

KAMEL BARKAOUI

BERNARD LEMAIRE

## **Composantes préconservatives minimales d'un réseau de Petri : étude structurelle**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 21, n° 3 (1987),  
p. 219-240

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1987\\_\\_21\\_3\\_219\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1987__21_3_219_0)

© AFCET, 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## COMPOSANTES PRÉCONSERVATIVES MINIMALES D'UN RÉSEAU DE PETRI : ÉTUDE STRUCTURELLE (\*)

par Kamel BARKAOUI et Bernard LEMAIRE <sup>(1)</sup>

---

**Résumé.** — On introduit une notion nouvelle dans les réseaux de Petri : celle de composante préconservative minimale (CPCM), qui renforce les liens entre un RdP et son graphe  $G=(P, T; \Gamma^+, V)$  et qui fournit un outil original pour déduire de la structure même du réseau, abstraction faite des marquages, des propriétés de son comportement. Une CPCM est un ensemble de places  $I$ , solution minimale, non vide de  $\Gamma^+(I)=\Gamma^-(I)$ .

On met d'abord en évidence plusieurs propriétés simples des CPCM puis on propose trois types de réductions qui permettent d'une part d'établir de nouvelles propriétés des CPCM et d'autre part de diminuer la taille du RdP limitant ainsi fortement le caractère combinatoire de la recherche des CPCM. Pour de nombreux exemples issus de la modélisation de systèmes concrets, la seule application systématique de ces réductions fournit l'ensemble des CPCM; quand tel n'est pas le cas, on propose un algorithme booléen de détermination des CPCM du réseau irréductible alors obtenu; de ces CPCM on peut alors à l'aide d'un procédé d'étiquetage déduire les CPCM du réseau initial.

**Mots clés :** Réseau de Petri; Graphe biparti; Composante conservative (minimale); Composante préconservative (minimale).

**Abstract.** — A new notion in Petri nets is introduced: the "Minimal Preconservative Components" (CPCM), that reinforces the links between a Petri net and its graph  $G=(P, T; \Gamma^+, V)$  and provides an original tool in order to deduce from the very structure of the net and without considering the markings, important behaviour properties. A CPCM is a non empty set of places,  $I$ , minimal of solution of  $\Gamma^+(I)=\Gamma^-(I)$ . We first prove several basic properties of any CPCM.

Next, we propose three types of reductions that allow, on one hand, to introduce further properties of any CPCM and, on the other hand, to limitate the combinatorial aspect of the CPCM determination. For most examples that modelize real life systems, the only application of these reductions provides the set of all CPCM otherwise, we propose a Boolean algorithm for finding the CPCM of the reduced net and a labelling process that allows to deduce the CPCM of the initial net.

**Keywords :** Petri Net; bipartite graphs; (minimal) conservative component; (minimal) pre-conservative components.

---

(\*) Reçu décembre 1986.

(1) Conservatoire National des Arts et Métiers, 292, rue Saint-Martin, 75003 Paris.

## INTRODUCTION

L'étude du comportement d'un réseau de Petri a, jusqu'à présent, été menée principalement à l'aide de méthodes algébriques. Les propriétés du graphe sous-jacent n'ont été que peu exploitées. Cependant, en introduisant une notion nouvelle, celle de « Composante Préconservative Minimale » ou « CPCM », nous pouvons déduire de la structure même du réseau — abstraction faite des marquages — des caractéristiques de son comportement (vivacité, borné, répétitif stationnaire, etc.).

Après avoir défini la notion de CPCM, nous mettons en évidence deux premières propriétés. Nous proposons ensuite trois types de réductions, d'application simple. Leur intérêt est double :

- restreindre grandement le caractère combinatoire de la détermination des CPCM;
- démontrer d'importantes propriétés de ces CPCM, liées notamment à l'existence de cheminements particuliers.

Enfin nous proposons un algorithme booléen qui, intégrant un procédé d'étiquetage, permet d'exhiber les CPCM du réseau de Petri considéré, en traitant seulement le réseau qui en est déduit par ces réductions. Plusieurs exemples classiques illustrent l'efficacité de la méthode.  $\square$

Soit un réseau de Petri, de graphe  $G=(P, T; \Gamma^+, V)$ ; on note  $\Gamma^+(x)$  les successeurs de  $x$  et  $\Gamma^-(x)$ , les prédécesseurs de  $x$ .

On rappelle que tout support  $K=\{p|p\in P, f_p>0\}$  d'un semi-flot  $f=(f_1, f_2, \dots, f_{|P|})$  vérifie :

$$\Gamma^+(K)=\Gamma^-(K)$$

[Soit  $t\in T$ ; si  $t\in\Gamma^+(K)$  et  $t\notin\Gamma^-(K)$ , la loi de Kirchhoff ne serait pas vérifiée en  $t$  et inversement].

DÉFINITION : On appelle « composante préconservative minimale » (ou « CPCM ») tout sous-ensemble de places  $I\neq\emptyset$ , solution minimale au sens de l'inclusion de :

$$\Gamma^+(I)=\Gamma^-(I).$$

*On confondra, par la suite, la CPCM  $I$  et le sous réseau de Petri qui a  $I$  pour ensemble des places : les transitions  $T_I$  de la CPCM  $I$  seront donc*

$$T_I=\Gamma^+(I)\cup\Gamma^-(I)=\Gamma^+(I)=\Gamma^-(I).$$

Notons que  $I$  est alors un verrou et, si les valuations sont non bloquantes, une trappe [Brams, 1983].

PROPRIÉTÉ 1 : Toute CPCM est connexe.

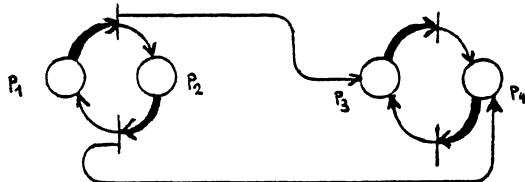
Soit  $I$  une CPCM comportant plusieurs composantes connexes; après la suppression d'une d'entre elles, on aurait  $I' \subset I$  strictement et  $\Gamma^+(I') = \Gamma^-(I')$ , ce qui contredit la minimalité de  $I$ .

PROPRIÉTÉ 2 (Propriété « propre ») : toute place d'une CPCM  $I$  telle que  $\Gamma^+(I) \neq \emptyset$  possède au moins une transition « propre » en entrée ou en sortie :

$$\forall p \in I, \exists t \in \Gamma^+(p) \cup \Gamma^-(p), \quad \Gamma^+(t) = \{p\} \quad \text{ou} \quad \Gamma^-(t) = \{p\}.$$

*Démonstration* : Supposons qu'il existe une place  $p$  d'une CPCM  $I$  ne possédant pas la propriété 2, alors  $I' = I - \{p\}$  vérifie aussi  $\Gamma^+(I') = \Gamma^-(I')$ , ce qui contredit la minimalité de  $I$ .

*Remarque* : La réciproque de la propriété 2 est fausse, comme le montre ce contre exemple :

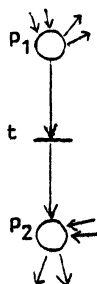


toute place de  $J = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  admet une transition propre en entrée ou en sortie (arcs gras) mais  $I = \{p_1, p_2\}$  est une CPCM.

Nous proposons maintenant trois types de réductions qui permettront d'une part d'établir de nouvelles propriétés des CPCM et d'autre part faciliteront leur détermination en limitant fortement son caractère combinatoire :

RÉDUCTION 1 : On considère une transition  $t$  telle que :  $|\Gamma^+(t)| = |\Gamma^-(t)| = 1$ .

Cas a :  $\Gamma^-(t) = \{p_1\}$ ,  $\Gamma^+(t) = \{p_2\}$  et  $p_1 \neq p_2$ .



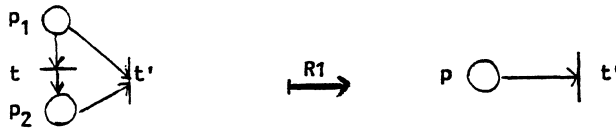
Soit une CPCM  $I$  :  $p_1 \in I \Rightarrow t \in \Gamma^+(I) \Rightarrow t \in \Gamma^-(I) \Rightarrow p_2 \in I$ . De façon analogue  $p_2 \in I \Rightarrow p_1 \in I$ .

On fusionnera alors les places  $p_1$  et  $p_2$  en une place unique  $p$  et on supprimera la transition  $t$  et les arcs adjacents à  $t$  :  $p$  sera telle que :

$$\Gamma^+(p) = \Gamma^+(p_1) \cup \Gamma^+(p_2) - \{t\}$$

$$\Gamma^-(p) = \Gamma^-(p_1) \cup \Gamma^-(p_2) - \{t\}$$

Puisque la réunion ensembliste est idempotente, dans l'exemple ci-dessous on ne figurera qu'un seul arc de  $p$  vers  $t'$  :



$$\text{Cas } b : \Gamma^+(t) = \Gamma^-(t) = \{p_1\}$$



On supprime alors  $t$  et les arcs  $(p_1, t)$  et  $(t, p_1)$ .

*Étiquetage des places* : initialement l'étiquette de chaque place  $p_i$  est  $\text{éti}(p_i) = p_i$ . Après application de R 1 à  $t$  :

dans le cas (a) on posera

$$\text{éti}(p) = \text{éti}(p_1) \wedge \text{éti}(p_2)$$

où  $\wedge$  est connecteur logique « ET »;

dans le cas (b) l'étiquette de  $p_1$  est inchangée.

L'intérêt de cet étiquetage apparaîtra lors de la détermination des CPCM du réseau initial à partir des CPCM du réseau réduit.

**PROPRIÉTÉ ( $\alpha$ )** : La transformée d'une CPCM  $I$  par application de R 1 est une CPCM  $J$  du RdP réduit [en effet si  $\Gamma^+(I) = \Gamma^-(I)$  alors *a fortiori* on a :  $\Gamma^+(J) = \Gamma^-(J)$ ; de plus  $I$  étant minimal,  $J$  l'est aussi]. Ainsi, si  $\Gamma^+(J) \neq \emptyset$ , toute place de  $J$  admet une transition propre en entrée ou en sortie.

**PROPRIÉTÉ ( $\beta$ )** : Un RdP fortement connexe initialement le reste après réduction par R 1 (R 1 ne restreint pas les possibilités de cheminement). Un RdP qui n'est pas fortement connexe peut le devenir par application de R 1;



on peut trouver  $i_1, i_2, \dots, i_k$  CPCM. Après réduction par R2, il n'en comporte plus qu'une :



Cette CPCM est alors réductible à une place unique en appliquant R1  $(k+1)$  fois.

*Étiquetage des places :* on posera, dans ce cas :

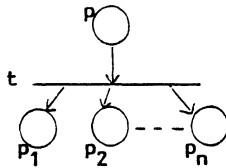
$$\text{éti}(p_1) := \text{éti}(p_1) \vee \text{éti}(p_2) \vee \dots \vee \text{éti}(p_k)$$

où  $\vee$  est le connecteur logique « OU ».

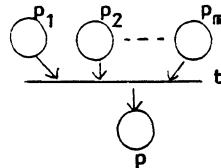
**RÉDUCTION R3 :** On considère une transition  $t$  telle que soit  $|\Gamma^+(t)|=1$  (cas 1) soit  $|\Gamma^-(t)|=1$  (cas 2).

Rappelons que le cas  $|\Gamma^+(t)|=|\Gamma^-(t)|=1$  est celui de la règle R1.

(a) on suppose  $p_i \neq p$  dans les deux cas ci-dessous :



Cas 1a



Cas 2a

Pour le cas 1a : si  $p$  appartient à une CPCM  $I$ ,  $I$  contient au moins une place  $p_i (i=1, 2, \dots, n)$ . Réciproquement si  $p_i$  appartient à  $I$ , alors  $p$  appartient à  $I$ . On pourra donc supprimer  $p$  et  $t$ ; on remplace la place  $p_i$  par la place  $p'_i$  dont les relations d'incidence sont définies ci-dessous ( $i=1, 2, \dots, n$ ).

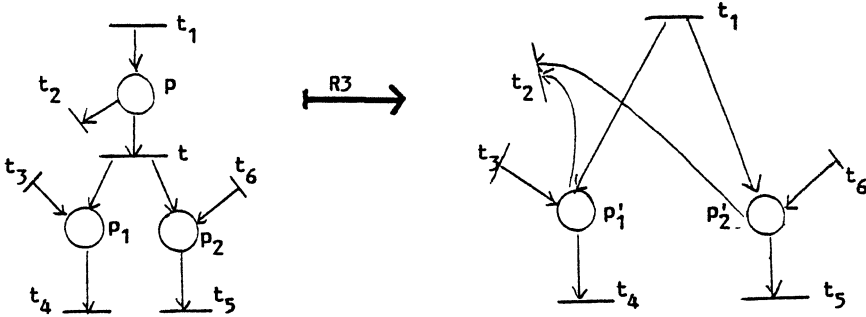
Pour le cas 2a : on transpose le raisonnement et l'on peut supprimer  $p$  et  $t$  et remplacer  $p_i$  par  $p'_i$  dont les relations d'incidence sont définies ci-dessous ( $i=1, 2, \dots, m$ ).

Pour les cas 1 et 2 on pose :

$$\Gamma^+(p'_i) = \Gamma^+(p_i) \cup \Gamma^+(p) - \{t\}$$

$$\Gamma^-(p'_i) = \Gamma^-(p_i) \cup \Gamma^-(p) - \{t\}.$$

Exemple :



Étiquetage des places : après application de R3 (cas a), on pose :

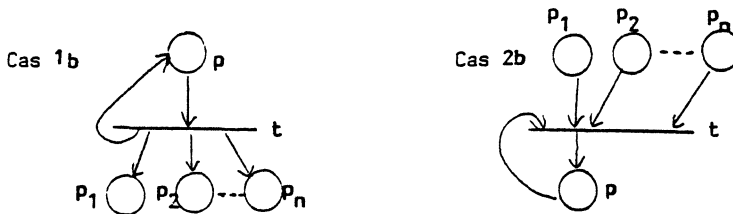
$$\text{éti}(p'_i) = \text{éti}(p_i) \wedge \text{éti}(p).$$

En effet à une CPCMC  $I'$  du réseau réduit par application de R3 correspond une CPCMC  $I$  du réseau avant réduction : si  $p'_i$  appartient à  $I'$  alors  $p_i$  et  $p$  appartiennent à  $I$ .

PROPRIÉTÉS : R3 dans le cas a a pour effet (de même que R1 dans le cas a) de diminuer d'une unité le nombre des places et celui des transitions. Par contre, le nombre d'arcs augmente au plus de :

$$\begin{aligned} & |\Gamma^-(p)| \cdot (n-1) + |\Gamma^+(p) - 1| \cdot (n-1) \quad \text{cas 1 a,} \\ & |\Gamma^+(p)| \cdot (m-1) + |\Gamma^-(p) - 1| \cdot (m-1) \quad \text{cas 2 a.} \end{aligned}$$

(b)  $p$  appartient à  $\Gamma^+(t)$  et à  $\Gamma^-(t)$  :



— Si  $\Gamma^+(p) = \Gamma^-(p)$ ,  $\{p\}$  est une CPCMC du réseau courant; en considérant l'étiquette de  $p$ , on obtient les CPCMC du réseau initial associées à  $p$  (si  $\text{éti}(p)$ )



ne contient que le connecteur  $\wedge$ , il ne correspond à  $p$  qu'une seule CPCM du réseau initial).

On peut alors supprimer  $p$  (et les arcs adjacents à  $p$ ) ainsi que les places  $p_i (i=1, \dots, n)$  qui ne peuvent appartenir à aucune CPCM (et les arcs adjacents à  $p_i$ )

— Si  $\Gamma^+(p) \neq \Gamma^-(p)$ , la place  $p$  est remplacée par une place  $p'$  et l'on supprime  $t$  :

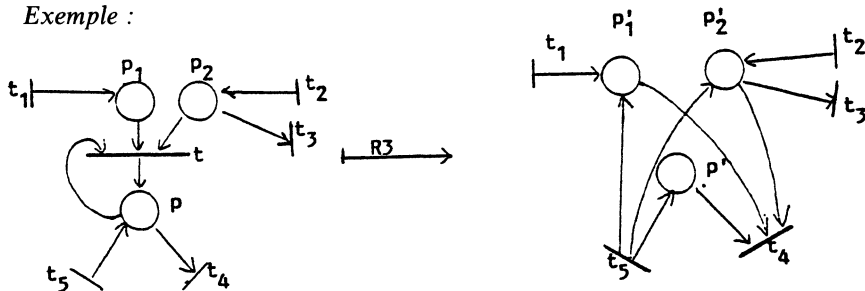
$$\Gamma^+(p') = \Gamma^+(p) - \{t\} \quad \text{et} \quad \Gamma^-\{p'\} = \Gamma^-\{p\} - \{t\}.$$

Chaque place  $p_i$  est remplacée par une place  $p'_i$  avec :

$$\Gamma^+(p'_i) = \Gamma^+(p) \cup \Gamma^+(p_i) - \{t\}$$

$$\Gamma^-(p'_i) = \Gamma^-(p) \cup \Gamma^-(p_i) - \{t\}$$

Exemple :



Étiquetage des places : après application de R3 (cas b), on pose :

$$\text{éti}(p') = \text{éti}(p)$$

et

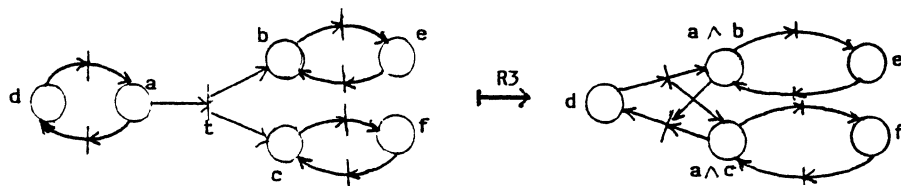
$$\text{éti}(p'_i) = \text{éti}(p_i) \wedge \text{éti}(p).$$

En effet, si  $p_i$  appartient à une CPCM  $I$  alors  $I$  contient aussi  $p$  : mais  $p$  peut appartenir à une CPCM  $I$  sans qu'aucune des places  $p_i$  n'appartienne à  $I$ .

De même que R1, la réduction R3 a les propriétés suivantes :

( $\alpha$ ) la transformée d'une CPCM par application de R3 est une CPCM du réseau réduit (comme on l'a vu plus haut).

(β) un RdP fortement connexe initialement le reste après réduction par R3; un réseau non fortement connexe peut le devenir :



On s'intéresse maintenant à la réduction par R1 et R3 d'une CPCM du réseau initial (et non plus à la réduction de l'ensemble du réseau) :

THEOREME . Un ensemble de places  $I = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$  est une CPCM si et seulement si le sous-réseau associé à  $I$  est réductible à une seule place  $p$  qui n'est adjacente à aucune transition, par application de R1 et/ou R3, et l'étiquette de cette place est :  $\text{éti}(p) = \bigwedge_{i=1}^k p_i$ .

Démonstration : Si  $I$  est constituée d'une seule place  $p$  telle que  $\Gamma^+(I) = \emptyset$ , le théorème est vrai.

Soit une CPCM  $I$  telle que  $\Gamma^+(I) \neq \emptyset$  : toute place  $p$  de  $I$  admet une transition  $t$  propre en entrée ou en sortie de  $p$  : R1 ou R3 est alors applicable à  $(p, t)$ . On a montré plus haut que la transformée  $I'$  d'une CPCM  $I$  par application de R1 ou R3 est une CPCM du réseau réduit : la propriété « propre » est encore vérifiée sauf si  $\Gamma^+(I') = \emptyset$  (mais alors le théorème est vrai) : toute place  $p'$  de la CPCM réduite admet une transition  $t'$  propre en entrée ou en sortie. Et ainsi de suite...

Lors de chaque application de R1 ou R3 :

— dans le cas  $a$ , le nombre de places et le nombre de transitions diminuent d'une unité :

— dans le cas  $b$ , seul le nombre de transitions décroît d'une unité.

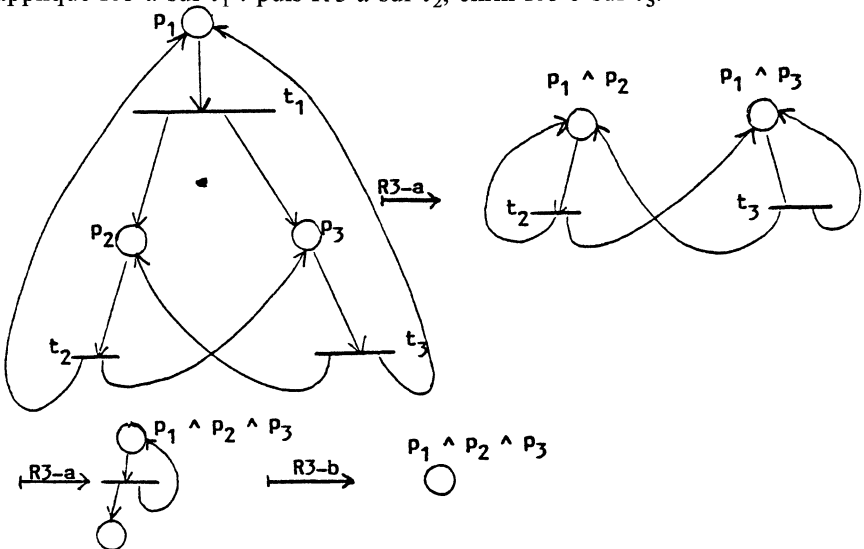
Une CPCM est connexe et le reste par réduction. Appliquons alternativement R1 ou R3 tant qu'il existe encore au moins une transition réductible.

En fin de réduction : soit il reste une seule place  $p$  : elle constitue une CPCM du réseau réduit (sinon R1 —  $b$  s'appliquerait), et  $\text{éti}(p) = \bigwedge_{i=1}^k p_i$ ;

soit il reste plusieurs places : elles ne peuvent admettre une transition propre (sinon R1 ou R3 s'appliqueraient).; or elles appartiennent à une CPCM  $\bar{I}$  du réseau réduit, mais en supprimant l'une ces places on obtiendrait encore une CPCM, ce qui contredit la minimalité de  $\bar{I}$ .

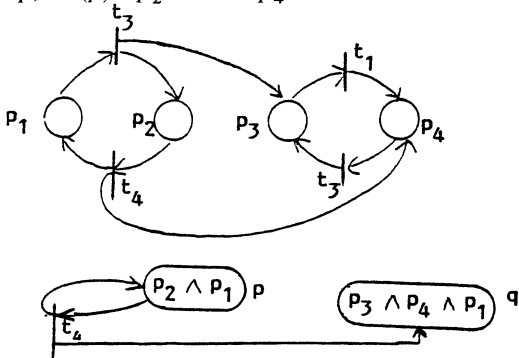
Réciproquement : soit un sous réseau  $I$  réductible par  $R1$  et/ou  $R3$ , à une seule place,  $p$ , adjacente à aucune transition. L'étiquette de  $p$  ne contient que des connecteurs  $\wedge$  :  $\text{éti}(p) = p_{i_1} \wedge p_{i_2} \wedge \dots \wedge p_{i_k}$  : alors  $I = \{p_{i_1}, p_{i_2}, \dots, p_{i_k}\}$  est une CPCM car lors de chaque réduction d'une transition par  $R1$  ou  $R3$ , la propriété propre était vérifiée et donc  $I$  vérifie la propriété propre.  $I$  est minimal sinon il ne serait pas réductible à une place.

Exemple 1 : Soit le réseau ci-dessous qui a pour places  $I = \{p_1, p_2, p_3\}$ . On applique  $R3-a$  sur  $t_1$  : puis  $R3-a$  sur  $t_2$ ; enfin  $R3-b$  sur  $t_3$ .



$I$  réductible à une seule place  $p$  d'étiquette  $\text{éti}(p) = \bigwedge_{p_i \in I} p_i$ , est bien une CPCM.

Exemple 2 : Le réseau ci-dessous, qui a pour places  $J = \{p_1, p_2, p_3, p_4\}$  vérifie la propriété « propre » mais n'est pas une CPCM car, quoique réductible à une place unique  $p$ ,  $\text{éti}(p) \neq p_2 \wedge \dots \wedge p_4$ .



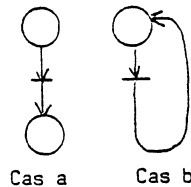
On applique  $R1-a$  sur  $t_1$ ,  $R1-b$  sur  $t_2$  puis  $R3-a$  sur  $t_3$  et enfin  $R3-b$  sur  $t_4$ .

On obtient alors une place unique  $p$  mais avec  $\text{éti}(p) = p_1 \wedge p_2$  : on a trouvé une CPCM incluse dans  $J$ .

PROPRIÉTÉ 3 : Pour toute CPCM  $I : |I| \leq |T_I| + 1$ ; pour toute CPCM fortement connexe (ou réductible par R1 à un réseau fortement connexe) :  $|I| \leq |T_I|$ .

De même, pour toute CPCM non réductible à une seule place par R1 :  $|I| \leq |T_I|$ .

*Démonstration* : Soit  $I$  une CPCM comportant  $|I|$  places et  $|T_I|$  transitions.



— Supposons  $I$  réductible à une place unique par la réduction R1. Lors de chaque application de R1, le nombre de places diminue d'une unité (cas a) ou reste constant (cas b) alors que le nombre des transitions diminue d'une unité. En fin d'application de R1, il reste une seule place; si R1 a été appliquée  $n_a$  fois dans le cas a et  $n_b$  fois dans le cas b, on a :

$$|I| = n_a + 1 \quad \text{et} \quad |T_I| = n_a + n_b; \quad \text{ainsi} \quad |I| \leq |T_I| + 1.$$

De plus, si la CPCM est fortement connexe, elle comporte au moins un circuit et  $n_b \geq 1$ , d'où  $|I| \leq |T_I|$ ; il en va de même si  $I$  est réductible par R1 à un réseau fortement connexe.

— Supposons que  $I$  n'est pas réductible à une place unique par R1 : on effectue les réductions par R1, tant que possible. On a alors un réseau irréductible par R1 comportant  $|I'|$  places et  $|T_{I'}|$  transitions avec

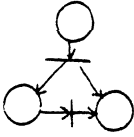
$$|I'| + n_a = |I| \quad \text{et} \quad |T_{I'}| + n_a + n_b = |T_I|;$$

dans ce réseau réduit on peut associer à chaque place  $p$  une transition « propre » : si une transition  $t$  était propre à deux places différentes (une fois en entrée et une fois en sortie) alors R1 serait applicable à  $t$  : contradiction.

D'où :  $|T_{I'}| > |I'|$  et par suite :  $|T_I| > |I|$ .

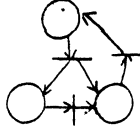
Exemples de cas où les bornes sont atteintes :

1)



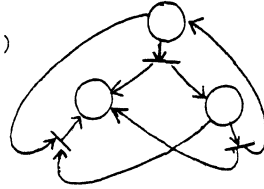
$|I| = 3, |T_I| = 2$   
ici  $|I| = |T_I| + 1$

2)



ici  $I$  est fortement  
connexe  
 $|I| = |T_I| = 3$

3)



$I$  n'est pas fortement  
connexe et n'est pas  
réductible par  $R1$ , mais  
 $|I| = |T_I| = 3$

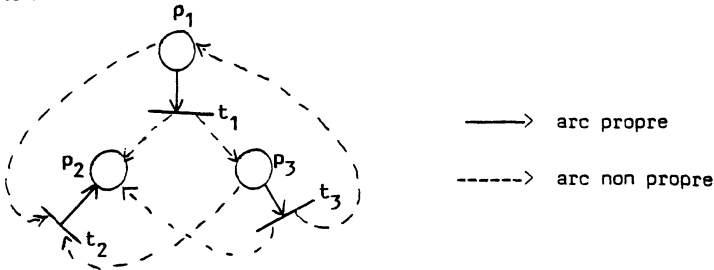
### PROPRIÉTÉS DES CYCLES ALTERNÉS

Soit le graphe biparti :  $G_I = (I, T_I, U_I)$  d'une CPCM ( $U_I$  désignant les arcs de la CPCM). On partitionne les arcs de  $U_I$  en deux classes :

- tout arc « gras » est un arc propre c'est-à-dire reliant une place à une transition qui lui est propre en entrée ou en sortie;
- tout arc « pointillé » est non propre.

On nomme « cycle alterné » tout cycle du graphe sur lequel deux arcs adjacents quelconques appartiennent à des classes différentes.

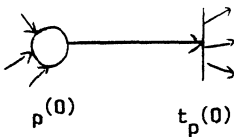
Exemple :



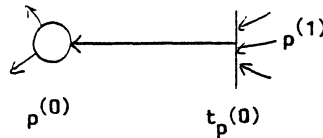
$(p_1, t_1, p_2, t_2, p_3)$  est un cycle alterné (mais pas un circuit).

**LEMME :** Toute CPCM d'un RdP fini non réductible par  $R1$  contient un cycle alterné.

**Démonstration :** Soit  $p^{(0)}$  une place quelconque d'une CPCM  $I$  non réductible par  $R1$ , et  $t_{p^{(0)}}$  une transition propre en entrée (a) [resp. en sortie (b)] à  $p^{(0)}$  :



(a)

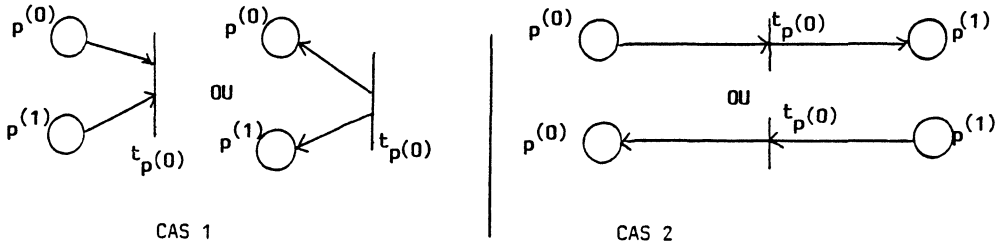


(b)

Il existe nécessairement une place  $p^{(1)} \in I$  en sortie de  $t_{p^{(0)}}$  (resp. en entrée); sinon on aurait  $\Gamma^+(I) \neq \Gamma^-(I)$ .

— si  $p^{(1)} = p^{(0)}$ , la CPCM  $I$  contient le cycle  $[p^{(0)}, t_{p^{(0)}}, p^{(0)}]$  qui est alterné [sinon  $t_{p^{(0)}}$  serait réductible par R 1].

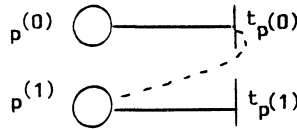
— sinon  $p^{(1)}$  admet une transition  $t_{p^{(1)}}$  qui lui est propre soit en entrée, soit en sortie. Montrons que  $t_{p^{(0)}} \neq t_{p^{(1)}}$ ; s'il n'en était pas ainsi, deux cas seraient possibles :



Dans le cas 1,  $t_{p^{(0)}}$  devrait être propre à  $p^{(0)}$  et à  $p^{(1)}$  en entrée (resp. en sortie) : contradiction.

Dans le cas 2,  $t_{p^{(0)}}$  serait propre à  $p^{(0)}$  en sortie et à  $p^{(1)}$  en entrée (ou inversement) :  $t_{p^{(0)}}$  serait alors réductible par R 1.

On a donc le cas ci-dessous, puisque  $t_{p^{(0)}} \neq t_{p^{(1)}}$  :



De même, il existe une place  $p^{(2)}$  en sortie de  $t_{p^{(1)}}$  si  $p^{(1)}$  est en entrée de  $t_{p^{(1)}}$  ou en entrée sinon. Si  $p^{(2)} \in \{p^{(0)}, p^{(1)}\}$ , la CPCM  $I$  contient un cycle alterné : les arcs  $(t_{p^{(1)}}, p^{(0)})$  ou  $(t_{p^{(1)}}, p^{(1)})$  ne peuvent être propres, sinon  $t_{p^{(1)}}$  serait réductible par R 1.

Et ainsi de suite : le nombre des places de  $I$  étant fini, il existe nécessairement une étape  $k$  pour laquelle  $p^{(k)} \in \{p^{(0)}, p^{(1)}, \dots, p^{(k-1)}\}$  : si  $p^{(k)} = p^{(j)}$  où  $j < k$ , le cycle alterné est :

$$[p^{(j)}, t_{p^{(j)}}, p^{(j+1)}, t_{p^{(j+1)}}, \dots, p^{(k-1)}, t_{p^{(k-1)}}, p^{(j)}].$$

**THEOREME :** Toute CPCM finie comportant un cycle alterné dont les arcs sont valués par 1, est non conservative.

En particulier toute CPCM non réductible par R 1, de valuation 1, est non conservative.

**Démonstration :** Soit une CPCM finie, non réductible par R 1 d'un RdP dont les arcs sont valués par 1.  $I$  comporte alors un cycle alterné; supposons  $I$

conservative; il existe un semi-flot  $f$  de support  $I : \|f\| = I$  (on ne peut avoir  $\|f\| \subset I$  strictement car alors  $I$  ne seraient pas minimale); on note  $f_j$  la composante de  $f$  associée à la place  $p^{(j)} \in I : f_j > 0$ .

La loi de Kirchhoff est vérifiée pour toute transition et en particulier pour les transitions du cycle alterné

$$\begin{aligned}
 & [p^{(j)}, t_{p^{(j)}}, p^{(j+1)}, t_{p^{(j+1)}}, \dots, p^{(k-1)}, t_{p^{(k-1)}}, p^{(j)}] : \\
 & \text{pour } t_{p^{(j)}} : 1.f_j = 1.f_{j+1} + \sigma_j \\
 & \text{pour } t_{p^{(j+1)}} : 1.f_{j+1} = 1.f_{j+2} + \sigma_{j+1} \\
 & \text{pour } t_{p^{(k-1)}} : 1.f_{k-1} = 1.f_j + \sigma_{k-1}
 \end{aligned}$$

Aucune des transitions  $t_i$  pour  $i = j, j+1, \dots, k-1$  n'étant réductible par R 1, on a :  $\sigma_i > 0$ .

En sommant ces relations membre à membre, il vient après simplification :

$$0 = \sigma_j + \sigma_{j+1} + \dots + \sigma_{k-1},$$

ce qui contredit  $\sigma_i > 0$ . Ainsi la CPCM  $I$  n'est pas conservative.

*Remarque :* Le théorème s'étend trivialement au cas où tous les arcs sont valués par le même entier  $k \geq 2$ .

## DÉTERMINATION DES CPCM

*L'énumération exhaustive des CPCM d'un RdP donné est un problème combinatoire, impraticable pour les réseaux de très grosse taille. Toutefois, dans les réseaux de Petri issus de la modélisation de systèmes concrets, cette taille est souvent assez limitée; de plus, pour de tels réseaux, le degré de chaque place est souvent faible, permettant ainsi de nombreuses réductions : dans beaucoup d'exemples concrets (tels la plupart de ceux de la bibliographie), la seule application des réductions R 1, R 2 et R 3 nous a permis d'obtenir directement les CPCM; pour ceux où ce n'est pas le cas, nous proposons une méthode booléenne à appliquer sur le réseau réduit.*

*Le théorème ci-dessous facilite la détermination des CPCM :*

**THÉORÈME :** *Soit une séquence de  $k$  réductions, chacune du type R 1, R 2 ou R 3, permettant de passer d'un RdP initial  $R^{(0)}$  à un réseau réduit  $R^{(k)}$ ; alors toute place  $q$  de  $R^{(k)}$  telle que  $\Gamma^+(q) = \Gamma^-(q)$  est une CPCM de  $R^{(k)}$  à laquelle correspond une famille de CPCM de  $R^{(0)}$  déterminées par l'étiquette de  $q$ .*

*Démonstration* : si dans  $R^{(k)}$  on a :  $\Gamma^+(q) = \Gamma^-(q)$ , alors  $\{q\}$  est une CPCM de  $R^{(k)}$  l'étiquette de  $q$  est de la forme :  $\bigwedge_{i=1, \dots, h_i} \bigvee_{j=1, \dots, l_i} p_i^j$ .

Cette étiquette apparaît comme un produit de sommes. Soit son développement en tant que somme de produits : à tout monôme (produit)  $\mu$  de ce développement associons l'ensemble des places  $I$  dont l'étiquette apparaît dans  $\mu$  : le sous-réseau défini par  $I$  est réductible à une seule place,  $q$ , par R1 et R3; c'est donc une CPCM.

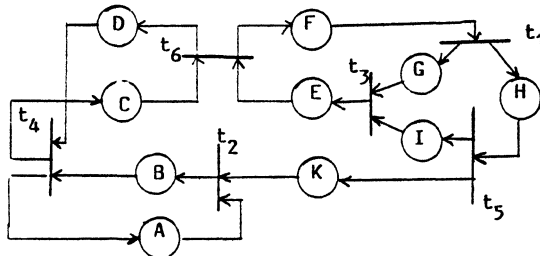
Conséquence : Après chaque application d'une réduction on pourra supprimer toute place  $q$  telle que  $\Gamma^+(q) = \Gamma^-(q)$  (et les arcs adjacents à  $q$ ). Cette opération conserve toutes les CPCM de  $R^{(0)}$  qui ne sont pas contenues dans  $q$ , vu l'étiquetage.

De plus, après cette suppression dans  $R^{(k)}$ , s'il existe une transition telle que  $\Gamma^+(t) = \emptyset$  ou  $\Gamma^-(t) = \emptyset$ , on peut supprimer  $t$  et les places adjacentes à  $t$ , car ces places ne peuvent être contenues dans aucune CPCM.

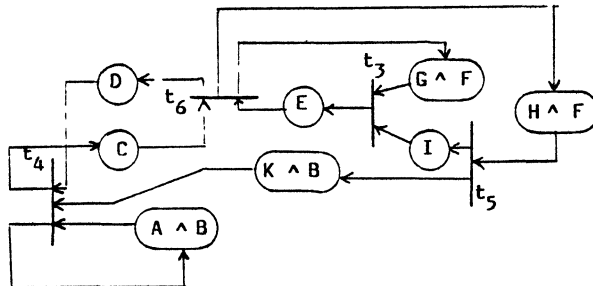
Remarquons que toutes ces suppressions peuvent rendre R1 ou R3 applicables à des transitions qui n'étaient pas réductibles dans  $R^{(k)}$ ; elles peuvent aussi engendrer la suppression de nouvelles transitions et ainsi de suite.

### Application des règles de réduction

*Exemple 1* (Martinez et Silva)



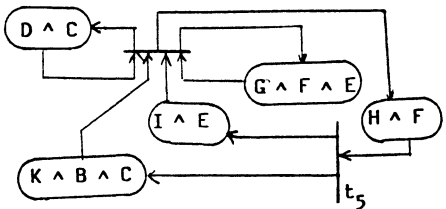
Appliquons R3 à  $t_1$  et  $t_2$  :



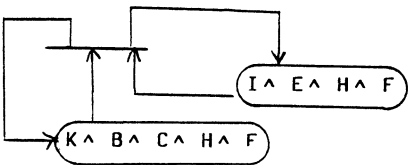


On remarque alors que la place  $q$  (d'étiquette  $A \wedge B$ ) est telle que  $\Gamma^+(q) = \Gamma^-(q)$  elle peut être supprimée pour la suite; elle correspond à la CPCM  $\{A, B\}$  du réseau initial. Cette suppression rend  $R3$  applicable à  $t_4$ .

Appliquons alors  $R3$  à  $t_3$  et à  $t_4$  :



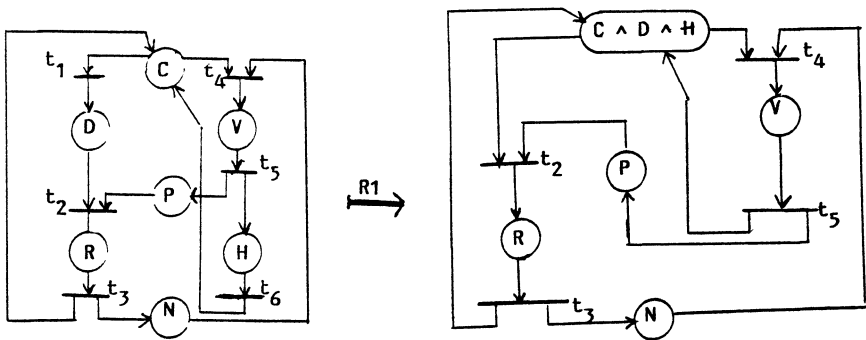
On trouve les CPCM  $\{D, C\}$  et  $\{G, F, E\}$ . L'application de  $R3$  à  $t_5$  fournit :



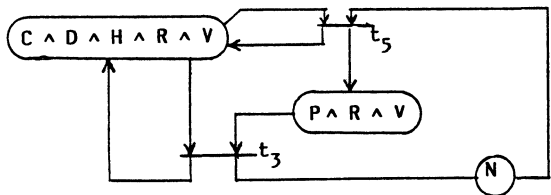
On obtient alors les CPCM  $\{I, E, H, F\}$  et  $\{K, B, C, H, F\}$ .

On vérifiera aisément que chacune de ces cinq CPCM est support d'un semi-flot. L'efficacité des réductions, ici, n'est pas due à ce que le RdP est un graphe d'événements, mais au faible degré des transitions.

Exemple 2 (Latteux) :  $R1$  s'applique à  $t_1$  et  $t_6$  :

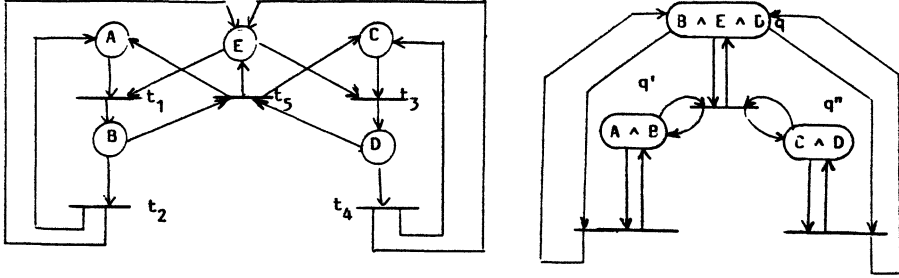


On peut alors appliquer  $R3$  à  $t_2$  et  $t_4$  :



Après la suppression de la CPCM  $\{C, D, H, R, V\}$ , on applique  $R1$  à  $t_3$  et on obtient la CPCM  $\{P, R, V, N\}$ . On vérifie que chacune est conservatrice.

### Exemple 3 (Sifakis)



On applique  $R3$  à  $t_1$  et  $t_3$ ; chaque place du réseau réduit vérifie  $\Gamma^+(p) = \Gamma^-(p)$ ; on obtient les trois CPCM du réseau :  $\{A, B\}$ ,  $\{B, E, D\}$  et  $\{C, D\}$ .

### Méthode booléenne

La méthode ci-dessous consiste à exprimer, en algèbre de Boole, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble de places  $J$  soit une *composante préconservatrice*. On exprimera dans un second temps qu'elle est minimale (les règles du calcul booléen : absorption, idempotence, permettront alors d'exhiber les CPCM).

Soit  $J$  une composante préconservatrice et une place  $p \in J$  :

— si  $p$  appartient à  $J$ , alors pour toute transition  $t_p^i \in \Gamma^+(p)$  ( $i=1, \dots, k_p$ )  $J$  doit inclure au moins une place de  $\Gamma^+(t_p^i)$ .

On n'a aucune implication si  $\Gamma^+(p) = \emptyset$ .

— si  $p$  appartient à  $J$ , alors pour toute transition  $\tau_p^j \in \Gamma^-(p)$  ( $j=1, \dots, l_p$ )  $J$  doit inclure au moins une place de  $\Gamma^-(\tau_p^j)$ .

On n'a aucune implication si  $\Gamma^-(p) = \emptyset$ .

En effet, sinon l'on aurait  $\Gamma^+(J) \neq \Gamma^-(J)$  dans chacun de ces deux cas.

Soit  $\mathcal{P}$  la variable logique d'appartenance de  $p$  à  $J$  (respectivement,  $\mathcal{Q}$  pour  $q$ ) : soient  $x_p$  et  $x_q$  les variables booléennes correspondantes :

$$x_p = 1 \quad \text{si } p \in J, \quad x_p = 0 \quad \text{sinon.}$$

Puisque  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$  se traduit en algèbre de Boole par  $\bar{x}_p + x_q = 1$ , il vient :

$$\forall p \in J, \quad \forall t_p^i \in \Gamma^+(p) : \quad \bar{x}_p + \sum_{q \in \Gamma^+(t_p^i)} x_q = 1$$

et

$$\forall p \in J, \quad \forall \tau_p^j \in \Gamma^-(p) : \quad \bar{x}_p + \sum_{q \in \Gamma^-(\tau_p^j)} x_q = 1.$$

En appliquant la règle classique du calcul booléen :  $(\bar{x} + y) \cdot (\bar{x} + z) = \bar{x} + yz$  :

$$\forall p \in J :$$

$$\bar{x}_p + \left( \prod_{i=1, \dots, k_p} \sum_{q \in \Gamma^+(t_p^i)} x_q \right) \cdot \left( \prod_{j=1, \dots, l_p} \sum_{q \in \Gamma^-(\tau_p^j)} x_q \right) = 1.$$

Des équations booléennes sont simultanément égales à 1, si leur produit est égal à 1. D'où l'équation déterminant les *composantes préconservatives* d'un RdP :

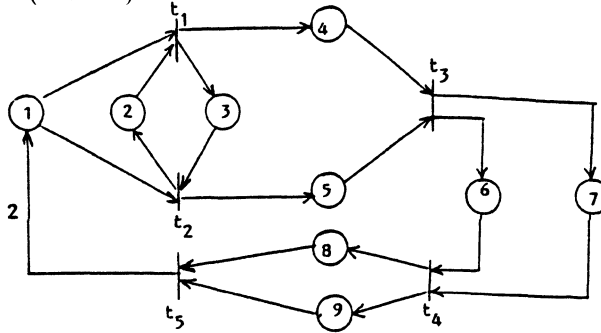
$$\prod_{p \in \mathcal{P}} \left[ \bar{x}_p + \left( \prod_{i=1, \dots, k_p} \sum_{q \in \Gamma^+(t_p^i)} x_q \right) \cdot \left( \prod_{j=1, \dots, l_p} \sum_{q \in \Gamma^-(\tau_p^j)} x_q \right) \right] = 1$$

Le développement de ce produit booléen, que l'on simplifie par absorption et idempotence, fournit une somme de monômes.

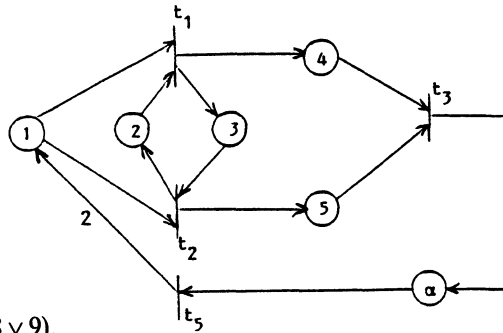
En supprimant alors les variables niées (et en appliquant, au besoin, à nouveau l'absorption et l'idempotence) on obtient une somme de monômes comportant uniquement des variables affirmées : on peut démontrer que chaque monôme est alors associé à une CPCM (et réciproquement).

*Cette méthode est apparentée à celle de Maghout pour la détermination des ensembles stables minimaux d'un graphe [1]. Voir aussi Sifakis [16].*

## Exemple 4 (Memmi)

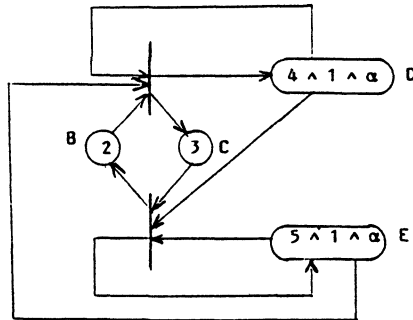


On applique  $R_2$  aux places  $p_6$  et  $p_7$ , ainsi que  $R_2$  aux places  $p_8$  et  $p_9$ .  $R_1$  s'applique alors à  $t_4$  :



$$\alpha = (6 \vee 7) \wedge (8 \vee 9).$$

$R_1$  s'applique alors à  $t_5$ , puis  $R_3$  à  $t_3$ .



Ce RdP n'est plus réductible.

Appliquons la méthode booléenne :

$$\mathcal{B} \Rightarrow (\mathcal{C} \text{ ou } \mathcal{D}) \text{ et } (\mathcal{C} \text{ ou } \mathcal{D} \text{ ou } \mathcal{E})$$

$$\mathcal{C} \Rightarrow (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{D} \text{ ou } \mathcal{E}) \text{ et } (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{E})$$

$$\mathcal{D} \Rightarrow (\mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{E})$$

$$\mathcal{E} \Rightarrow (\mathcal{C} \text{ ou } \mathcal{D})$$

$$\bar{b} + c + d = 1$$

$$\bar{c} + b + e = 1$$

$$\bar{d} + b + e = 1$$

$$\bar{e} + c + d = 1$$

$$(b \dot{+} e \dot{+} \bar{c} \bar{d}).(c \dot{+} d \dot{+} \bar{b} \bar{e}) = 1,$$

soit :

$$bc \dot{+} bd \dot{+} ce \dot{+} de \dot{+} \bar{b} \bar{c} \bar{d} \bar{e} = 1.$$

Le monôme  $\bar{b} \bar{c} \bar{d} \bar{e}$  correspond à  $I = \emptyset$ , qui n'est pas une CPCPM (mais que la méthode fournit systématiquement). Le monôme  $bc = 1$  correspond à la CPCPM  $\{B, C\}$  du réseau réduit qui elle-même correspond à la CPCPM  $\{2, 3\}$  du réseau initial.

Le monôme  $ce = 1$  correspond aux quatre CPCPM (cf. l'étiquette de  $E$ ) :

$$\{3, 5, 1, 6, 8\} \quad \{3, 5, 1, 6, 9\} \quad \{3, 5, 1, 7, 8\} \quad \{3, 5, 1, 7, 9\}.$$

Le monôme  $bd = 1$  correspond aux quatre CPCPM :

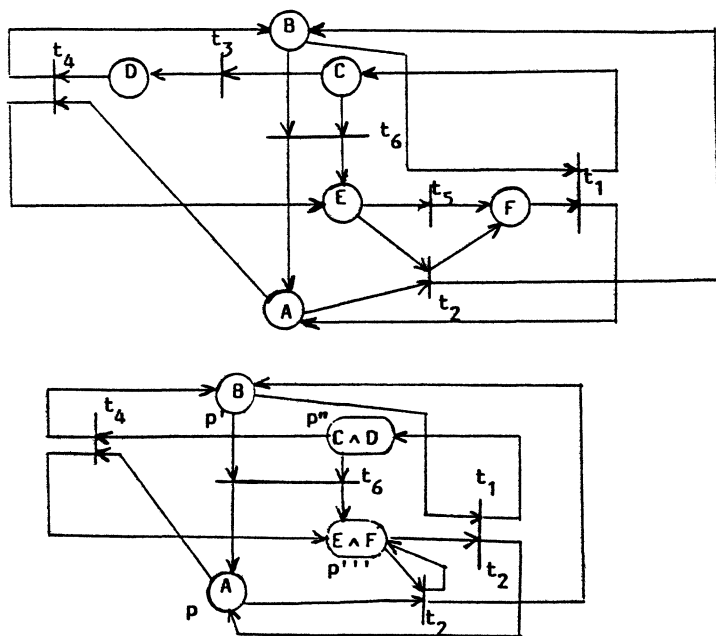
$$\{2, 4, 1, 6, 8\} \quad \{2, 4, 1, 6, 9\} \quad \{2, 4, 1, 7, 8\} \quad \{2, 4, 1, 7, 9\}$$

Le monôme  $de = 1$  correspond aux quatre CPCPM :

$$\{1, 4, 5, 6, 8\} \quad \{1, 4, 5, 6, 9\} \quad \{1, 4, 5, 7, 8\} \quad \{1, 4, 5, 7, 9\}.$$

On peut vérifier que chacune de ces 13 CPCPM est conservative : on retrouve alors les 13 semi-flots obtenus dans [Memmi, 1983].

*Exemple 5 (Memmi) :* On peut appliquer  $R1$  à  $t_3$  et  $t_5$ .



Aucune transition n'est alors réductible.

On note respectivement  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $e$  les variables booléennes d'appartenance de  $p$ ,  $p'$ ,  $p''$  à une composante préconservative  $J$ . Il vient :

$$(\bar{a} + b + ce) \cdot (\bar{b} + a + ce) \cdot (\bar{c} + e + ab) \cdot (\bar{e} + c + ab) = 1$$

Soit  $ab + ce + \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} = 1$ .

D'où les deux CPCPM  $\{A, B\}$  et  $\{C, E\}$ . Chacune est support d'un semi-flot.

## CONCLUSION

Ce premier article présente la notion nouvelle de CPCPM dont nous avons établi plusieurs propriétés importantes. Leur détermination, à l'aide des réductions et de l'étiquetage, sur les réseaux issus de la modélisation de systèmes réels, est aisée (même si dans le cas général, leur énumération exhaustive est un problème non polynomial).

Ultérieurement nous montrerons comment, en reliant la notion de CPCPM à celles de semi-flot, de fuite et de piège [11], l'on peut caractériser le comportement du réseau de Petri et ceci, dans certains cas, par la considération d'une seule des CPCPM de ce réseau. Nous établirons aussi le lien entre CPCPM et trappes ou verrous minimaux, que nous pourrions alors caractériser plus simplement qu'actuellement.

## BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. G. BERTHELOT, *Transformations et analyse de réseaux de Petri, applications aux protocoles*, Thèse d'état, Paris-VI, juin 1983.
3. G. W. BRAMS, *Réseaux de Petri : théorie et pratique*, Masson, t. I, décembre 1982.
4. F. COMMONER, A. HOLT, S. EVEN et A. PNUELI, *Marked Directed Graphs*, Journal of computer system and sciences, vol. 5, n° 5, octobre 1971, p. 511-523.
5. F. COMMONER, *Deadlock in Petri Nets*, Applied data research inst., Wakefield, Mass, CA 7206-2311, 1972.
6. M. HACK, *Extended State-Machine Allocatable Nets an Extension of Free-Choice Petri Net Results*, M.I.T., Cambridge, Mass. Project MAC, CSE-MEMO 78-1, 1973.
7. M. JANTZEN et R. VALK, *Formal Properties of Place/Transition Nets*, Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, Hambourg, octobre 1979.

8. K. LAUTENBACH et H. SCHMID, *Use of Petri Nets for Proving Correctness of Concurrent Process System*, Information processing, North Holland, 1974, p. 187-191.
9. M. LATTEUX, *Synchronisation de processus*, R.A.I.R.O. Informatique, vol. 14, n° 2, 1980, p. 103-135.
10. J. MARTINEZ et M. SILVA, *A Simple and Fast Algorithm to Obtain all Invariants of a Generalized Petri Net*, 2nd Eur. Work on Application and Theory of Petri Nets, Bad Honnef, 1981.
11. G. MEMMI, *Méthode d'analyse de réseaux de Petri, réseaux à files et application aux systèmes temps réel*, Thèse d'État, Paris-VI, juin 1983.
12. G. MEMMI et G. ROUCAIROL, *Linear Algebra in Net Theory*, Proc. of Advanced Course on General Net Theory of Processes and Systems, W. BRAUER éd. Hambourg, 1979 et Springer Verlag, L.N.C.S. 84, 1980.
13. J. L. PETERSON, *Petri Net Theory and the Modeling of Systems*, Prentice Hall, 1981.
14. C. A. PETRI, *Introduction to General Net Theory of Processes and Systems*, Hambourg, 1974, also in Lectures notes in Computer Science, n° 84, Springer Verlag, Berlin 1980.
15. C. RAMCHANDANI, *Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets*, Ph. D. thesis, M.I.T., Cambridge, Mass., Project MAC TP 120, février 1974.
16. J. SIFAKIS, *Le contrôle des systèmes asynchrones : concepts propriétés, analyse statique*, Thèse d'État, Université Scientifique et Médicale de Grenoble, juin 1979.
17. J. M. TOUDIC, *Algorithmes d'analyse structurelle des réseaux de Petri*, Thèse de 3° cycle, Paris-VI, octobre 1981.
18. *Numéro spécial Réseaux de Petri*, Technique et science informatiques, T.S.I.-R.A.I.R.O., vol. 4, n° 1, 176 p., Dunod, Paris; janvier-février 1985.