RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

R. BELLAMINE
J. PELLAUMAIL

Opérateurs positifs et probabilités stationnaires

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 23, n° 3 (1989), p. 269-282

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1989__23_3_269_0>

Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 23, n° 3, 1989, p. 269 à 282)

OPÉRATEURS POSITIFS ET PROBABILITÉS STATIONNAIRES (*)

par R. BELLAMINE (1) et J. PELLAUMAIL (1)

Résumé. — *On donne un cadre général pour lequel le calcul des probabilités stationnaires d'un réseau de files d'attente ne fait intervenir que des opérateurs positifs. Ce cadre est notamment adapté à l'étude d'une file à capacité limitée, munie d'un buffer, ou d'une file $PH/M|r$.*

Mots clés : Opérateur positif; probabilité stationnaire; file d'attente; M-matrice.

Abstract. — *An algorithm is given to compute steady-state probabilities for some queueing networks: in this algorithm, only positive operators are needed. This algorithm is valuable to study a queue with buffer and to study the queueing system $PH/M/r$.*

Keywords : Positive matrix; steady-state probability; queue; M-matrix.

A. CADRE GÉNÉRAL

A.1. Introduction

La qualité d'un programme informatique de résolution d'un problème numérique dépend de trois facteurs : la taille mémoire nécessaire, le nombre de calculs à effectuer et la nature de ces calculs. Nous verrons, pour les exemples considérés, que l'algorithme proposé dans cette étude nécessite une faible taille mémoire et très peu d'opérations : toutefois, sa principale qualité est de ne faire intervenir que des termes positifs dans tous les calculs et « presque » aucune soustraction.

L'intérêt de cette propriété est évident : si a et b sont deux nombres positifs, l'erreur relative commise quand on calcule $a+b$, ab ou a/b est de l'ordre de la somme des erreurs relatives sur a et b. Par contre, quand on calcule $(a-b)$,

(*) Reçu juin 1988.
(1) I.N.S.A., 20, avenue des Buttes de Coësmes, 34043 Rennes Cedex, France.

si a est peu différent de b, l'erreur relative sur $(a-b)$ peut être beaucoup plus grande que la somme des erreurs relatives sur a et b: il est bien connu que ceci est une source majeure d'« erreurs de calcul ». L'étude théorique associée est d'ailleurs très délicate ([Cha]).

Ce point est particulièrement crucial dans le calcul des probabilités stationnaires des systèmes markoviens. En effet, ce calcul fait intervenir des situations en équilibre : quand on passe d'un niveau (par exemple k clients) à un autre niveau [par exemple $(k+1)$ clients], la plupart des algorithmes font intervenir des soustractions $(a-b)$ avec a et b grands par rapport à $(a-b)$, et ce passage doit être effectué un grand nombre de fois.

Une étape fondamentale dans l'étude qui suit est de montrer que si X_k est la matrice associée aux cas où il y a k clients dans une certaine station — qui est le buffer dans l'exemple de base — on a $X_k = A_k X_{k+1}$ où A_k est un opérateur positif. Une deuxième étape importante est de montrer, sur les exemples considérés, qu'il est possible de mener le calcul associé à cet opérateur positif A_k en ne faisant intervenir que des termes positifs et pas de « soustraction » à presque tous les niveaux.

Enfin, quand k varie de 0 à n avec n grand et X_n « petit », la matrice X_0 est à peu près — à une constante multiplicative près — la « limite » de la suite $(Y_j)_{j>0}$ définie par $Y_1 = X_n$ et $Y_{j+1} = A_{n-j} Y_j$. Les opérateurs A_k étant positifs, on sait que cette suite « converge en direction » et on sait étudier cette convergence (théorème ergodique), la « limite » X_0 ne dépendant « presque » pas de X_n. Si A_k est indépendant de k pour $k \geqq r$ et si n est « infini », X_r est un vecteur propre de A_r (celui qui intervient dans le théorème ergodique).

Une partie de cette étude figurait déjà dans [Alg] : par commodité pour le lecteur, cette partie a été reproduite.

A.2. Notations et hypothèses

Soit m et n deux entiers, $m \geqq 1$, $n \geqq 1$. Soit J l'ensemble des entiers j tels que $0 \leqq j \leqq m$. On pose $m' := m+1$.

L'ensemble E des états est l'ensemble des couples (j, k) avec j élément de J et $0 \leqq k \leqq n$. Pour $0 \leqq k \leqq n$, on appelle E_k l'ensemble des couples (j, h) avec j élément de J et $0 \leqq h \leqq k$: on a donc $E = E_n$.

La fonction positive g définie sur $(E \times E)$ est supposée satisfaire aux propriétés suivantes :

1° $g[(i, h), (j, k)]=0$ pour $|h-k|>1$.

2° Il existe deux fonctions positives u et v définies sur E telles que $g[(i, k-1), (j, k)]=u(i, k)v(j, k)$.

3° Quel que soit k, $0<k\leqq n$, et pour tout couple (e, e') d'éléments de E_k, il existe une séquence $(w_j)_{1\leqq j\leqq h}$ telle que $w_1=e$, $w_h=e'$ et, quel que soit j, $1\leqq j<h$, w_j appartient à E_k et $g(w_j, w_{j+1})\neq 0$.

4° par commodité, on suppose que, quel que soit k, $\sum_j v(j, k)=1$.

La proptiété 3°, pour $k=n$, implique que le système est ergodique. On appelle q la probabilité stationnaire, c'est-à-dire l'unique fonction (positive) définie sur E et qui satisfait aux deux propriétés suivantes :

(i) quel que soit e, $q(e)\sum_{e'} g(e, e')=\sum_{e'} q(e')g(e', e)$

(ii) $\sum_e q(e)=1$

A.3. Théorème : Soit X_k la matrice $(m' \times 1)$ – matrice uni-colonne – dont le terme de la j-ième ligne est défini par $(X_k)_j=q(j, k)$. Alors, quel que soit k, $0\leqq k<n$, il existe une matrice (carrée) $(m' \times m')\, A_k$ qui ne dépend que de $g(e, e')$ avec soit $e=(i, k)$, soit $(e, e')=((j, k+\varepsilon), (i, k))$ – avec $\varepsilon=+1$ ou $\varepsilon=-1$ – et qui est telle que $X_k=A_k X_{k+1}$. Cette matrice est à termes positifs.

Preuve : 1° Pour $e=(j, k)$, la condition (i) s'écrit :

$$q(e)\sum_{e'} g(e, e')=u_{-1}+u_0+u_1 \tag{1}$$

avec

$$u_i=\sum_{h=0}^{m} q(h, k+i)\, g[(h, k+i), (j, k)].$$

Par ailleurs, la conditions (i) implique

$$\sum_{x=0}^{m}\sum_{h=0}^{m} q(h, k-1)\, g[(h, k-1), (x, k)]=v' \tag{2}$$

avec

$$v'=\sum_{x=0}^{m}\sum_{y=0}^{m} q(y, k)\, g[(y, k), (x, k-1)]$$

Compte tenu de la propriété 2° de la fonction g, cette relation (2) peut aussi s'écrire :

$$\sum_{x=0}^{m} v(x, k) \sum_{h=0}^{m} q(h, k-1)\, u(h, k)=v'$$

Ce qui implique :

$$u_{-1}=v(j, k)\, v' \quad \sum_{x=0}^{m} v(x, k)=v(j, k)\, v' \qquad (cf.\ \text{A.2, } 4°)$$

La relation (1) peut alors s'écrire $B_k X_k=C_k X_{k+1}$ où B_k et C_k sont deux matrices (carrées) $(m' \times m')$ qui ne dépendent que des coefficients $g(e, e')$ avec soit $e=(i, k)$, soit $(e, e')=((i, k+\varepsilon), (j, k))$, j fixe, $1 \leqq i \leqq m$ et $\varepsilon=+1$ ou $\varepsilon=-1$. Ces matrices seront explicitées en A.4.

2° On va maintenant prouver que les matrices B_k, $0 \leqq k \leqq n-1$, sont inversibles. Pour cela, on va raisonner par récurrence croissante sur k.

Considérons d'abord le cas $k=0$. Le système global est ergodique, donc il existe deux matrices uni-colonnes X_0 et X_1 telles que $B_0 X_0=C_0 X_1$; si la matrice B_0 n'est pas inversible, son noyau n'est pas réduit à l'élément 0 et il existe $X'_0 \neq X_0$ tel que $B_0 X'_0=C_0 X_1$; la famille q' associée à $(X'_0, X_1, \ldots, X_n)$ est alors une solution de (i) distincte de q ce qui contredit l'unicité liée à l'ergodicité.

Supposons alors que les matrices B_k soient inversibles pour $k<j$. Pour $k<j$, on pose $A_k=B_k^{-1} C_k$. On sait qu'il existe deux matrices uni-colonnes X_j et X_{j+1} telles que $B_j X_j=C_j X_{j+1}$. Si la matrice B_j n'est pas inversible, il existe $X'_j \neq X_j$ telle que $B_j X'_j=C_j X_{j+1}$. La famille q' associée à $(., \ldots, A_{j-2} A_{j-1} X'_j, A_{j-1} X'_j, X'_j, X_{j+1}, X_{j+2}, \ldots)$ est une solution de (i) distincte de q ce qui contredit l'ergodicité.

3° Il reste à prouver que la matrice $A_{k-1}=B_{k-1}^{-1} C_{k-1}$ est à termes positifs. On fixe donc k. Soit i un élément de J. Soit g' la fonction définie sur $(E_k \times E_k)$ de la façon suivante :

(*a*) $g'(e, e'):=g(e, e')$ si e ou e' n'est pas de la forme (j, k) avec j élément de J.

(*b*) $g'[(i, k),(j, k)]=1/r$.

(c) $g'[(j, k), (i, k)] = r$ si $j \neq i$.
La propriété 3° de la fonction g implique que le système (E_k, g') est ergodique. Soit X'_{k-1} et X'_k les matrices associées à g'; tous les termes de ces matrices sont positifs et on a $X'k-1 = A_{k-1} X'_k$: rappelons en effet que les matrices B_{k-1} et C_{k-1} (et donc la matrice A_{k-1}) ne dépendent pas de $g(e, e')$ pour $e = (j, k)$ et $e' = (j', k)$.

Quand r tend vers l'infini; la matrice X'_k tend vers une matrice dont tous les termes sont nuls sauf celui de la i-ième ligne: ce qui précède montre que la matrice uni-colonne $A_{k-1} X'_k$ est à termes positifs, c'est-à-dire que (en passant à la limite) $A_{k-1} U_i$ est une matrice à termes positifs où U_i est la matrice uni-colonne dont tous les termes sont nuls sauf celui de la i-ième qui est égal à 1. Ceci étant vrai quel que soit i, la matrice A_{k-1} est elle-même à termes positifs, ce qui achève la démonstration.

A.4. Proposition : *Quel que soit k, $0 \leqq k < n$,* C_k est à termes positifs et B_k est une M-matrice.

Preuve: Les termes des matrices C_k et B_k sont donnés par:

$$(C_k)_{i,j} := g((j, k+1), (i, k)) \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq i, \quad j \leqq m,$$

$$(B_k)_{j,j} := \sum_{i=0}^{m} [g((j, k), (i, k-1))(1 - v(j, k)) + g((j, k), (i, k+1))]$$

$$+ \sum_{i=0}^{m} g((j, k), (i, k)) \quad \text{pour} \quad 0 \leqq j \leqq m$$

et, pour $i \neq j$:

$$(B_k)_{i,j} := -[g((j, k), (i, k)) + v(i, k) \sum_{h=0}^{m} g((j, k), (h, k-1))]$$

On constate donc que C_k est à termes positifs et que B_k ainsi que sa transposée sont des L-matrices; d'autre part on a la relation:

$$\sum_{i=0}^{m} (B_k)_{i,j} = \sum_{i=0}^{m} g((j, k), (i, k+1)) = u(j, k+1) \quad \text{pour tout } j, \qquad 0 \leqq j \leqq m.$$

Cette relation montre que ${}^tB_k$ est à diagonale dominante.

On pose $B_\varepsilon = B_k + \varepsilon I$.

Pour tout $\varepsilon > 0$, ${}^tB_\varepsilon$ est une L-matrice à diagonale strictement dominante; il en résulte que ${}^tB_\varepsilon$ ainsi que B_ε sont des M-matrices inversibles.

B_k étant une L-matrice, il existe $\lambda_k > 0$ et $B'_k \geqq 0$ tels que

$$B_k = \lambda_k I - B'_k.$$

On a donc, pour tout $\varepsilon > 0$:

$$B_\varepsilon = (\lambda_k + \varepsilon) I - B'_k \qquad \text{avec} \quad \rho(B'_k) < \lambda_k + \varepsilon$$

où $\rho(B'_k)$ désigne le rayon spectral de B'_k.

En faisant tendre ε vers zéro on obtient l'inégalité $\rho(B'_k) \leqq \lambda_k$, ce qui achève la démonstration (*cf.* [GoM]).

A.5. Remarques

1° Pour $0 \leqq k < n$, B_k est inversible et on a $\rho(B'_k) < \lambda_k$; alors que, pour $k = n$, B_n est une M-matrice singulière; on a alors $B_n = \lambda_n I - B'_n$ où $\lambda_n = \rho(B'_n)$.

X_n est, à une constante multiplicative près, le vecteur propre positif de la matrice B'_n associé à la valeur propre λ_n.

2° La proposition précédente nous permet de donner une autre démonstration du théorème A.3; en effet, on a

$$A_k = B_k^{-1} C_k \quad \text{où} \quad B_k^{-1} \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad C_k \geqq 0 \quad \text{pour} \quad 0 \leqq k < n.$$

3° Dans certains cas particuliers, on peut montrer que la matrice A_k^{-1} est une M-matrice.

A.6. Algorithme

Soit R_k la matrice $(m' \times m')$ définie par:

$$R_k := A_0 A_1 \ldots A_{k-1} A_k$$

On a $X_0 = R_k X_{k+1}$.

En général, les matrices positives A_k sont « bien mélangeantes » (beaucoup plus que la matrice globale associée à g); leurs coefficients de contraction de Birkhoff (*cf.*, par exemple [Sen]) sont petits. Dans ce cas, pour k assez grand, les colonnes de R_k sont presque proportionnelles; autrement dit X_0 ne dépend presque pas de X_{k+1}. Il suffit donc de connaître $R_k X_{k+1}$ — avec une initialisation strictement positive quelconque X_{k+1} — pour connaître « à peu près » X_0.

Si les matrices A_k sont inversibles, la connaissance de X_0 implique celle de X_k par récurrence croissante sur k. Si les matrices A_k ne sont pas inversibles, le même raisonnement que précédemment montre que la matrice $A_j A_{j+1} \ldots A_k X_{k+1}$ dépend peu de X_{k+1} si $(k-j)$ est assez grand : ceci détermine X_j d'où X_{j-1}, etc. De plus, même si les matrices A_k sont inversibles, lorsque le « poids relatif » de X_0 est faible, du point de vue technique, il faut partir d'une matrice X_j dont le « poids relatif » ne soit pas trop faible.

Du point de vue technique, il y a essentiellement deux cas – indépendamment du fait qu'on peut être amené à partir de X_0 ou de X_j comme indiqué précédemment. Pour faciliter la compréhension, on va se limiter au cas où on veut déterminer X_0.

1^er^ *cas*

On n'a pas d'estimation *a priori* du coefficient de Birkhoff de R_k. On doit alors calculer la matrice R_k pour une valeur de k telle que les colonnes de R_k soient assez voisines. Du point de vue technique, il n'est pas nécessaire d'expliciter les matrices A_k. Il suffit, pour chaque vecteur U_j de la base canonique de $\mathbb{R}^{m'}$ (les m' colonnes de la matrice unité), de calculer, par récurrence décroissante sur i, le vecteur $Z_{j,i} = A_i A_{i+1} \ldots A_{k-1} A_k U_j$; il suffit donc d'implémenter l'algorithme qui permet de calculer $Z_{j,i}$ en fonction de $Z_{j,i+1}$. Les matrices $Z_{j,0}$ sont les colonnes de R_k.

2^e^ *cas*

Une étude des coefficients de Birkhoff, ou une étude préliminaire avec des paramètres voisins, a montré – théoriquement ou expérimentalement – que pour une valeur k, $R_k X_{k+1}$ dépend peu de X_{k+1}. Dans ce cas, on procède comme dans le premier cas, sauf qu'au lieu de calculer $Z_{j,0}$ pour les m' valeurs initiales U_j, il suffit de calculer $Z_{j,0}$ pour une valeur de j – ou, éventuellement, pour une combinaison convexe des matrices U_j.

A.7. Cas infini et matrices fixes

En plus des hypothèses données en A.2, on suppose :

1° qu'il existe r tel que la matrice $A_k = A$ est fixe pour $k \geqq r$.

2° que $(n-r)$ est « très grand », voire « infini ».

Ceci est notamment le cas pour la file $PH/M/r$ (*cf.* le premier exemple donné ultérieurement).

Dans ce cas $X_k = k - r$ pour $k \geqq r$; X est le vecteur propre associé à la plus grande valeur propre de A. C'est un vecteur positif.

Notons que, la matrice A étant, en général, « bien mélangeante », la façon la plus rapide de calculer X est souvent de calculer $A^k Y$ pour une initialisation quelconque Y; ceci ramène donc exactement à l'algorithme proposé au paragraphe A.6: seuls les tests d'arrêt sont un peu simplifiés. Notons aussi que, dans ce cas, la solution est « matriciellement géométrique » pour $k \geqq r$ et la matrice « résolvante » A (ou A^{-1}) a une forme particulièrement simple [Neu].

B. PREMIER EXEMPLE

B.1. Hypothèses

En plus des hypothèses indiquées en A.2, on suppose que l'on a les deux propriétés suivantes:

1° Quel que soit k, $0 \leqq k \leqq n$, $g[(i, k), (j, k)] = 0$ si $i \geqq j$.

2° Quel que soit k, $0 \leqq k < n$, $g[(i, k+1), (j, k)] = 0$ si $i \neq j$.

3° Quel que soit k, $0 \leqq k < n$, $g[(i, k+1), (i, k)]$ ne dépend pas de i; on posera $d(k) : = g[(i, k), (i, k-1)]$.

Cet exemple permet notamment de modéliser l'étude d'une file $PH/M/.$, c'est-à-dire d'une station unique dont la loi de service est markovienne (relativement au nombre de clients dans la file) et la loi d'arrivée est modélisable par des états fictifs. Si $e = (i, k)$, i est l'état fictif associé à la loi des arrivées et k est le nombre de clients dans la file, y compris celui qui est en service. Le taux de service $d(k)$ peut dépendre du nombre de clients dans la file.

Notons que la contrainte 1° donnée plus haut est une contrainte très faible imposée sur la modélisation par états fictifs: notamment elle est beaucoup plus faible que celle qu'on impose dans la modélisation de Cox (*cf.* [Cox]) ou même dans la modélisation avec pivot (*cf.* [Pel]).

B.2. Équations et notations

Posons

$$s_k : = \sum_{j=0}^{m} q(j, k-1)\, u(j, k) \tag{1}$$

On a aussi:

$$\begin{aligned} s_k &= \sum_{i,j} q[(j, k-1) g(j, k-1), (i, k)] \\ &= \sum_{i,j} q(j, k) g[(j, k), (i, k-1)] \end{aligned}$$

$$s_k = \sum_{j=0}^{m} q(j, k)\, d(k). \tag{2}$$

Pour $k \geqq 1$, l'équation d'équilibre à l'état (i, k) est:

$$q(i, k)\, a(i, k) = q(i, k+1)\, d(k+1) + \sum_{j=0}^{i-1} q(j, k)\, g[(j, k), (i, k)] + s_k\, v(i, k) \tag{3}$$

avec la convention

$$a(i, k) := \sum_{j=i+1}^{m} g[(i, k), (j, k)] + u(i, k+1) + d(k) \tag{4}$$

Si on pose $d(0) = s_0 = 0$, la relation (3) est satisfaisante pour $k = 0$ [avec la même convention (4)].

Pour cet exemple, la notation matricielle est particulièrement bien adaptée. On considère donc les matrices suivantes:

X_k et V_k sont les matrices $((m+1) \times 1)$ définies par $(X_k)_i := q(i, k)$ et $(V_k)_i := v(i, k)$.

S est la matrice $(1 \times (m+1))$ définie par $S_i := 1$ (quel que soit i, $0 \leqq i \leqq m$).

La famille des relations (3) s'écrit alors:

$$T_k X_k = d_{k+1} X_{k+1} + s_k V_k \tag{5}$$

où T_k est une matrice triangulaire.

Soit T_k^{-1} la matrice inverse de la matrice T_k. La relation (5) équivaut à

$$X_k = d_{k+1} T_k^{-1} X_{k+1} + s_k T_k^{-1} V_k \tag{6}$$

En multipliant à gauche par S, cette relation implique:

$$s_k = d_{k+1} S T_k^{-1} X_{k+1} / \{1/d_k) - S T_k^{-1} V_k\}. \tag{7}$$

Si on connaît X_{k+1} et la fonction g, cette relation (7) permet de calculer s_k; la relation (6) permet alors de calculer X_k. Ces relations (6) et (7) utilisent l'opérateur linéaire associé à la matrice T_k^{-1}; il faut noter que cet opérateur est positif et très simple à expliciter. Plus précisément, soit Z et W deux matrices $((m+1) \times 1)$, de terme général z_i et w_i respectivement, telles que $Z = T_k^{-1} W$; si on connaît la famille (w_i), $0 \leqq i \leqq m$, la famille (z_i), $0 \leqq i \leqq m$, se détermine alors par récurrence croissante sur i de la façon suivante:

$$z_0 = w_0/a(0, k)$$

$$z_i = \left[w_i + \sum_{j=0}^{i-1} b(j, i) z_j \right] / a(i, k)$$

avec $b(j, i) := g[(j, k), (i, k)]$.

C. DEUXIÈME EXEMPLE

C.1. Hypothèses

En plus des hypothèses indiquées en A.2, on suppose que l'on a les deux propriétés suivantes:

1° $g[(i, k), (j, k)] = 0$ pour $|i-j| > 1$.

2° Il existe une fonction strictement positive u' définie sur l'ensemble des entiers k, $0 \leqq k \leqq n$, telle que

$$u(i, k) = u'(k)\,\delta_{i,m} \qquad \text{et} \qquad v(i, k) = \delta_{i,m}$$

avec la convention usuelle $\delta_{i,m} = 0$ si $i \neq m$ et $\delta_{i,m} = 1$ si $i = m$.

Cet exemple permet notamment de modéliser l'étude d'une station S munie d'un « buffer » B; si $e = (i, k)$, i est le nombre de clients dans la station S et k est le nombre de clients dans le buffer; la capacité de la station est limitée à m; quand la station est pleine, les nouveaux clients qui arrivent vont dans le buffer B dont la capacité est limitée à n (mais on peut prendre n aussi grand que l'on veut). Les clients dans le buffer peuvent sortir du système par impatience ou revenir dans la station S si celle-ci n'est pas saturée: pour ce modèle $g[(i, k+1), (j, k)] = 0$ si $(i-j)(i-j+1) \neq 0$.

Relativement à l'ensemble E des états l'évolution est markovienne mais tous les taux $g(e, e')$ peuvent dépendre des états e et e' avec les réserves indiquées précédemment.

Le « buffer » B peut être fictif: par exemple ce peut être l'ensemble des abonnés à un standard qui n'ont pas obtenu leur communication et qui vont rappeler incessamment; n est alors le nombre total d'abonnés dans le réseau.

Comme dans l'exemple précédent on va construire explicitement l'opérateur associé à la matrice A_k; en fait, cet opérateur va être construit sous forme du produit de trois opérateurs positifs.

C.2. Équations et notations

Pour $0 \leqq i < m$, l'équation d'équilibre associée à l'état (i, k) s'écrit:

$$q(i, k)\{g[(i, k), (i+1, k)]+g[(i, k), (i-1, k)]+\sum_{j=0}^{m} g[(i, k), (j, k-1)]\}$$
$$=q(i+1, k)g[(i+1, k), (i, k)]+q(i-1, k)g[(i-1, k), (i, k)]$$
$$+\sum_{j=0}^{m} q(j, k+1)g[(j, k+1), (i, k)]. \quad (1)$$

Plutôt que d'utiliser l'équation d'équilibre associée à l'état (m, k), on va utiliser la relation suivante:

$$\sum_{i, j} q(i, k)g[(i, k), (j, k+1)]=\sum_{i, j} q(i, k+1)g[(i, k+1), (j, k)]$$

qui devient dans ce cas:

$$q(m, k)g[(m, k), (m, k+1)]=\sum_{i, j} q(i, k+1)g[(i, k+1), (j, k)] \quad (2)$$

Déterminer l'opérateur associé à la matrice A_k revient à calculer la famille $(q(j, k))_{0 \leqq j \leqq m}$ en fonction de la famille $(q(j, k+1))_{0 \leqq j \leqq m}$. Pour k fixé, on pose $y_j:=q(j, k)$.

Dans un premier temps, on calcule y_m en utilisant la relation (2).

Dans un deuxième temps, on calcule la famille $(t_j)_{0 \leqq j \leqq m}$ définie de la façon suivante:

$$t_{m-1}:=y_m g[(m, k), (m-1, k)]+\sum_{j=0}^{m} q(j, k+1)g[(j, k+1), (m-1, k)] \quad (3)$$

et, pour $0 \leqq i \leqq m-1$:

$$t_i:=\sum_{j=0}^{m} q(j, k+1)g[(j, k+1), (i, k)] \quad (4)$$

On pose alors, pour $0 \leqq i \leqq m-1$:

$$b_i:=g[(i, k), (i+1, k)]+g[(i, k), (i-1, k)]+\sum_{j=0}^{m} g[(i, k), (j, k-1)]$$

$$a_i:=g[(i-1, k), (i, k)] \quad \text{et} \quad c_i:=g[(i+1, k), (i, k)]$$

sauf $a_0 := 0$ et $c_{m-1} := 0$.

La famille des relations (1) devient alors, pour $0 \leqq i \leqq m-1$:

$$b_i y_i - a_i y_{i-1} - c_i y_{i+1} = t_i \tag{5}$$

et il faut inverser l'opérateur ainsi défini; or cet opérateur est associé à une matrice tridiagonale : la procédure d'inversion est classique dans ce cas (*cf.*, par exemple [Cia]).

Nous allons la rappeler pour la commodité du lecteur et pour vérifier qu'elle est associée à un opérateur positif.

On construit successivement par récurrence les trois suites suivantes (récurrence croissante pour les deux premières suites, récurrence décroissante pour la troisième suite) :

$$z_0 = 1/b_o, \qquad z_j = 1/(b_j - a_j c_{j-1} z_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, m-1$$

$$w_0 = z_0 t_0, \qquad w_j = z_j (t_j + a_j w_{j-1}), \quad j = 1, \ldots, m-1$$

$$y_{m-1} = w_{m-1}, \qquad y_j = w_j + z_j c_j y_{j+1}, \quad j = m-2, \ldots, 1,0.$$

Or, quel que soit j, on a $b_j > a_{j+1} + c_{j-1}$. On en déduit immédiatement, en raisonnant par récurrence croissante sur j que l'on a $0 \leqq z_j \leqq 1/a_{j+1}$. Dans tous les calculs qui précèdent, il n'y a donc de « soustractions » que dans la détermination des coefficients positifs $(b_j - a_j c_{j-1} z_{j-1})$ – ces coefficients ne faisant pas intervenir les variables t et y. Pour tous les autres calculs on n'utilise que des additions, des multiplications ou des divisions qui ne portent que sur des termes positifs.

C.3. Mise en œuvre de l'algorithme dans le cas infini

Dans cet exemple, en général, la matrice A_k n'est pas fixe, même pour k assez grand. La seule méthode viable est alors d'initialiser X_n de façon arbitraire (en choisissant n suffisamment grand) et de calculer X_k raisonnant par récurrence décroissante sur k. Quand X_n parcourt l'ensemble en convexe F_n des valeurs de $(\mathbb{R}^{(m+1)})^+$, on obtient l'ensemble de toutes les solutions possibles auquel appartient la probabilité stationnaire q.

Dans ce cas, l'étude est facilitée par le fait que F_n a deux points « extrémaux », appelons-les X'_n et X''_n, qui sont définis par $(X'_n)_i = \delta_{i,0}$ et $(X''_n)_i = \delta_{i,m}$. Il suffit alors de choisir n suffisamment grand pour avoir $\sum_e |q'(e) - q''(e)| < \varepsilon$ où q' et q'' sont les solutions associées à X'_n et X''_n respectivement. La probabilité stationnaire q est « intermédiaire » entre q' et q''. Nous n'avons pas cherché à donner une preuve formelle du fait que q' et q'' sont bien des probabilités «extrêmales»: par contre cette propriété a été vérifiée sur les exemples numériques, en ce sens que, pour tout autre initialisation X_n, si q est la probabilité associée, on a:

$$\sum_e |q(e)-q'(e)| \leqq \sum_e |q'(e)-q''(e)|$$

C.4. Précision

Ce qui précède a été testé sur plusieurs exemples. Notamment on a considéré le cas suivant: a, d, u et v sont des constantes strictement positives; la fonction g est telle que:

$$g((i, k), (i+1, k))=a \qquad \text{pour} \quad i<m$$
$$g((m, k), (m, k+1))=a$$
$$g((i, k), (i-1, k))=d \qquad \text{pour} \quad i>0$$
$$g((i, k), (i+1, k-1))=kb \qquad \text{pour} \quad i<m$$
$$g((i, k), (i, k-1))=kc \qquad \text{(impatience)}$$

Ceci modélise un standard téléphonique qui peut servir simultanément m clients; i correspond aux clients en cours de service, k correspond aux clients en instance de répétition d'appel, a est le taux d'arrivée de nouveaux clients, d est le taux de service global (temps partagé), u est le taux de renouvellement d'appel par client et v est le taux d'impatience par client.

On suppose qu'on peut se limiter à $k \leqq K$.

La taille mémoire utilisée par l'algorithme est inférieure à 10 m. Sa mise en œuvre nécessite de l'ordre de $2K$ (4 m^2+20 m) additions et autant de multiplications.

Par exemple, on a testé le cas:

$a=d=1$, $m=200$, $K=200$ (on a donc 40000 états), $b=0{,}04$ et $c=0{,}01$. Ce cas correspond à une relative saturation puisque la probabilité (marginale) d'avoir $j=0$ vaut 0,0033 et la probabilité d'avoir $j=200$ vaut 0,015. Dans ce cas, $\eta<3.10^{-8}$ avec

$$\eta := \sum_e |q'(e)-q''(e)| \qquad (cf.\ \text{C-3})$$

Si on prend $K=300$, la valeur de η n'est plus significative car inférieure au niveau des erreurs de calcul; l'imprécision due aux erreurs de calcul est de l'ordre de 10^{-11} (rappelons que l'on utilise un micro-ordinateur de faible puissance).

BIBLIOGRAPHIE

[Alg] ALGERENNES, *Probabilités stationnaires pour des systèmes markoviens discrets*, rapport I.N.R.I.A., n° 633, 1987.

[Ast] M. A. ASTOUATI, *Méthode des convexes pour le calcul de la probabilité stationnaire d'un réseau à deux stations à lois de services exponentielles*, Thèse de magistère, Alger, 10 janvier 1985.

[BDK] P. BOYER, A. DUPUIS et A. KHELLADI, *Méthodes de résolution d'un système linéaire markovien*, preprint, 1987.

[BoP] P. BOYER et J. PELLAUMAIL, *Deux files d'attente à capacité limitée en tandem*, Rapport I.R.I.S.A. n° 147, 1981.

[Boy] P. BOYER, *Évaluation des performances des systèmes réparés*, Thèse, Rennes, 1981.

[Cha] F. CHATELIN, *Spectral Approximation of Linear Operators*, Academic Press, New York, 1983.

[Cia] P. G. CIARLET, *Introduction à l'Analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, 1982.

[Cox] D. R. COX, *A Use of Complex Probabilities in the Theory os Stochastic Processes*, Proc. Cambridge Philosophical Society, vol. 51, 1955, p. 313-319.

[DER] I. F. DUFF, A. M. ERISMAN et J. K. REID, *Direct Methods for Sparse Matrices*, Oxford sciences publications, 1986.

[GeP] E. GELENBE et G. PUJOLLE, *Introduction aux réseaux de files d'attente*, Eyrolles, Paris, 1982.

[GLM] E. GELENBE, J. LABETOULLE, R. MARIE, M. METIVIER, G. PUJOLLE et W. STEWART, *Réseaux de files s'attente*, Monographie A.F.C.E.T., 1980.

[GoM] G. H. GOLUB et G. A. MEURANT, *Résolution numérique des grands systèmes linéaires*, Eyrolles, 1983.

[Kel] F. P. KELLY, *Reversibility and Stochastic Networks*, J. Wiley, 1979

[Lem] B. LEMAIRE, *Régularité des matrices à diagonale dominante. Applications à l'absorption dans les chaines et processus de Markov*, R.A.I.R.O., Recherche Opérationnelle, vol. 19, n° 13, 1985.

[Mar] R. MARIE, *Modélisation par réseaux de files d'attente*, Thèse d'état, Université de Rennes, novembre 1978.

[Neu] M. F. NEUTS, *Matrix-Geometric Solutions in Stochastic Models*, The Johns Hopkins University Press, London, 1981

[Pel] J. PELLAUMAIL, *Modélisation avec pivot pour une loi générale*, R.A.I.R.O. Recherche Opérationnelle, vol. 19, n° 3, 1985.

[Sen] E. SENETA, *Non-Negative Matrices and Markov Chains*, Springer-Verlag, 1980.