors dans le cas où $G = Red(G, A)$, c'est-à-dire dans le cas où la composante semi-connexe A de x_0 contient tout X sauf exactement 1 sommet que l'on dénomme *Nil*, et notons T l'opérateur défini par :

$$T(P)_{x_0} = 1; \qquad T(P)_{Nil} = 0;$$
$$\forall x \in X - \{x_0, Nil\}, \quad T(P)_x = \sup_{s \in S / o(s) = x} \sum_{y \in X} p_{s,y} \cdot P_y.$$

T transforme donc un vecteur P indexé sur X en un vecteur $T(P)$, lui aussi indexé sur X.

Explication : Ce que le théorème suivant va montrer, c'est comment nous pouvons déduire de cet opérateur T un procédé de calcul par approximation du vecteur de meilleures probabilités d'atteindre x_0, plus rapide que celui consistant à résoudre un des programmes linéaires $(\mathrm{E3})_k$. Ce résultat nous sera particulièrement utile quand nous travaillerons par la suite sur de très grands réseaux d'états.

THÉORÈME II : *Soit $G =_{st} (X, S)$, $x_0 \in X$, A la composante semi-connexe de x_0.*

On suppose que G est sans circuit et que $G = Red(G, A)$.

Le vecteur, meilleures probabilités vers x_0 dans G s'écrit alors comme limite de la suite P^n, $n \in N$ définie par :

$$P^0_{Nil}=0; \qquad P^0_x=1 \quad \textit{pour tout} \quad x \in X-Nil;$$
$$P^{n+1}=T(P^n) \qquad \textit{pour} \quad n \geqq 0.$$

Démonstration : On remarque que T envoie le domaine réalisable de $(E3)_0$ dans lui-même, que T est croissant [si $P' \leqq P''$ alors $T(P') \leqq T(P'')$], et que $P^0 \geqq P^1$. On en déduit que la suite P_n converge et que sa limite Q est solution réalisable de $(E3)_0$. On constate encore que pour tout $x \in X-\{Nil, x_0\}$, il existe $s \in S(Q)$ tel que $x=o(s)$. Dès lors le fait que G soit sans circuit et la proposition 6 permettent de conclure que l'on peut extraire un 2-arbre vers x_0 et *Nil* de $S(Q)$. □

Remarque 6 : *Sur la vitesse de convergence de la suite P^n, $n \in N$:*

Il n'est pas clair (on peut cependant le conjecturer) que la convergence de P^n, $n \in N$, défini ci-dessus soit linéaire. Posons :

$$S^n(P^n)=\{s \in S/o(s) \in X-\{x_0, Nil\}\} \qquad \textit{et} \qquad P^{n+1}_{o(s)}=\sum_{y \in X} P_{s,\,y}\,.\,P^n_y$$

Il est facile de voir que pour tout $x \in X-\{x_0, Nil\}$, il existe $s \in S^n(P^n)$ tel que $o(s)=x$ et donc sur l'on peut extraire un 2-arbre F_n vers x_0 et Nil de $S^n(P^n)$ (puisque G' est sans circuit). F'_n étant F_n complété de deux boucles en Nil et x_0, et G'_n étant le réseau stochastique $G'_n={}_{st}(X, F'_n)$ on voit que $P^{n+1}=Sto(G'_n)\,.\,P^n$.

S'il est possible d'affirmer l'existence d'un certain 2-arbre F vers x_0 et Nil inclus dans tous les $S^n(P^n)$ à partir d'un certain n_0 assez grand, alors la linéarité de la convergence de la suite P^n s'ensuivra.

7. PROBLÈME DE LA SÉCURITÉ POUR DE TRÈS GRANDS RÉSEAUX D'ÉTATS

Nous nous plaçons ici dans l'hypothèse où le réseau $G={}_{st}(X, S)$ est défini de façon implicite et où il n'est ni question de l'exhiber entièrement, ni même de construire la composante semi-connexe de l'objectif x_0 dans G. (Par exemple un réseau d'états du type de celui associé à un robot STRIPS [9].) Ce que l'on désire dès lors est de fournir une bonne approximation de la meilleure probabilité d'atteindre x_0 à partir d'un sommet x donné et de la décision à prendre en conséquence (*voir* [8, 9]).

Nous supposons donc donné $G={}_{st}(X, S)$, un objectif $x_0 \in X$, un état initial y_0, une fonction d'évaluation f qui à tout $x \in X$ associe une borne supérieure de la meilleure probabilité d'atteindre x_0 à partir de x.

L'algorithme ci-dessous noté SECU va résoudre le problème de la sécurité dans G en réalisant une exploration en longueur du réseau G à partir de x_0 et en reproduisant le mécanisme d'élimination de sommets de l'algorithme A^* [8].

SECU;
Fermé := φ; Ouvert := $\{y_0\}$;
(Fermé et Ouvert sont des listes d'éléments de X)
Non Stop;
Tant que Non Stop et Ouvert $\neq \varphi$ faire
Choisir le premier élément y de Ouvert;
Retirer y de Ouvert et placer y dans Fermé;
Placer tout y' n'appartenant pas à Ouvert $\cup$ Fermé et extrémité d'un certain $s \in S$ d'origine y, dans Ouvert, de telle sorte que les éléments de Ouvert demeurent rangés par valeurs de f décroissantes;
Si pour tou $y' \in$ ouvert, $f(y')=0$, alors poser Stop;
Résoudre le programme suivant, d'inconnu
$P=(P_x,\ x \in \mathrm{OF} = \text{Ouvert} \cup \text{Fermé})$:

$$\begin{gathered} P \geqq 0; \qquad \forall x \in \text{Ouvert}, \quad P_x = f(x): \\ \forall s \in S/o(s) \in \text{Fermé}, \quad P_{o(s)} \geqq \sum_{y \in \mathrm{OF}} P_{s,y} \cdot P_y. \\ z_{\min} = \sum_{y \in \mathrm{OF}} P_y. \end{gathered} \tag{E4}$$

THÉORÈME III : *L'algorithme SECU fournit* (*dès lors que X est supposé fini*) *la meilleure probabilité d'atteindre x_0 à partir de y_0.*

Démonstration : Ce que nous avons en fait à vérifier est que la dernière solution calculée P du programme (E4) fournit la restriction à Ouvert $\cup$ Fermé du vecteur meilleures probabilités vers x_0 dans G. Notons A la composante semi-connexe de x_0 et B l'ensemble des sommets x de G tels qu'il existe dans G^* un chemin de y_0 vers x. Au moment où l'algorithme SECU s'arrête, OF = Ouvert $\cup$ Fermé contient $B \cap A$ et Ouvert $\cap A = \varphi$ (parce que f fournit pour tout x une borne supérieure de la meilleure probabilité d'atteindre x_0 depuis x). Si l'on pose : $F=\{s \in S/o(s) \in \text{Fermé}\}$, on constate que le problème de la sécurité depuis les sommets de Fermé vers x_0 est le même dans G et dans le réseau partiel ${}_{st}(\mathrm{OF}, \mathrm{F})$. Le théorème I nous indique alors que (E4) fournit très précisément la solution dans ce dernier contexte. □

Remarque 7 : *Quelle condition doit-on respecter pour la construction de la fonction d'évaluation f ?*

Du fait même du théorème I, cette condition s'écrit simplement (comme condition suffisante) :

Toute fonction f de X dans R, à valeurs positives telle que $f(x_0)=1$ *et que* $\forall s \in S, f(o(s)) > \sum_{y \in X} P_{s,y} f(y)$ *pourra être utilisée.*

Remarque 8 : *Jusqu'à quel point SECU nous dispense-t-elle d'explorer G tout entier? Dans tous les cas, il faudra visiter tout sommet de la composante semi-connexe vers* x_0 *qui est atteignable à partir de* x_0 *(cela peut faire beaucoup de sommets), et pour les autres sommets, nous dépendrons étroitement de la capacité de la fonction d'évaluation f à reconnaître quand est-ce qu'il y a impossibilité à atteindre* x_0 *depuis un sommet donné. Parce que OF risque donc, malgré le mécanisme d'élimination de devenir grand, il sera souhaitable de faire en sorte que les st-arcs de G n'aient qu'un nombre réduit d'extrémités et que Stop puisse intervenir avant que Ouvert ne contienne que des sommets d'évaluation* 0.

Dans l'hypothèse ou G reste sans circuit, nous pouvons exploiter le théorème II et réécrire SECU en évitant à chaque étape de l'expansion la coûteuse résolution du programme (E4). *Nous obtenons :*

SECU1
Fermé := φ; Ouvert := $\{y_0\}$; P est défini sur OF := Fermé $\cup$ Ouvert et
$P_{y_0} := f(y_0)$;
Tant que Non Stop et Ouvert $\neq \varphi$ faire
$y_a = 1^{er}$ élément de Ouvert; Fermé' := Fermé $\cup \{y_a\}$;
Ouvert' := Ouvert $- \{y_a\} \cup \{y / \exists s$ d'origine y_a et d'extrémité $y\}$;
(Ouvert' ordonné par valeurs décroissantes de f);
OF' = Ouvert' $\cup$ Fermé';
Pour tout $x \in$ OF, $P_x^0 := P_x$; pour tout $x \in$ OF'-OF,
$P_x^0 := f(x)$;
Soit T l'opérateur qui transforme un vecteur Q indexé sur OF'
en un autre vecteur $T(Q)$ indexé sur OF' et défini par :

$$\text{si } x \in \text{Ouvert' alors } T(Q)_x = Q_x,$$
$$\text{sinon } T(Q)_x = \sup_{s \in S / o(s) = x} \sum_{y \in OF'} P_{s,y} \cdot Q_y;$$

Choisir $n_0 \in N$; Poser $P := T^{n_0}(P^0)$; Fermé := Fermé';
Ouvert := Ouvert';
Si pour tout $y \in$ Ouvert on a $f(y)=0$ alors Stop; Faire OF := OF';

Demeure alors ouvert le problème du choix à chaque itération de n_0; les remarques (5) et (4) antérieures relatives à la convergence de T^n pour $n \to \infty$ laissent prévoir que n_0 pourra être choisi relativement petit.

L'utilisation enfin qui est faite de la fonction d'évaluation f dans le choix du premier élément de Ouvert pose question. Dans l'hypothèse où l'on sait que l'on aura presque certainement à interrompre l'exécution de la procédure SECU avant d'avoir obtenu Ouvert $=\varphi$, on est conduit à vouloir classer les éléments de Ouvert selon un ordre qui tient à la fois compte de f et de la probabilité que l'on a de parvenir sur un certain sommet de Ouvert, dès lors que l'on se déplace depuis chaque sommet de Fermé, selon une stratégie σ_P associée au calcul de P. Cela signifie que, si $P=T^{n_0}(P^0)$ est calculé en cours d'itération de SECU1 décrit ci-dessus, il nous faut alors à chaque $x \in$ Fermé, associer $\sigma(x)$ défini par;

$$\sigma(x) := \{ s \in S / o(s) = x \} \qquad \text{et} \qquad P_x = \sum_{y \in \mathrm{OF}'} P_{s,y} \,.\, P_y^{n_0-1}.$$

Notant $G_0 = {}_{st}(\mathrm{OF}', S_\sigma)$ le réseau stochastique obtenu sur OF' en complétant les st-arcs $\sigma(x)$, $x \in$ Fermé' par les boucles sur les éléments de Ouvert', nous devons calculer $H = H^0 \,.\, Sto(G_\sigma)^{m_0}$ où m_0 est un entier bien choisi et où H^0 est le vecteur défini par :

$$H^0_{y_0} = 1; \qquad H^0_x = 0 \quad \text{si } x \neq y_0.$$

La priorité dans Ouvert' sera alors définie par rapport à la maximisation d'une certaine quantité $\Phi(H_x, f(x))$, Φ étant une fonction croissante par rapport à ses deux arguments. Au moment où la procédure SECU s'arrêtera, σ courant fournira la stratégie à appliquer depuis y_0.

8. PROBLÈME DE LA DISTANCE POUR LES RÉSEAUX EXHAUSTIFS

Soit maintenant $G = {}_{st}(X, S)$, $x_0 \in X$; nous supposons que G est semi-connexe vers x_0 et que tout st-arc de G est muni d'une longueur $l(s) = (l(s, y), y \in X)$.

Nous dirons d'un circuit C de G qu'il est absorbant si $long(C)$ est négatif.

Nous définissons le programme linéaire suivant, noté $(E5)_k$, où $k = (k_x, x \in X)$ est un vecteur indexé sur X :

$$z = (z_z, x \in X) \geqq 0; \qquad z_{x_0} = 0;$$

$$\forall s \in S, \quad z_{0(s)} \leqq \sum_{y \in X} P_{s,\,y} \,.\, z_y + \bar{l}(s); \tag{E5$_k$}$$

$$Z_{\max} = k \,.\, z.$$

Si z est une solution réalisable de $(E5)_0$, nous dirons que z est un bon potentiel sur G si la famille de st-arcs $S_z = \{ s \in S / o(s) \neq x_0$ et $z_s = \sum_{y \in X} p_{s,y} \,.\, z_y + \bar{l}(s) \}$ contient un arbre sur X de racine x_0.

Explication : Clairement, nous attendons d'un vecteur « espérances de distances » des sommets de G à x_0 qu'il soit solution optimale de $(E5)_k$ pour un certain k. Le théorème ci-dessous nous indique que le choix de k importe peu, et que, à l'instance de ce qui se passe pour les réseaux ordinaires, l'existence d'un tel vecteur est liée à l'absence dans le réseau G de circuits absorbants. La notion de bon potentiel vient alors fournir la réponse à la question de la stratégie associée à un vecteur distance dès lors qu'il existe.

THÉORÈME IV : *Avec les notions ci-dessus, les quatre assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) : *Il existe un bon potentiel sur G.*

(2) : *Il existe $z=(z_x, x \in X)$ qui est solution optimale de tous les programmes $(E5)_k$, k strictement positif.*

(3) : $(E5)_0$ *possède une solution réalisable.*

(4) : *G ne contient pas de circuit absorbant.*

N.B. : Dans le cas où G est donc sans circuit absorbant, la solution optimale de $(E5)_I$, où I est le vecteur dont toutes les coordonnées sont égales à 1 sera nommé vecteur des distances dans G vers x_0.

Démonstration :

$(1) \Rightarrow (2)$. Soit donc z un bon potentiel de G et k un vecteur indexé sur X et à coordonnées strictement positives. Supposons l'existence d'une solution réalisable z' de $(E\,5)_k$, telle que $k.(z'-z)>0$ et posons : $A=\{x \in X / z'_x - z_x$ est maximal$\}$. On voit aisément que si $x \in A$ et si s tel que $o(s)=x$ est dans S_z, alors les extrémités de s sont dans A. Il est d'autre part clair que $x_0 \notin A$. Dès lors la stabilité de A par S_z interdira que l'on puisse extraire de S_0 un arbre de racine x_0 sur X.

$(2) \Rightarrow (3)$. Évident.

$(3) \Rightarrow (4)$. Soit z une solution réalisable de $(E\,5)_0$; supposons que $A \subset X$ et $F \subset S$ définissent un circuit absordant $G_{A,\,F}$ de G. Soit alors un vecteur q indexé sur F, positif et de somme de coordonnées égale à 1 et tel que $q.Sto(G_{A,\,F})=q$. On voit que :

$$\sum_{s \in F} q_s . z_{0\,(s)} \leqq \sum_{s \in F} \sum_{y \in A} p_{s,\,y} . z_y . q_s + \sum_{s \in F} q_s . \bar{l}(s).$$

Le premier terme du membre de droite dans cette inégalité s'écrivant aussi :

$$\sum_{y \in A} \sum_{s \in F} p_{s,\,y} . z_y . q_s = \sum_{y \in A} z_y . q_{F\,(y)} = \sum_{s \in F} q_s . z_{0\,(s)}.$$

$F(y)$ désignant pour tout $y \in A$, l'unique *st*-arc d'origine y dans F.

Il s'ensuit que $\sum_{s \in F} q_s . \bar{l}(s)$ est positif ou nul et donc que $G_{A, F}$ n'est pas absorbant.

(4) $\Rightarrow$ (1). On a vu en 5 qu'à tout arbre F de G de racine x_0 correspond un vecteur D de distance à la racine, solution unique du système d'équations (E 1). D est un vecteur $D=(D_x \in X)$ et on posera $D=D(F)$. Prouvons alors le lemme suivant :

LEMME : *Soit F un arbre de G, et $z=(z_x, x \in X)$ et $s_0 \in F$ tels que :*

$$\forall s \in F - \{s_0\}, \quad z_{o(s)} = \sum_{y \in X} p_{s, y} . z_y + \bar{l}(s); \qquad z_{x_0} = 0;$$

$$z_{o(s_0)} > \sum_{y \in X} P_{s_0, y} . z_y + \bar{l}(s_0).$$

Alors pour tout $x \in X$ on a : $z_x \geqq D(F)_x$.

Démonstration du lemme : Supposons l'inverse et posons :

$$A = \{ x \in X / z_x \text{ tels que } D(F)_x \text{ est minimal} \}.$$

A nouveau nous vérifions que A est stable par F et que $x_0 \in A$, contredisant ainsi le fait que F définisse un arbre de racine x_0. $\square$

Nous concluons alors : soit F un arbre de racine x_0 sur X (il en existe par la proposition 2). Si $D(F)$ est un bon potentiel sur G nous concluons, sinon nous considérons $s_0 \in F$ tel que :

$$D(F_{o(s_0)}) > \sum_{y \in X} p_{s_0, y} . D(F)_y + \bar{l}(s_0), \ (\alpha)$$

et nous posons

$$F' = F - \{ F(o(s_0)) \} \cup \{ s_0 \}.$$

Si F' est un arbre, nous recommençons en posant $F := F'$. Le lemme nous indique que : $\sum_{x \in X} D(F)_x > \sum_{x \in X} D(F')_x$ ce qui indique que le processus doit s'arrêter, soit parce que nous obtenons que $D(F)$ est un bon potentiel, soit parce que F' n'est pas un arbre. F' contient alors un circuit $G_{A, F''}$, $A \subset X$, $F'' \subset F'$ (proposition 6).

Soit q un vecteur probabilité indexé sur F'' tel que $q . Sto(G_{A, F}) = q$. Les égalités du système (E 1) pour F et $D(F)$ combinées avec l'inégalité (α) relative à s_0 permettent d'écrire :

$$\sum_{s \in F''} q_s . D(F)_{o(s)} > \sum_{s \in F''} \sum_{y \in X} q_s . p_{s,\,y} . D(F)_y + long\ (G_{A,\,F''}).$$

Le membre de gauche et le premier terme du membre de droite de cette inégalité étant en fait égaux, on en déduit que *long* $(G_{A,\,F''})$ est <0 et donc que $G_{A,\,F''}$ est un circuit absorbant. □

Un résultat de convergence

Dans le cas où G est sans circuit négatif ou nul, nous pouvons obtenir pour le problème de la distance un résultat analogue à celui du théorème II et qui nous fournit un outil de calcul rapide pour une approximation du vecteur des distances vers x_0. Ce résultat s'avérera particulièrement utile quand il s'agira de travailler sur de très grands réseaux d'états.

Notons à présent R l'opérateur suivant, qui à $Q \in R^{|X|}$ associe $R(Q) \in R^{|X|}$ ainsi défini :

$$R(Q)_{x_0} = 0;$$

si

$$x \neq x_0$$

alors

$$R(Q)_x = \operatorname*{Inf}_{s \in S/o(s) = x} \left(\sum_{y \in X} P_{s,\,y} . Q_y + \bar{l}(s) \right)$$

et notons D^0 le vecteur de $R^{|X|}$ nul partout.

THÉORÈME V : *Si* $G =_{st} (X, S)$ *ne possède pas de circuit de longueur négative ou nulle, le vecteur des distances dans G vers* x_0 *s'écrit comme la limite de la suite* D^n *définie par* $D^n = R^n(D^0)$.

Démonstration: On voit que la suite D^n est croissante et entièrement inclue dans le domaine réalisable de $(E\,5)_0$. Ce domaine étant borné (conséquence immédiate du théorème I), D^n converge pour $n \to +\infty$. Soit D la limite de D^n pour $n \to +\infty$. D'après le théorème IV, il nous suffit de prouver que S_D contient un arbre de racine x_0. Il est clair que pour tout $x \in X - x_0$, il existe $s \in S_D$ tel que $o(s) = x$. Dès lors (proposition 6), il va exister $A \subset X$, $F \subset S_D$ induisant un circuit $G_{A,\,F}$ de G, ou bien F formera un arbre de racine x_0. Le deuxième cas fournira le résultat. Dans le premier cas, il suffira d'utiliser le vecteur probabilité q indexé sur F tel que $q.Sto(G_{A,\ F})=q$ et d'écrire :

$$\sum_{s\in F} q_s.D_s=\sum_{s\in F}\sum_{y\in Y} p_{s,\ y}.q_s.D_y+long\ (G_{A,\ F})$$

$$=\text{encore}\ \sum_{y\in A} q_{F(y)}.D_y+long\ (G_{A,\ F})$$

$$=\sum_{s\in F} q_s.D_s+long\ (G_{A,\ F})$$

pour déduire que $G_{A,\ F}$ est de longueur nulle et donc une contradiction sur notre hypothèse. □

Avant de passer aux problèmes de la distance pour des réseaux d'états, vérifions rapidement que les fameux algorithmes de Bellman (pour les graphes sans circuits) et de Dijkstra (pour les systèmes de distances positives), peuvent se reproduire dans le cadre des réseaux stochastiques.

Un algorithme « de Bellman » (*voir* [5])

Supposons le réseau G^* sans circuit. L'algorithme suivant DIST 2 fournit alor le vecteur des distances vers x_0 dans G :

DIST 2;
$D_{x_0}=0$; $A:=\{x_0\}$;
Tant que $A\neq X$ faire
  choisir $x\in X-A$ tel que pour tout st-arc s d'origine x le support de s est dans A;
  Poser $A:=A\cup\{x\}$;
  Poser $D_x=\inf_{s\in S/o(s)=x}\ \sum_{y\in A-\{x\}} p_{s,\ y}.D_y+\bar{l}(s)$;
La vérification se fait par récurrence sur $|X|$.

REMARQUE 9 : *On retrouve ici les formules caractéristiques de la programmation dynamique en environnement aléatoire et horizon fini* (Voir [1], [9].)

Une version primale-duale, « à la Dijsktra » (*Voir* [4])

On suppose à présent que toutes les quantités $\bar{l}(s)$, $s\in S$ sont positives ou nulles.

Soit D une solution réalisable de $(E\,5)_I$; nous notons $(E\,5)^D$ le programme suivant :

$$\begin{gathered} z\in R^{|X|};\qquad z_{x_0}=0;\qquad \forall x\in X,\quad z_x\leqq 1;\\ \forall s\in S_D,\quad z_{0(s)}\leqq\sum_{y\in X} p_{s,\ y}.z_y;\\ z_{\max}=I.z=\sum_{x\in X} z_x. \end{gathered}\qquad (E\,5)^D$$

Dans le cas où la solution optimale $\bar{z}(D)$ de $(E\,5)^D$ est non nulle, posons encore :

$t(D)=\sup t/D+t.\bar{z}(D)$ est solution réalisable de $(E\,5)_0$.

Soit alors DIST 3 la procédure :

DIST 3;
$D:=0$;
Tant que $\bar{z}(D)=0$ faire $D:=D+t(D).\bar{z}(D)$;

THÉORÈME VI : *La procédure DIST 3 fournit le vecteur des distances vers x_0 dans G.*

Démonstration : D est solution réalisable de $(E\,5)_I$. Si S_D est un arbre de racine x_0, D est alors optimale de $(E\,5)_I$ (théorème IV) et donc $\bar{z}(D)=0$.

Réciproquement, si S_D n'est pas un arbre de racine x_0, alors nous notons A la composante semi-connexe de x_0 dans $_{st}(X, S_D)$ et nous constatons qu'une solution réalisable de $(E\,5)^D$ est fournie par $z_x=0$ si $x\in A$ et $z_x=1$ si $x\notin A$.

L'implication $\bar{z}(D)=0 \Rightarrow D$ est solution optimale de $(E\,5)_I$ s'ensuit ainsi que le résultat.

9. LE PROBLÈME DE LA DISTANCE POUR LES TRÈS GRANDS RÉSEAUX D'ÉTATS

A nouveau nous considérons $G={}_{st}(X, S)$ défini de façon implicite, $|X|$ étant très grand. Nous supposons que G^* est semi-connexe vers un sommet objectif x_0, que à chaque *st*-arc $s\in S$, est associé un vecteur longueur $l(s)=(l(s, y), y\in supp(s))$, et que pour chaque $x\in X$, nous disposons d'une borne inférieure $h(x)$ de l'espérance de distance vers x_0 depuis x dans G. Un sommet de départ y_0 est imposé.

Nous définissons alors la procédure DISTAN comme suit :

DISTAN;
Fermé : $=\varphi$; Ouvert : $=\{y_0\}$; OF : = Fermé $\cup$ Ouvert;
$\forall x\in$ OF, $D_x=h(x)$; Non Stop;
Tant que Non Stop et (Ouvert $\neq\varphi$) faire :
  y : = premier élément dans Ouvert;
  Fermé' : = Fermé $\cup\{y\}$; Ouvert' : = Ouvert $-\{y\}\cup\{y'\notin$ OF et contenus dans le support d'au moins un *st*-arc d'origine y et non contenus dans Fermé$\}$
  OF' : = Ouvert' $\cup$ Fermé';
  Calculer la solution optimale z^0 du programme linéaire (E 6) suivant :

$$\begin{aligned}
&z \text{ est indexé sur OF'}; \quad z_{x_0}:=0;\\
&\forall x\in \text{Ouvert'}, \quad z_x:=h(x);\\
&\forall s/o(s)\in \text{Fermé}, \quad z_{o(s)}\leqq \sum_{y'\in \text{OF'}} P_{s,\,y'}.z_{y'}+\bar{l}(s);\\
&Z_{\max}=\sum_{x\in \text{OF'}} z_x.
\end{aligned}\qquad (E\,6)$$

Poser : $\forall x \in \mathrm{OF}'$, $D_x := z_x^0$.
OF : OF'; Fermé : = Fermé'; Ouvert : = Ouvert'; Mise à jour de Stop;

Explication : De même que SECU, DISTAN reproduit les mécanismes d'exploration en largeur d'abord et d'élimination de sommets à l'aide de la fonction d'évaluation h de l'algorithme A^* [et de même que pour SECU, on pourra songer à appliquer le théorème V pour une résolution approchée du programme (E 6)].

THÉORÈME VII : *Dans l'hypothèse où G est sans circuit absorbant et où la mise à jour de Stop est neutre, l'algorithme* (E 6) *ci-dessus fournit la distance de y_0 à x_0 dans G.*

Démonstration : Notons B l'ensemble des sommets x de G tels qu'il existe un chemin dans G^* de y_0 vers x. Quand DISTAN s'arrête, OF est en fait égal à B et aussi à Fermé. Si $F = \{s \in S / o(s) \in \mathrm{OF}\}$, chercher la distance de y_0 à x_0 dans G est en fait équivalent à chercher cette distance dans ${}_{st}(B, F) = {}_{st}(OF, F)$. Le théorème IV nous indique alors que (E 6) fournit précisément cette distance. □

Pratiquement, Stop sera mis à « vrai » dans la mesure où la progression de D_{y_0} (qui croît à chaque itération) sera jugée suffisamment lente. On aura bien sûr intérêt à faire en sorte que les *st*-arcs de G ne possède qu'un nombre limité d'extrémités.

REMARQUE 10 : *Quelle condition doit-on chercher à réaliser au cours de la construction de h?*

Du fait du théorème IV, une telle condition s'écrit simplement : Toute fonction h de X dans R telle que $h(x_0)=0$ et que $\forall s \in S$, $h(o(s)) \leqq \sum_{y \in X} P_{s,\,y} h(y) + \bar{l}(s)$ pourra être utilisée.

Supposons à présent que G soit sans circuit de longueur négative ou nulle et pour tout z^0 apparaissant comme solution optimale de (E 6) et tout $x \in$ Fermé, choisissons $\sigma(z^0, x) \in S$ d'origine x et tel que la contrainte de (E 6) associée à $\sigma(z^0, x)$ soit serrée pour z^0 (induise une égalité). Notons $S_{z^0} \in S$ la famille des *st-arcs* $\{\sigma(z^0, x),\ x \in \text{Fermé}'\}$ et G_{z^0} le réseau stochatique induit sur OF par S_{z^0} et les boucles sur les éléments de Ouvert'. On vérifie que l'absence de circuit de longueur négative ou nulle dans G implique que G_{z^0} est sans circuit et que ses blocs terminaux sont exactement les sommets de Ouvert'.

Dès lors, on peut à l'issue du calcul de z^0, calculer $Q = I_{y_0} . Ste(G_{z^0})^m$ où m est un entier bien choisi et où I_{y_0} est le vecteur probabilité indexé sur OF' et dont la coordonnée en y_0 vaut 1, et choisir à l'itération suivante le premier élément de Ouvert comme celui qui minimise une certaine quantité $\Phi(h(x), Q_x)$ où Φ est une fonction croissante en $h(x)$ et décroissante en Q_x.

On peut d'autre part songer à appliquer le théorème V en vue de se dispenser à chaque itération de résoudre effectivement le programme (E 6) : Soit en effet R l'opérateur qui à $z \in R^{|OF'|}$ défini par :

si $x \in$ Ouvert', $R(z)_x = h(x)$;
si $x \in$ Fermé', $R(z)_x = \underset{s \in S/o(s)=x}{\text{Sup}} \left(\sum_{y \in OF'} p_{s,y} \cdot z_y + \bar{l}(s) \right)$.

Faisant abstraction du programme (E 6) on pourra poser, comme forme de remise à jour du vecteur D indexé sur OF dans DISTAN :

$D^{\text{aux}} := D$ complété sur OF'-OF par $D_x^{aux} = h(x)$;
$D := R^n(D^{\text{aux}})$ où n est un entier bien choisi;
OF : = OF';

Dans ce qui précède et qui concerne la construction du vecteur Q indexé sur Ouvert et le choix d'un bon premier élément dans Ouvert, le choix pour tout $x \in$ Fermé de *st*-arc $\sigma(x)$ s'effectuera à partir de la dernière itération interne au calcul de D et d'un *st*-arc s d'origine x et tel que :

$$D_x = \sum_{y \in \text{OF}'} p_{s,y} \cdot R^{n-1}(D^{\text{aux}})_y + \bar{l}(s).$$

Il est à noter dès lors que l'on ne sera plus parfaitement sûr que la famille de *st*-arc $F = \{\sigma(x), x \in \text{Fermé}'\}$, soit sans circuit, ce qui pourra avoir pour effet de déformer l'information fournie par le vecteur $Q = I_{y_0} \cdot Sto(G_{OF', F_0})^m$ où F_0 est F auquel on a rajouté toutes les boucles sur les sommets de Ouvert'. □

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Beckmann, *Dynamic Programming of Economic Decision*, Springer-Verlag, 1968.
2. P. Chrétienne et R. Faure, *Processus stochastique, leurs graphes et usages*, Gauthier-Villars, Paris.
3. G. Dantzig, L. Fort et D. Fulkerson, *A Primal Dual Algorithm for Linear Programs, Linear equalities and related systems*, Princeton Univ. Press, 1956, p. 171-181.
4. E. Dijsktra, *A Note on two Problems in Connection with Graphs*, Numerische Mathematik I, 1959, p. 269-271.
5. R. Faure, C. Roucairol et P. Tolla, *Chemins, flots et ordonnancements*, Gauthier-Villars, Paris.
6. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications*, Wiley International Edition.
7. R. Howard, *Dynamic Programming and Motion Processes*, M.I.T. Press, Cambridge-mass, 1960.

8. J. Laurière, *Intelligence Artificielle*. Eyrolles, 1987.
9. N. Nillsson, *Problem Solving Method in I.A.*, MacGraw-Hill, 1971.
10. C. Papadimitriou et K. Steiglitz, *Combinatorial Optimization*, Prentice Hall Ed., 1982.
11. B. Roy, *Algèbre et graphes*, Dunod, Paris.
12. M. Sakarovitch, *Chemins, flots et ordonnancements dans les réseaux*, Hermann, Paris, 1984.