

JEAN ABADIE

HALIM M' SILTI

## **La programmation mathématique multicritère et la gestion des ressources en eau**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 22, n° 4 (1988),  
p. 363-385

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1988\\_\\_22\\_4\\_363\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1988__22_4_363_0)

© AFCET, 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LA PROGRAMMATION MATHÉMATIQUE MULTICRITÉRE ET LA GESTION DES RESSOURCES EN EAU (\*)

par Jean ABADIE <sup>(1)</sup> et Halim M'SILTI <sup>(2)</sup>

---

**Résumé.** — *On étudie un système de ressources en eau du point de vue de la qualité et de la quantité de l'eau.*

*On propose des modèles mono et multicritères qui spécifient le niveau de traitement imposé à chaque agent pollueur et qui prennent en compte les aspects conflictuels économiques, sociaux et écologiques, ceci dans le but d'atteindre un compromis optimal (optimum de Pareto).*

*Le logiciel utilisé est basé sur la méthode GRG (Gradient Réduit Généralisé) qui a été conçue par J. Abadie.*

**Mots clés :** Programmation non linéaire, programmation multicritère, GRG, méthode de la contrainte, méthode paramétrique, SWT.

**Abstract.** — *The purpose of this paper is to study a water resource system concerning the quality and quantity of the water.*

*We propose mono and multicriteria models which specify the level of treatment imposed to the "pollutant agents" and which take into account economic, social and ecological potentially conflicting aspects; this procedure aims at reaching an "optimal compromise" (Pareto optimum).*

*The software used is based on the GRG method (Gradient Réduit Généralisé) conceived by J. Abadie.*

**Keywords :** Nonlinear programming, multicriteria programming, GRG,  $\varepsilon$ -constraint method, parametric method, SWT (Surrogate Worth Trade-off Method).

---

(\*) Reçu mai 1988.

<sup>(1)</sup> Institut de Programmation, Université Pierre-et-Marie-Curie, 4, place Jussieu, 75005 Paris.

<sup>(2)</sup> LAMSADE, Université Paris-Dauphine, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris Cedex 16.

## INTRODUCTION

Notre objectif est de montrer comment la programmation non linéaire multiobjectif peut être appliquée à l'optimisation d'un écosystème, du point de vue de la qualité et de la quantité de l'eau. On envisage la gestion de l'écosystème comme la recherche d'un compromis « optimal » (optimum de Pareto) entre les divers objectifs qui sont (en général) incompatibles et incommensurables.

On considère le problème sous la forme canonique suivante (cas à trois objectifs) où  $x \in R^n$ :

$$\text{Min } f_1(x)$$

$$\text{Min } f_2(x)$$

$$\text{Min } f_3(x)$$

s. c.

$$g_j(x) \leq 0; \quad j = 1, \dots, k$$

$$g_j(x) = 0; \quad j = k + 1, \dots, m$$

$$a_i \leq x_i \leq b_i; \quad i = 1, \dots, n$$

soit  $n$  variables et  $m$  contraintes.

On développe deux méthodes pour la détermination des solutions efficaces: la méthode paramétrique ou des multiplicateurs de Lagrange et la méthode de la contrainte.

Les modèles étudiés sont non linéaires et résolus à l'aide de la méthode GRG (qui est l'outil informatique de base; cf. J. Abadie, 1978).

La phase de choix de la (ou des) solution(s) « préférée(s) » est traitée par la méthode SWT (Haimes *et al.*, 1975).

## 1. PROBLÈME GÉNÉRAL DE LA GESTION DES RESSOURCES EN EAU

Le problème général de la gestion des ressources en eau soulève trois questions principales (Kneese, Bower, 1968):

(1) Comment déterminer la « qualité » que nous voulons maintenir dans notre cours d'eau? En termes d'optimisation, cela voudra dire: Maximiser la qualité ou Minimiser la pollution à l'aide d'un critère approprié (la DBO par exemple, voir paragraphe 2).

(2) Quels sont les moyens techniques les mieux adaptés pour obtenir un certain niveau de qualité? L'aspect localisation des stations d'épuration et réservoirs, n'est pas pris en compte ici. On les suppose fixés.

(3) Comment un niveau de qualité donné peut-il être atteint au moindre coût. Autrement dit, nous allons essayer de déterminer la «combinaison préférable/optimale» des différentes alternatives d'amélioration de la qualité.

En général, des normes de protection sont proposées et mises en œuvre sous l'une des deux formes suivantes (Liebman, Lynn, 1966).

### **1.1. Norme de protection au niveau des cours d'eau**

Elle place les restrictions sur la qualité de l'eau s'écoulant dans les rivières, et interdit à tout usager le déversement de substances qui déprécient la qualité au-dessous d'un niveau donné.

### **1.2. Norme au niveau des effluents**

Elle spécifie les quantités ou concentrations des différentes substances déversées dans le cours d'eau. Autrement dit, elle spécifie le niveau de traitement que l'utilisateur doit fournir avant la décharge (*a priori*, on peut tout déverser).

Ces deux normes ne sont pas indépendantes.

## **2. MESURES DE LA QUALITÉ DE L'EAU : DBO ET OD**

La qualité de l'eau est généralement mesurée en termes de concentration en oxygène dissous (OD) et de la demande biologique en oxygène (DBO).

### **2.1. Déficit en oxygène dissous**

Lorsqu'un effluent organique est déversé dans une rivière, il est oxydé par l'oxygène dissous dans l'eau et par des micro-organismes.

Cela réduit donc la concentration en OD dans la rivière. L'oxygène est éventuellement «remplacé» par l'absorption d'air (aération). La combinaison de ces deux effets : désoxygénation-aération implique que la concentration en OD va passer par un MINIMUM comme le montre la figure 1.

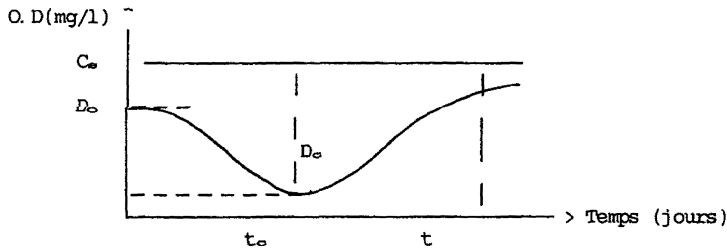


Figure 1: « Courbe en sac » de l'oxygène.

NOTATIONS :

- OD = concentration en oxygène dissous;
- $C_s$  = concentration en oxygène à saturation (mg/l);
- $C_s - OD_t$  = déficit en oxygène au temps  $t$ ;
- $D_0$  = concentration en oxygène au temps  $t=0$ ;
- $t_c$  = instant critique (instant du déversement unique).

## 2. 2. Définition de la DBO : demande biologique en oxygène

La DBO est la « quantité totale d'oxygène » requise pour la dégradation (oxydation) complète des matériaux organiques bio-dégradables contenus dans les effluents.

La DBO peut donc être considérée comme la mesure de la charge polluante dégradable.

## 3. MODÈLES MATHÉMATIQUES DE LA QUALITÉ DE L'EAU

### 3. 1. Modèle de Streeter-Phelps (1925)

Les équations de Streeter-Phelps sont à la base des modèles de la qualité de l'eau. Elles sont définies par :

$$D_i(t) = \frac{k_i}{r_i - k_i} \cdot A \cdot Y_i^R + \exp(-r_i t) \cdot D_i^R$$

$$Y_i(t) = \exp(-r_i t) \cdot Y_i$$

où  $D_i^R$  et  $Y_i^R$  sont respectivement le déficit en OD et la DBO au début de la section  $i$ , c'est-à-dire à l'instant initial  $t=0$ .

$$A = \exp(-k_i t) - \exp(-r_i t);$$

$D_i(t)$  = déficit en OD à l'instant  $t$  dans la section  $i$ ;

$Y_i(t)$  = DBO à l'instant  $t$  dans la section  $i$ .

### 3.2. Modèle de Camp-Dobbins (1963-1964)

C'est un modèle à cinq paramètres qui décrit, de manière plus réaliste, l'évolution de la qualité de l'eau dans la rivière. Les cinq paramètres sont :

$s_i$  = coefficient de sédimentation dans la section  $i$ ;

$p_i$  = coefficient d'apport de la DBO (écoulement) dans la section  $i$ ;

$a_i$  = coefficient de production photosynthétique d'oxygène dans la section  $i$ .

$k_i$  et  $r_i$  sont définis comme précédemment (taux de désoxygénation et d'aération).

La « courbe en sac de l'oxygène » pour la section  $i$  est maintenant donnée (modèle de Camp-Dobbins) par :

$$D_i(t) = \frac{k_i}{r_i - (k_i + s_i)} \cdot A \cdot Y_i^R + \exp(-r_i t) \cdot D_i^R \\ + \left[ \frac{a_i}{r_i} + \frac{k_i \cdot p_i}{r_i (k_i + s_i)} \right] [1 - \exp(-r_i t)] - \frac{k_i p_i}{r_i (s_i + k_i)} \cdot A.$$

où  $A = \exp(-(k_i + s_i)t) - \exp(-r_i t)$ .

La concentration DBO pour la section  $i$  est maintenant :

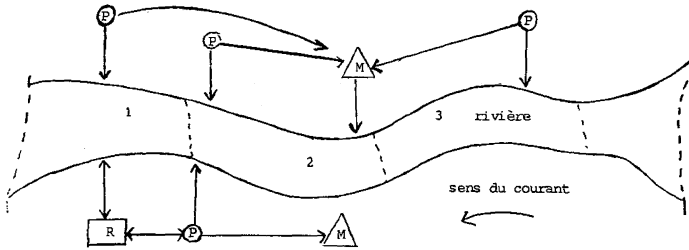
$$Y_i(t) = B \cdot Y_i^R + \frac{p_i}{k_i + s_i} \cdot [1 - B]$$

où  $B = \exp(-(k_i + s_i)t)$ .

### 4. PRÉSENTATION D'UN SYSTÈME

Le système étudié comprend : un bassin de rivière divisé en  $N$  sections, un réservoir en amont de la zone étudiée, un ensemble de  $J$  pollueurs qui déversent leurs eaux usées dans la rivière et des stations de traitement.

Un tel système à l'allure suivante :



$P$  = source de pollution, munie ou non d'un procédé de traitement local;

$M$  = installation de traitement régional;

$R$  = réservoir;

1, 2, 3 = section de rivière.

Les différents procédés techniques pour la gestion de notre bassin de rivière sont :

- traitement primaire (ou local);
- traitement secondaire (ou régional);
- augmentation des débits d'étéage: Low-Flow Augmentation;
- dérivation des flots rejetés: By-Pass Piping.

Dans les modèles de contrôle de la pollution, les fonctions-objectifs et les contraintes, sont le plus souvent composées de trois parties (cf. M'Silti, 1984) relatives aux :

- (i) actions à entreprendre aux sources de la pollution;
- (ii) actions à entreprendre entre les sources et les récepteurs;
- (iii) mesures de protection au niveau régional.

On suppose que les objectifs du décideur sont au nombre de trois (cf. H. M'Silti, thèse de troisième cycle 1984) :

- (1) minimiser le coût total de traitement dans la région;
- (2) minimiser la pollution dans la rivière;
- (3) maximiser la quantité d'eau disponible dans le réservoir pour l'approvisionnement de la région.

Les différentes composantes de la fonction coût total sont :

- coût du traitement local;
- coût du traitement régional;
- coût des dommages causés à l'écosystème;

- coût lié aux infrastructures :
- transport de l'eau du pollueur vers la section de décharge,
- transport de l'eau du pollueur vers la station d'épuration;
- transport de l'eau de la station d'épuration vers la section de décharge;
- coût (lié au stockage et/ou transport) de l'eau dans les réservoirs.

NOTATIONS: Pour la plupart des problèmes que nous avons étudiés, les variables étaient :

$f_{ij}$  = débit pollueur  $j$  vers section  $i$ .

$p_{mj}$  = débit pollueur  $j$  vers station d'épuration  $m$ .

$t_{im}$  = débit station d'épuration  $m$  vers section  $i$ .

$r_{mi}$  = efficacité de l'installation de traitement  $m$  (% d'élimination des déchets, c'est-à-dire de la DBO) de la section  $i$ .

$F_{iR}$  = augmentation du débit d'étiage : réservoir  $R$  vers section  $i$  (ou inversement).

$D_i$  = déficit en OD dans la section  $i$  (au début et à la fin).

$Y_i$  = DBO dans la section  $i$  (au début et à la fin).

$Q_i$  = débit dans la section  $i$  (fin de section).

$YSTP_i$  = DBO dans la station d'épuration localisée dans la section  $i$  (à l'entrée et à la sortie).

$a_{ij}$  = distance pollueur  $j$ , section  $i$ .

$a_{mj}$  = distance pollueur  $j$ , station  $m$ .

$a_{im}$  = distance station  $m$ , section  $i$ .

$a_{ij}$ ,  $a_{mj}$ ,  $a_{im}$  sont donnés.

Les fonctions étudiées sont une combinaison de : formes linéaires, formes linéaires par morceaux, séries de Taylor, etc.

Les contraintes se répartissent en deux groupes : Un premier groupe consiste en des relations fonctionnelles qui doivent être prises en compte pour que l'optimisation soit physiquement réalisable (contraintes d'égalité) et un deuxième groupe contient les limites existantes pour les variables ou paramètres qui assurent leur réalisation physique ou compatibilité avec le processus (contraintes d'inégalités).



Formellement, les contraintes d'égalité concernent :

- la définition de l'efficacité d'une station d'épuration (quotient de la DBO éliminée par la DBO initiale);
- le bilan de masse par section : on prend en compte les flots entrants et sortants dans la section considérée (débit de la section précédente, affluent, effluents de la station et des pollueurs, ...);
- la détermination de la DBO en début (et en fin) de section;
- la détermination de la concentration en OD en début (et en fin) de section;
- la détermination du déficit en OD en début (et en fin) de section.

Les contraintes d'inégalités concernent :

- la définition des normes de qualité;
- l'efficacité du traitement.

La procédure suivie (en construisant les contraintes) est de recalculer les valeurs initiales de la DBO et du déficit en OD comme valeurs moyennes de la DBO et du déficit en OD dues au débit du cours d'eau principal et de tous les flots entrants (effluents) et d'appliquer soit les équations de Streeter-Phelps, soit les équations de Camp-Dobbins pour déterminer la DBO et OD à la fin de la section considérée.

Tous les modèles étudiés sont non linéaires.

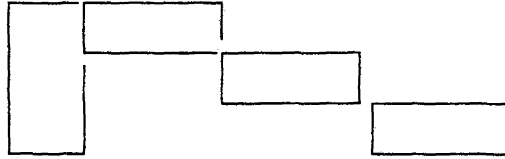
L'ensemble des contraintes définissant la qualité de l'eau pour une section donnée a une structure en bloc :

variables  $\rightarrow r_{mi} \quad YSTP_i \quad Y_i \quad D_i \dots$

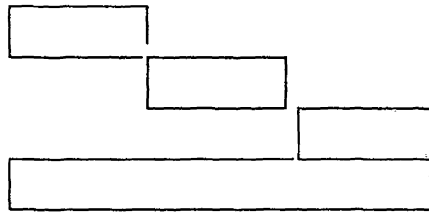
CONSTRAINTES SECTION  $i$

Certaines variables sont en fait communes à deux sections successives  $i$  et  $(i+1)$ ; alors, deux blocs de contraintes correspondant à deux sections consécutives sont contigus et, plus précisément, nous avons la structure suivante pour

la matrice des contraintes :



ou



ou une combinaison des deux structures.

## 5. ANALYSE MULTICRITÈRE

Une approche réaliste de ce type de problèmes doit, dans un premier temps, prendre en compte les interactions entre les divers objectifs et analyser ensuite les « fonctions de substitution » entre eux de façon quantitative et/ou qualitative.

Un problème d'optimisation multicritère se note de la façon suivante :

$$\underset{\text{s. c.}}{\text{Max}} F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x)) \quad \text{ou} \quad \underset{\text{s. c. } F(x) \in S}{\text{Max}} F(x)$$

où  $S = \{F(x)/x \in T\}$  et  $T$  est l'ensemble des solutions réalisables dans l'espace des variables de décision.

La définition de l'optimum ici, est différente de celle de l'optimum dans le cas d'une fonction mono-objectif.

**DÉFINITION :** *Le cas idéal.*

Chaque  $f_i(x)$  trouve son MAX pour un même vecteur  $x^*$ , c'est-à-dire  $x^* \in T$  et  $F(x^*) \geq F(x)$ ;  $\forall x \in T$ .

$F$  aurait alors un maximum évident. Ce n'est généralement pas le cas puisque, par nature, les objectifs sont conflictuels.

Le point idéal ou point de mire (qui correspond au maximum de chaque critère indépendamment des autres) est en dehors de la région admissible  $S$ .

Le problème n'ayant généralement pas de solution unique, on peut distinguer, parmi les points des domaines réalisables  $T$  et  $S$ , ceux qui ont certaines caractéristiques (concept de solutions efficaces ou optimum de Pareto et de solutions non dominées).

### 5.1. Solutions localement ou globalement efficaces

Étant donné l'ensemble des solutions réalisables  $T$  (dans l'espace des variables de décisions), une solution  $x \in T$  est dite « localement efficace » s'il existe un voisinage  $V_x$  de  $x$  tel que la condition suivante (CE) ne peut être réalisée pour aucun  $x' \in V_x \cap T$ :

$$\begin{aligned} & \text{il existe } r \in \{1, 2, \dots, p\} \text{ tel que :} \\ \text{(CE)} \quad & f_r(x') > f_r(x) \\ & f_k(x') \geq f_k(x); \quad \forall k \neq r, \end{aligned}$$

La solution  $x$  est dite « globalement efficace » si l'on peut prendre  $V_x \equiv R^n$  dans la définition ci-dessus.

Dans le cas convexe ( $T$  convexe) toute solution localement efficace est globalement efficace.

Reid et Citron (1971), Reid et Vemuri (1971) ont montré que toutes les solutions efficaces se trouvent sur la frontière de  $T$ . C'est une caractéristique très importante de cet ensemble. L'état économique ainsi défini est appelé par la théorie un « optimum de Pareto »; c'est une situation dans laquelle il est impossible d'augmenter la satisfaction (ou le profit) d'un seul agent économique sans diminuer la satisfaction d'au moins un autre.

### 5.2. Solutions localement ou globalement non dominées

La notion d'efficacité se réfère aux points réalisables de l'espace des décisions tandis que celle de non-dominance se réfère aux vecteurs dans l'espace des critères.

Une solution  $\alpha \in S$  (dans l'espace des critères) est dite « localement non dominée » s'il existe un voisinage  $U_\alpha$  de  $\alpha$  tel que la condition suivante (CD) ne peut être réalisée pour aucun  $\beta \in U_\alpha \cap S$ :

$$\text{(CD)} \quad \beta \geq \alpha \text{ et } \beta \neq \alpha.$$

La solution  $\alpha$  est dite « globalement non dominée » si l'on peut prendre  $U_\alpha \equiv R^p$  dans la définition ci-dessus.

Dans le cas convexe ( $S$  convexe), toute solution localement non dominée est globalement non dominée.

Les deux méthodes utilisées avec GRG sont la méthode paramétrique et la méthode de la contrainte.

### 5.3. La méthode paramétrique ou des multiplicateurs de Lagrange

Les conditions de Kuhn et Tucker impliquent que les solutions efficaces peuvent être obtenues en résolvant un problème d'optimisation avec «une seule fonction objectif» qui est la somme des  $f_k(x)$  pondérée par les  $w_k$ .

La solution du problème:

$$\text{Max } \sum_{k=1}^p w_k f_k(x) \quad (1)$$

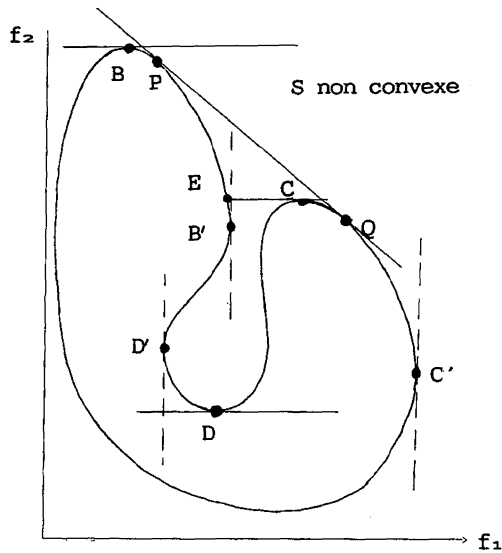
$$\text{s. c. } x \in T \quad (2)$$

$$w_k \geq 0 \text{ pour tout } k \text{ et } w_k > 0 \text{ pour au moins un } k \quad (3)$$

est, en général, efficace.

Pour identifier l'ensemble des solutions efficaces, il suffit de résoudre (1) à (3) en faisant varier paramétriquement les «poids»  $w_k$  affectés à chacun des objectifs.

La figure ci-dessous, montre l'application de la méthode dans le cas où  $S$  n'est pas convexe.



en B, C, D : tangentes horizontales;  
 en B', C', D' : tangentes verticales;  
 en P, Q : tangente commune.

Les arcs  $BE$  et  $CC'$  sont globalement non dominés; les arcs  $EB'$  et  $D'D$  sont localement non dominés.

Les arcs  $B'D'$  et  $DC$  sont sur la frontière de  $S$  mais ne sont ni localement ni globalement non dominés.

Une méthode paramétrique globale (c'est-à-dire avec maximisation globale) trouvera les arcs  $BP$  et  $QC'$ . Une méthode paramétrique avec maximisation locale trouvera peut-être, outre  $BP$  et  $QC'$  comme précédemment, les arcs  $PB'$  et  $CQ$ , et donc permet d'obtenir  $BB'$  et  $CC'$  mais pas  $D'D$ .

Remarquons que cette méthode ne permet pas d'obtenir l'ensemble des points localement efficaces puisqu'il manquerait l'arc  $D'D$ . Ce problème est dit, dans la littérature anglo-saxonne, «duality gap» (cf. Geoffrion, 1968, Haimès *et al.*, 1975). Ce terme vient du fait que le problème paramétrique est lié au problème dual du problème suivant :

$$\begin{aligned} \text{Max } f_1 \\ f_2 \geq \varepsilon_2; \quad x \in T \end{aligned}$$

#### 5.4. La méthode de la contrainte

Cette méthode est pratiquement duale de la précédente. Dans le cas convexe, les solutions efficaces peuvent être trouvées en résolvant le problème suivant :

$$\text{Max } f_r(x) \tag{1}$$

$$x \in T \tag{2}$$

$$f_k(x) \geq \varepsilon_k; \quad k = 1, 2, \dots, r-1, r+1, \dots, p \tag{3}$$

où  $f_r(x)$  est le critère principal et où  $\varepsilon_k$  (la borne inférieure pour le  $k$ -ième critère) représente le niveau minimal admissible de réalisation de ce critère.

Ce niveau peut être une donnée si le «décideur» est capable de l'évaluer. Sinon, on peut trouver des valeurs initiales de  $\varepsilon_k$  à partir desquelles on pourra calculer l'ensemble des solutions efficaces, par variation paramétrique de  $\varepsilon_k$ , dans (3).

Ici, la méthode de la contrainte avec maximisation globale permet de trouver  $BE$  et  $CC'$ . La même méthode avec maximisation locale permet peut-être de trouver, outre  $BE$  et  $CC'$  comme précédemment, les arcs  $EB'$  et  $D'D$ .

Elle permet donc d'obtenir en entier les arcs  $BB'$ ,  $CC'$  et  $D'D$ . Remarquons que l'ensemble des points localement efficaces est ici obtenu.

Dans la suite, la présentation sera faite dans le cas convexe; nos réflexions sur le cas non convexe feront l'objet d'une autre publication.

### 5.5. Les fonctions de substitution et les multiplicateurs de Lagrange

La problématique posée par la programmation mathématique à plusieurs fonctions objectifs est de générer l'ensemble des solutions « efficaces » en premier lieu et de trouver ensuite la « solution préférée » parmi celles-ci. La démarche générale est d'agréger les critères en une somme pondérée (méthode paramétrique dans notre cas) ou encore d'introduire certains d'entre eux sous forme de contraintes (méthode de la contrainte).

Un concept fondamental (dans la théorie de l'utilité en général) est celui de taux de substitution. Si l'on suppose qu'il existe une fonction  $U$  permettant d'agréger les critères  $f_1, f_2, \dots, f_p$ , il doit exister aussi des fonctions  $\delta_{ij}$  mesurant la quantité que le décideur est prêt à concéder sur le  $j$ -ième critère pour gagner une unité sur le  $i$ -ième critère (quantité qui peut évidemment varier avec le point de l'espace des critères considéré).  $\delta_{ij}$  est appelé le « taux de substitution » entre le  $i$ -ième et le  $j$ -ième critère.

En pratique, il est souvent difficile d'appréhender, en des termes précis, de tels taux, surtout lorsque les critères s'expriment dans des unités incommensurables. On tire malgré tout parti du concept en encadrant  $\delta_{ij}$  entre deux bornes.

Lorsque les fonctions  $f_i$  et  $U$  sont supposées régulières, on obtient :

$$\delta_{ij} = (\partial U / \partial f_j) / (\partial U / \partial f_i).$$

On montre que les fonctions de substitution peuvent être trouvées à partir des valeurs des variables duales associées aux contraintes du problème (Haimes *et al.*, 1975).

Plus précisément, une correspondance directe existe entre ces fonctions de substitution (associées aux contraintes serrées) et l'ensemble des solutions efficaces et entre les fonctions de substitution associées aux contraintes non serrées et l'ensemble des solutions dominées. Les multiplicateurs de Lagrange non nuls correspondent aux solutions efficaces tandis que les multiplicateurs nuls correspondent aux solutions dominées.

Une remarque importante, et c'est un élément intéressant de GRG, est que les taux de substitution sont calculés automatiquement par le code (J. Abadie, 1978).

Problème exemple :

(1) Minimiser les coûts :

(1-1) Les fonctions coûts pour chaque pollueur sont données par Himmelblau (1977). Elles sont quadratiques et fonction du pourcentage de DBO éliminée.

$$\text{Coût}_j = 160,8 + 26,7 q_j + (640,7 + 255,7 q_j) (x_j - 0,45)^2$$

où  $q_j$  = charge totale d'eaux usées générée par le  $j$ -ième pollueur (mgd).

Le coût total de traitement primaire pour la région est la somme des coûts individuels :

$$f_1 = \sum_{j=1}^J \alpha_j + \beta_j \cdot (x_j - 0,45)^2.$$

où :

$$\alpha_j = 160,8 + 26,7 q_j;$$

$$\beta_j = 640,7 + 255,7 q_j.$$

(1-2) Le coût total de traitement régional est (Graves-Hatfield-Whinston) :

$$f_2 = \sum_{j=1}^M 49 \cdot 22 [\sum_{j=1}^P p_{mj}]^{3/4} \cdot \{ 8,0 [x_j - .45]^3 + 1 \};$$

où  $M$  est le nombre de stations d'épuration et  $p_{mj}$  la quantité d'eau de la source de pollution  $j$  à la station  $m$ .

Le coût total est  $F_1 = f_1 + f_2$ .

(2) Minimiser la pollution dans la rivière :

Soit  $C_s - D$  la mesure de la qualité de l'eau au point  $A$  en aval de la zone étudiée.  $C_s$  est la concentration en OD à saturation (constante) et  $D$  est la concentration en oxygène dissous à un moment donné;  $C_s - D$  représente donc le déficit en OD.

En fait, on a :  $C_s - D = C_s - D(\text{DBO}_1, \text{DBO}_2, \dots, \text{DBO}_N, y)$ . Il est clair que plus ce déficit est faible, plus la qualité de l'eau est meilleure.

$$\text{OD}_A = [\sum_{i=1}^N a_i x_i + b_1 y - c_1] / [(c_2 - b_2) - b_2 y] \quad (5.4.0)$$

où  $\text{OD}_A$  est la concentration en oxygène dissous au point  $A$ .

Les coefficients  $a_i$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $b_2$ ,  $c_2$  dans l'expression (5.4.0), dépendent des paramètres définissant la qualité de l'eau (autrement dit des équations de Streeter-Phelps ou de Camp-Dobbins; voir paragraphe 3) et des variables

permettant :

- de contrôler les débits (flots entrants et sortants dans la section considérée, effluents de la station de traitement et des sources de pollution, débit de la section précédente, ...);
- de définir l'efficacité d'une station d'épuration;
- et de déterminer la DBO et la concentration en OD au début et à la fin d'une section (et par conséquent, le déficit en OD).

Plus précisément, on a :

$$a_i = w_i \sum_{j=1}^N G_j \cdot R_{j+1}^N \cdot K_i^{j-1} \quad (5.4.1)$$

où,  $w_i$  est la DBO non traitée (1 bs/j) par le  $i$ -ième pollueur;

$$G_j = \frac{k_j}{r_j - k_j} \cdot [\exp(-k_j t_j) - \exp(-r_j t_j)] \quad (5.4.2)$$

$$R_j = \exp(-\sum_{m=i}^j r_m t_m); \quad (5.4.3)$$

$$K_i = \exp(-\sum_{m=i}^j k_m t_m); \quad (5.4.4)$$

$$b_1 = F_0 [c_0 R_1^N + \sum_{j=1}^N C_{sj} (1 - \exp(-r_j t_j)) R_{j+1}^N]; \quad (5.4.5)$$

$$b_2 = F_0 \mu; \quad (5.4.6)$$

$$c_1 = (F_N - F_0) \mu; \quad (5.4.7)$$

$$c_2 = w_0 \sum_{j=1}^N G_j R_{j+1}^N K_i^{j-1} + \sum_{j=1}^N a_j - \sum_{j=1}^N R_j^N G_j + C_{sj} (1 - \exp(-r_j t_j)) R_{j+1}^N (F_j - F_0); \quad (5.4.8)$$

avec :

$F_j$  = débit de la rivière en début de section  $j$  (cf/j);

$c_0$  = concentration initiale d'oxygène dissous (mg/l);

$C_{sj}$  = concentration d'oxygène à saturation (mg/l);

$r_j$  = coefficient d'aération dans section  $j$ ;

$k_j$  = coefficient de désoxygénation dans section  $j$ ;

$C_j$  = concentration en oxygène dissous dans les flots déversés dans section  $j$  depuis le réservoir (1 bs/j);

$\mu$  = facteur de conversion de 1 bs/cf en mg/l;

$t_j$  = durée de la traversée de la section  $j$ ;

Le deuxième critère est donc:  $\text{Max } F_2 = \text{OD}_A$ , c'est-à-dire Maximiser la concentration en OD; sous la contrainte que les paramètres et les variables définis dans  $\text{OD}_A$  vérifient les équations (5.4.1) à (5.4.8).



D'autre part, comme  $F_2$  est une quantité positive, il faudra imposer au dénominateur de rester toujours positif (nous ne l'avons pas fait, et nous n'avons pas rencontré de difficulté à ce propos; le remède aurait été facile, avec une contrainte supplémentaire  $A \geq \varepsilon_4$  où  $\varepsilon_4 = 10^{-8}$  par exemple).

(3) Maximiser la quantité d'eau disponible dans le réservoir pour l'approvisionnement en eau de la région.

Si on note  $S$  la quantité d'eau disponible dans le réservoir pour la période considérée et  $y$  la quantité d'eau requise pour l'augmentation du débit de la rivière, alors la quantité d'eau disponible pour l'approvisionnement est donnée par la différence  $S - y \geq \alpha$ .

On a explicitement :

$$\begin{aligned} \text{MIN } F_1 &= f_1 + f_2 \\ \text{MAX } F_2 &= [\sum_{i=1}^N a_i x_i + b_1 y + 0,45 \sum_{i=1}^N a_i + (b_1 - c_1)]/A \end{aligned}$$

où :

$$A = (c_2 - b_2) - b_2 \cdot y;$$

$$\text{MAX } F_3 = S - y$$

s. c.

les paramètres et variables vérifient les équations (5.4.1) à (5.4.8);

$$0 \leq x_i \leq 0,54$$

$$0 \leq y \leq S$$

$$A \geq \varepsilon_4.$$

On met le problème sous la forme de la méthode de la contrainte :

$$\text{MIN } F_1$$

$$\text{s. c. } F_2 \geq \varepsilon_2$$

$$F_3 \geq \varepsilon_3$$

$$A \geq \varepsilon_4$$

$$0 \leq x_i \leq 0,54$$

$$0 \leq y \leq S.$$

Le problème ainsi défini, est non linéaire et comprend 20 contraintes et 21 variables.

Le lagrangien du problème modifié est :

$$L = F_1 + \sigma_{12}(F_2 - \varepsilon_2) + \sigma_{13}(F_3 - \varepsilon_3).$$

La valeur de  $\sigma_{ij}$ ,  $j=2, 3$  correspondant aux contraintes serrées ( $F_j(x) = \varepsilon_j$ ) indique le bénéfice (coût) marginal de  $F_1(x)$  dû à une réduction d'une unité de  $\varepsilon_j$ ,  $j=2, 3$ .

On génère une trentaine de solutions efficaces ainsi que les multiplicateurs de Lagrange correspondant :

$F_1^*$ (coût) (\$/jour)	$F_2^*$ (OD) (mg/l)	$F_3^*$ (qté d'eau) (mcf)	$\sigma_{12}$ (\$/jour/mg/l)	$\sigma_{13}$ (\$/jour/mcf)
4 994	8,07	3,47	Point idéal dans l'espace des critères	
11 232	7,69	3,47	-6 596	-419,2
10 562	7,58	3,35	-5 506	-519,7
9 960	7,48	3,24	-4 960	-610,1
9 402	7,38	3,12	-4 418	-661,0
8 890	7,27	3,00	-4 019	-701,2
8 407	7,17	2,89	-3 756	-743,0
7 941	7,07	2,78	-3 563	-782,0
7 494	6,96	2,66	-3 333	-800,0
7 071	6,86	2,54	-3 078	-798,0
6 673	6,76	2,43	-2 849	-790,0
6 303	6,66	2,31	-2 588	-762,0
5 966	6,55	2,19	-2 292	-712,0
5 668	6,45	2,08	-1 961	-639,0
5 416	6,35	1,96	-1 593	-542,0
5 217	6,24	1,85	-1 186	-420,0
5 077	6,14	1,74	-741	-272,0
5 003	6,04	1,62	-255	-97,0
4 993	6,01	1,50	0	0,0
4 993	6,05	1,39	0	0,0
4 993	6,09	1,27	0	0,0

Nombre de variables : 16, toutes intervenant de manière non linéaire.

*Note :* si on fait l'hypothèse que la vitesse du courant est constante sur une section, on obtient le déficit en oxygène dissous en n'importe quel point par la transformation  $x = vt$ ;

— il y a 7 variables et 6 contraintes d'égalité (ce qui laisse 1 degré de liberté) pour chaque section (on a 3 sections dans ce problème). Cependant, certaines de ces contraintes sont éliminées en introduisant la variable appropriée dans l'équation appropriée (ce qui nous permet de diminuer aussi le nombre de variables, et de le faire passer de 21 à 16).

### Interprétation des résultats

(i) On remarque que le coût de traitement augmente avec la concentration en oxygène dissous dans l'eau. Si l'on veut par exemple assurer 7 mg/l d'oxygène dissous dans l'eau, il en coûtera 6 000 \$/jour environ. Si l'on veut une eau plus « pure », il faudra augmenter la concentration en OD (c'est-à-dire augmenter l'efficacité du traitement); par exemple, pour 7,6 mg/l d'OD dans l'eau, le coût sera de 10 000 \$/jour environ.

Supposons que nous présentions au décideur l'ensemble des valeurs suivantes :

$F_3^*$  mcf/jour (quantité d'eau pour l'approvisionnement de la région);

$F_2^*$  mg/l (niveau d'oxygène dissous dans l'eau);

$F_1^*$  \$/jour (coût de traitement).

On lui poserait alors les deux questions suivantes :

« En ce point, êtes-vous d'accord pour payer un coût additionnel de  $\sigma_{12}$  \$/jour pour relever le niveau d'oxygène dissous de 1 mg/l ? ». Et « êtes-vous d'accord pour payer un coût additionnel de  $\sigma_{13}$  \$/jour afin d'avoir un million de pieds-cube (mfc) supplémentaire dans le réservoir ? ».

On lui demande alors d'évaluer ses préférences sur une échelle de  $-10$  (signifiant une incompatibilité totale) à  $+10$  (signifiant une compatibilité totale) avec  $0$  (zéro) signifiant l'indifférence.

(iii) Il importe de bien choisir les unités d'incrémentation. L'unité choisie pour  $F_2$  est 1 mg/l; pour  $F_1$ , elle est de 1 000 \$/jour.

Ce point est très important lors de la phase d'interrogation (dialogue décideur-homme d'étude ou décideur-ordinateur) car le décideur doit être capable de percevoir la différence entre les différents choix qui lui sont proposés. En effet, le décideur va probablement considérer que la différence entre 5,0 et 5,1 mg/l est négligeable et donc des questions autour de 0,1 mg/l (d'augmentation ou de diminution de la concentration d'OD) n'auront aucune signification.

Dans l'exemple que nous venons de citer (et dans tous les problèmes que nous avons étudiés), les étapes de traitement et de dialogue ne sont pas nécessairement dissociées. Par le biais d'une structure d'articulation des préférences qui lui soit propre (dans cette étude, on a considéré la méthode SWT ou Surrogate Worth Trade-Off Method), le décideur va émettre des jugements qui n'ont qu'une portée locale (c'est-à-dire qui ne font intervenir qu'une seule action et son voisinage dans l'espace des critères ou un petit nombre d'actions « voisines »).

Les informations inter-critères ainsi obtenues (grâce aux jugements émis par le décideur) vont permettre d'élaborer une procédure (de caractère local) de choix de la (des) « solution(s) de meilleur compromis »; on dit aussi « solution(s) préférée(s) » :

(i) Si le décideur n'est pas pleinement satisfait de la solution proposée, on peut chercher comment la faire évoluer. Autrement dit, quels sont les critères qu'il aimerait améliorer en priorité et, pour les autres, quelles sont les limites

qu'il ne veut pas ou ne peut pas dépasser (le procédé mis en œuvre est par exemple *GRG + Méthode de la contrainte + SWT (ELECTRE)*).

(ii) On peut essayer de lui faire élaborer un système (sous forme de tableau) de pertes (gains) «équivalentes» dans le voisinage du point de mire (le procédé mis en œuvre est par exemple *GRG + Méthode Paramétrique + Point de Mire*).

La méthode paramétrique est plus simple à mettre en œuvre que la méthode de la contrainte (qui introduit une ou plusieurs fonctions économiques dans l'ensemble des contraintes, ce qui peut apporter des inconvénients — en temps de calcul — si, par exemple, les contraintes sont toutes linéaires et que l'une au moins des fonctions objectif est non linéaire).

On peut mettre à profit le fait que GRG génère automatiquement les taux de substitution (en supposant qu'ils sont constants) pour «essayer» d'élaborer une fonction d'agrégation des critères représentant les préférences du décideur; par exemple :

$$U = \sum_{k=1}^p W_k \cdot f_k \quad \text{si on a } p \text{ critères.}$$

Cette approche, appelée approche AO1 par B. Roy, qui permet de résoudre un problème d'optimisation non linéaire multicritère par le biais de la programmation non linéaire monocritère (et que nous utilisons au moins dans la phase de génération des solutions efficaces), peut être combinée avec l'approche AO3 où approche du jugement local interactif (d'après la terminologie de B. Roy) pour élaborer une procédure «interactive» permettant :

- d'éliminer un certain nombre d'actions jugées non satisfaisantes;
- de rechercher une action qui optimise un des critères (ou un critère d'agrégation);
- de renseigner le décideur sur les conséquences de ses prises de position (actuelles et à venir et, par conséquent, de lui laisser la possibilité de revenir à une phase antérieure);
- de désigner le critère que l'on va chercher à améliorer «en priorité»,
- etc.

de telle sorte qu'il puisse, par exemple, essayer de se rapprocher «le plus possible» du point de mire (au sens d'une certaine norme) tout en recherchant un bon compromis.

C'est la voie poursuivie actuellement dans le cadre de nos recherches au LAMSADE.

## 6. CONCLUSION

L'analyse mathématique n'a porté que sur des critères quantitatifs alors que, dans la pratique, on peut être confronté en plus à des critères qualitatifs.

D'autre part, les différents objectifs ne sont pas, en général, représentés en unités communes; donc, pour trouver la meilleure politique, le décideur est confronté aux valeurs de substitution entre les objectifs.

Un des avantages fondamentaux de la méthode GRG est que les multiplicateurs de Lagrange reflétant les «valeurs de substitution» sont calculés automatiquement par le code lors de l'analyse, ce qui rend plus aisé le choix de «la solution de meilleur compromis».

La méthodologie proposée ici a permis, dans un premier stade, de décrire un système complexe dont le fonctionnement est réglé par l'eau en le découpant en «ensembles et unités fonctionnels» intégrant des informations hydrologiques, sédimentologiques et biologiques et, dans un deuxième stade, de fournir une aide à la décision en établissant des scénarios d'évolution élaborés selon les différentes options d'aménagement proposées.

Malgré la «relative» simplicité des systèmes (et modèles) étudiés, ce type de recherche vise à promouvoir une gestion écologique de la rivière et de son bassin versant en développant un ensemble de mesures qui favorisent le maintien d'une productivité biologique globale élevée, obtenue au moindre coût économique tout en satisfaisant les besoins sociaux, culturels et esthétiques diversifiés de la société.

Certains points restent cependant à élucider du point de vue de l'analyse, tels ceux qui tiennent au caractère de très long terme des problèmes d'environnement et au type particulier d'incertitude qui en découle.

Les méthodes d'optimisation utilisées (GRG seule ou en combinaison avec la méthode paramétrique et/ou la méthode de la contrainte et/ou la méthode SWT et/ou le point de mire) se sont avérées fiables et robustes pour ce type de problèmes (où les fonctions à optimiser et les contraintes sont non linéaires et relativement complexes).

L'analyse multicritère a permis d'analyser les relations existant entre le niveau de pollution et son incidence sur la qualité de l'eau.

Le principal avantage de cette approche réside dans le fait que le décideur dispose de l'information nécessaire (coût marginal de l'objectif principal en fonction du niveau de réalisation des autres objectifs) à la mise en œuvre de la solution. En effet, cette information lui permet de connaître les alternatives qui comporteraient le moins d'effets «négatifs», d'en déduire les

«conséquences» sur les coûts et enfin de trouver les moyens les plus efficaces (stations d'épuration, réservoir, ...) pour la mise en œuvre de la solution.

En ce qui concerne la méthode GRG, le code fournit la valeur des «variables duales» du programme non linéaire (ou linéaire), ce qui représente une information très utile. Cette information réside dans la forme et l'interprétation de ces variables duales qui ont un sens spécial en économie. Elles reflètent le coût marginal du «changement au niveau de la concentration en OD» (autrement dit de la qualité) en divers points de la rivière. Cela signifie que les variables duales (non nulles) sont utilisées comme indicateurs des sections dans lesquelles des changements dans le niveau de la concentration en OD impliquent des économies dans le coût total du système.

Il reste cependant certains points à développer et qui ont trait à la modélisation de ce type de problèmes. Il est clair, par exemple, qu'il faudra incorporer le risque et l'incertitude, qui sont liés au caractère quasi-irréversible des décisions, dans l'analyse (approche dynamique).

D'autre part, les trois questions fondamentales établies par Kneese et Bower (1968) sur la définition de la qualité, sur les différentes alternatives d'amélioration de la qualité et sur la combinaison «optimale» de celles-ci représentent en fait trois problèmes particuliers.

Il est alors important de savoir de quelle façon s'y prendre pour passer d'un type de problème à un autre ou encore quel modèle de la qualité utiliser, et donc quel est l'avantage marginal du passage de l'un à l'autre.

Ce que l'on peut dire, c'est que les analyses de sensibilité aux paramètres montrent que certains processus sont décrits de façon trop rudimentaire.

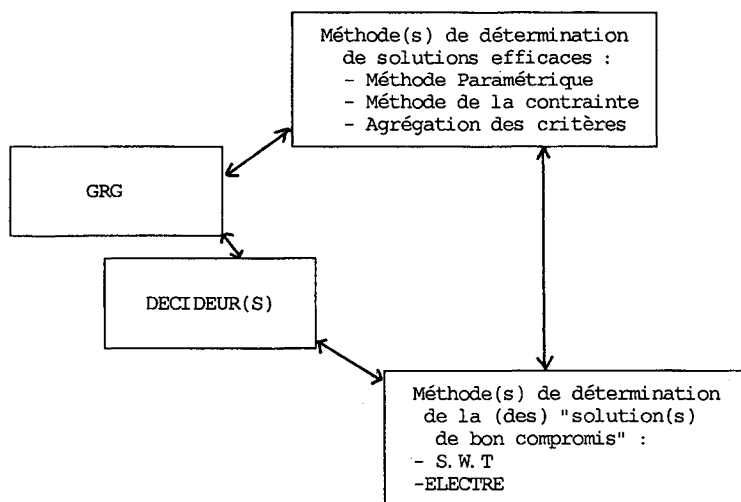
Il ne faut pas non plus oublier un point important qui caractérise ce type de problèmes: c'est l'intervention de plusieurs décideurs dans la réalité.

Finalement, notre étude, malgré les limites citées, présente à la fois un intérêt fondamental (exemplarité, simplicité structurale favorable à la modélisation) et un intérêt finalisé (devenir et impact des polluants organiques). Elle montre que les problèmes de réduction des coûts, des techniques de traitement et de la qualité peuvent être résolus de manière telle que soit trouvé un compromis entre les exigences économiques, les exigences sociales et le maintien de la qualité.

Du point de vue informatique, notre travail futur sera axé sur l'élaboration d'un logiciel interactif permettant de résoudre des problèmes d'optimisation non linéaire multicritères (génération de solutions efficaces, agrégation des critères, choix d'une «bonne» solution, ...) intégrant les développements les

plus récents concernant l'analyse multicritère et basés sur le matériel micro-informatique (qui est de plus en plus performant).

Le modèle informatique que nous avons développé est de la forme :



## DONNÉES

Section $i$	$q_i$	$a_i$
1. ....	45,2	3 331,84
2. ....	4,7	342,96
3. ....	4,2	1 539,69
4. ....	3,6	886,02
5. ....	0,5	73,83
6. ....	1,2	172,06
7. ....	0,8	189,40
8. ....	0,6	433,07
9. ....	0,5	199,94
10. ....	3,2	1 913,91
11. ....	8,4	1 741,59
12. ....	2,7	722,94
13. ....	0,6	238,59
14. ....	12,1	3 633,82
15. ....	8,4	2 266,56

$C_{sj} = 9,0 \text{ mg/l}$ ,  $j = 1, \dots, 15$ ,  $S = 3,47$ .

## BIBLIOGRAPHIE

- J. ABADIE, *The GRG Method for non Linear Programming*, in H. H. GREENBERG ed., Sijthoff & Noordhoff, Netherlands, 1978, p. 335-362.
- T. R. CAMP, *Water and Its Impurities*, Reinhold, N.Y., 1963.
- A. M. GEOFFRION, *Proper Efficiency and the Theory of Vector Maximization*, J. of Math. Anal. and Appl., 22, (3), 1968.
- Y. Y. HAIMES, W. A. HALL et H. T. FREEDMAN, *Multiobjective Optimization in Water Resources*, Elsevier Scientific Publishing Co. Amsterdam, 1975, 200 p.
- D. M. HIMMELBLAU, *Optimization of a Water Resource Systems by Nonlinear Programming*, Engineering Optimization, vol. 2, 1977, p. 229-238.
- A. V. KNEESE et B. T. BOWER, *Managing Water Quality: Economic, Technology, Institutions*, J. Hopkins Press, Baltimore, 1968, 320 p.
- H. W. KUHN et W. TUCKER, *Non Linear Programming*, Proc., Second Berkeley Symposium on Math., Statistics and Probability, Univ. of California Press, 1950, p. 481-492.
- J. C. LIEBMAN et W. R. LYNN, *The Optimal Allocation of Stream Dissolved Oxygen*, Water Resource Research, 2, (3), 1966, p. 581-591.
- H. M'SILTI, *Application de la programmation non linéaire et multiobjectif à la gestion des ressources en eau*, Université de Paris-Dauphine, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle, 1984.
- R. W. REID et S. J. CITRON, *On Non-Inferior Performance Index Vectors*, J. of Opt. Theory and Appl., vol. 7, n° 1, 1971.
- R. W. REID et V. VEMURI, *On the Non-Inferior Index Approach to Large Scale Multicriteria Systems*, J. of the Franklin Institute, vol. 291, n° 4, 1971.