RAIRO. Recherche opérationnelle

D. Page

Objectif stable de vente et politique de commissionnement dans un système ouvert

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 21, nº 2 (1987), p. 153-174

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1987__21_2_153_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 21, n° 2, mai 1987, p. 153 à 174)

OBJECTIF STABLE DE VENTE ET POLITIQUE DE COMMISSIONNEMENT DANS UN SYSTÈME OUVERT (*)

par D. PAGE [1]

Résumé. – *On se situe dans une entreprise multiproduit dont les clients passent d'une classe d'achat à une autre selon des probabilités de transition constantes dans le temps. La rentabilité d'un client d'une classe donnée est une variable aléatoire. A chaque période, on détermine la répartition de la* nouvelle *clientèle que l'entreprise doit acquérir de façon à minimiser la variance de son bénéfice tout en assurant un bénéfice espéré minimum. On détermine également la politique de commissionnement que l'entreprise doit pratiquer auprès de ses intermédiaires commerciaux de façon à acquérir cette nouvelle clientèle désirée.*

Mots clés : Système markovien ouvert; ventes multiproduit; commissionnement; analyse moyenne-variance.

Abstract. – *We study a firm where customers move from a buying class to another according to fixed transition probabilities. The customer return for a given class is a random variable. On a period T, we seek* new *customers repartition in the different classes which minimizes the variance of global return for a given expected return. We extend analysis for firms which use commercial intermediaries and determine simultaneously optimal commission policy and optimal new customers repartition.*

Keywords : Opened markovian system; multiproduct sales; commission plan; E-V analysis.

INTRODUCTION

Dans une entreprise multiproduit dont le taux de rotation de la clientèle est faible, la maîtrise à long terme de l'évolution de l'état de cette clientèle est vitale. C'est à ce problème auquel nous nous intéressons dans le contexte particulier d'entreprises vendant à des clients « semi-captifs » des contrats à durée déterminée. Par client « semi-captif », on entend client dont le besoin de renouvellement des contrats à l'échéance est quasi-automatique.

(*) Reçu novembre 1985.
(1) I.A.E., 29, avenue Robert-Schuman, 13617 Aix-en-Provence.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/87/02 153 22/$ 4.20

La clientèle de l'entreprise est subdivisée en n classes de clients définies de façon à ce que deux clients appartenant à une même classe dégagent en probabilité la même distribution de revenu net. A un moment donné, l'état de la clientèle est décrit par le vecteur des nombres de clients appartenant aux différentes classes. Comme dans le modèle de Markov ([2]), on considère qu'en une période, un client passe d'une classe à l'autre selon des probabilités de transition constantes dans le temps. Mais contrairement au modèle de Markov, on travaille dans un système qu'on appelle ouvert dans le sens où à chaque période, des individus entrent (les nouveaux clients) et sortent de l'entreprise.

Cette différenciation par rapport aux modèles markoviens est d'autant plus importante qu'à terme, toutes choses égales par ailleurs, la seule politique de répartition des nouveaux clients sur les différentes classes détermine entièrement l'état de la clientèle. Aussi, dans une analyse à long terme est-il primordial de choisir avec discernement les objectifs de répartition de la nouvelle clientèle sur les différentes classes.

C'est à ce problème que nous nous intéressons dans le contexte de décision précisé ci-après.

La vente ferme de contrats à durée déterminée génère une rentabilité qui peut être fortement aléatoire en raison même de la nature de l'opération (ex. un contrat d'assurance). L'objectif retenu de l'entreprise n'est donc pas la seule espérance de rentabilité comme il est souvent pratiqué dans d'autres contextes en marketing (*cf.* [7]). Mais à l'instar de Corstiens et Weinstein [3], on intègre à l'analyse la variance de la rentabilité. Plus précisément, on recherche la répartition des nouveaux clients sur les différentes classes qui doit être pratiquée de façon à minimiser la variance de la rentabilité tout en atteignant par client une rentabilité espérée donnée.

Dans un deuxième temps, on considère que l'entreprise passe par des intermédiaires commerciaux pour réaliser ses ventes. On détermine alors la politique de commissionnement que l'entreprise doit pratiquer pour inciter les intermédiaires à réaliser ses objectifs de vente alors que ces derniers ont des contraintes fixes de temps disponible.

([2]) On rappelle que le modèle markovien est un cas particulier du Linear Learning model (*cf.* notamment [2, 8]). En effet, dans le L.L.M., on considère que l'état de la clientèle en $t+1$ découle de l'état de la clientèle en t et $t-1$.

I. OBJECTIFS DE VENTE OPTIMA

La prise en compte du temps amène à considérer l'ensemble des clients comme un système que nous présentons dans un premier temps. Dans un deuxième temps, nous recherchons l'état stable optimum de ce système.

I. a. Présentation du système client

Nous nous intéressons ici à une famille générale de classes de clients d'une entreprise telle qu'à chaque client d'une même classe on puisse attacher un revenu net aléatoire $\tilde{r}_i$, revenu net supposé le même pour tous les clients de la classe i. Nous appellerons par la suite « système client interne de l'entreprise » la famille des clients effectifs de l'entreprise à un moment donné t. Les clients potentiels en t seront considérés comme constituant une classe à part — la classe « amont » — et les anciens clients à t constitueront la classe « aval ». Les classes amont et aval sont considérées en dehors du système interne et définissent le système externe. L'ensemble du système externe et du système interne est dit définir le système global (cf. *fig.* 1).

On note

T = nombre de périodes élémentaires; on utilisera aussi T pour signifier l'ensemble des périodes élémentaires de 1 à T;

I = ensemble des classes élémentaires du système interne.

L'état du système à t peut être défini par :

x_{it} = nombre de clients appartenant à la classe $i\,(i \in I)$ durant la période élémentaire $t \in T$ (état de la classe i à t);

$\underline{x}_t = \sum_{i \in I} x_{it}$ (effectif du système interne à t);

$\mathbf{x}_t = (x_{it};\ i \in I)$ (vecteur définissant l'état du système interne à t).

Pendant une période t, ce système dégage un revenu net aléatoire :

$$\tilde{b}_t = \mathbf{x}_t \tilde{\mathbf{r}}_t (\text{avec}\, \tilde{\mathbf{r}} = \tilde{r}_i;\ i \in I). \tag{1}$$

L'état du système interne en $t+1$ découle de l'état du système interne en t ainsi que des nombres des clients, venant du système externe, qu'on décide de faire entrer dans les différentes classes i du système interne (cf. *fig.* 1).

Plus précisément, on considère qu'un client passe de la classe $i \in I$ à la classe $j \in I$ en une période élémentaire selon une probabilité p_{ij} et qu'il passe de la classe $i \in I$ au système externe aval selon une probabilité p_{in+1}. Par ailleurs, à chaque période $t+1$, on peut décider de faire passer du système

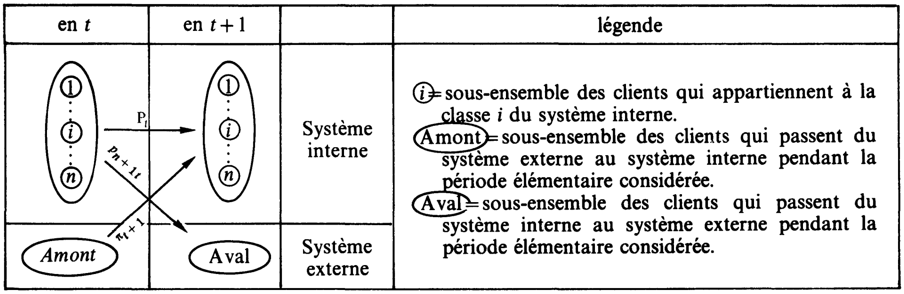

Figure 1 — Système global [3].

externe au système interne un certain nombre de clients. Le nombre de ces clients est déterminé de façon à induire un taux d'accroissement (g_{t+1}) du nombre global des clients qui appartiennent au système interne. Si l'on note :

$$\mathbf{p}_{n+1}=(p_{in+1};\ i\in I)$$
$$P=(p_{ij};\ i,j\in I),$$

alors le nombre de clients qu'on doit faire entrer dans le système interne en $t+1$ est donné par :

$$(\mathbf{x}_t\,\mathbf{p}_{n+1}+g_{t+1}\,\underline{x}_t).$$

Le produit scalaire $\mathbf{x}_t\,\mathbf{p}_{n+1}$ correspond à la fois au total des clients qui sortent pendant la période et au total des clients à faire rentrer pour conserver un même effectif dans le système.

On suppose que l'on répartit les clients venant du système externe amont sur chaque classe $i\in I$ selon un pourcentage π_{it}. Ces pourcentages (variables décisionnelles) sont à définir au mieux selon des critères que l'on précisera par la suite. On supposera pour simplifier que les π_{it} ne dépendent pas de t.

[3] La représentation de ce système global a été réalisée conjointement avec R. Trémolières dans le cadre d'une étude très générale de l'évolution des systèmes markoviens ouverts (à paraître).

Si on note :

$$\boldsymbol{\pi}=(\pi_i;\ i\in I),$$

$\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\pi})$ = état du système interne en t compte tenu de ce que les clients venant du système externe amont sont répartis selon le vecteur $\boldsymbol{\pi}$,

le système interne évolue dans le temps comme suit :

$$\bullet \quad \mathbf{x}_{t+1}(\boldsymbol{\pi})=\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\pi})\,P+(\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\pi})\,\mathbf{p}_{n+1}+g_{t+1}\,\underline{x}_t(\boldsymbol{\pi}))\,\boldsymbol{\pi},\qquad \forall\, t\in T. \tag{2}$$

Dans ce paragraphe, on cherche un vecteur $\boldsymbol{\pi}$ qui minimise la variance de la rentabilité calculée sur T tout en assurant une espérance de revenu net par client égale à une valeur μ donnée, indépendante de $i\in I$ et indépendante de $t\in T$.

Enfin, on distingue dans I un sous-ensemble I^0 tel qu'un client du système amont ne puisse rentrer dans le système interne que par une des classes de I^0.

En partant d'un état initial $\mathbf{x}_0$ du système interne, le problème qu'on veut résoudre peut se modéliser comme suit :

$$\underset{(\boldsymbol{\pi})}{\underline{\text{minimiser}}}\ \operatorname{Var}\Big[\sum_{t\in T}\tilde{b}_t\Big]$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{lr}
\tilde{b}_t=\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\pi})\,\tilde{\mathbf{r}};\qquad t\in T & (1)\\
\mathbf{x}_{t+1}(\boldsymbol{\pi})=\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\pi})\,\mathrm{P}+(\mathbf{x}_t(\boldsymbol{\pi})\,\mathbf{p}_{n+1}+g_{t+1}\,\underline{x}_t(\boldsymbol{\pi}))\,\boldsymbol{\pi};\quad t\in T & (2)\\
\mathrm{E}\Big[\sum_{t\in T}\tilde{b}_t\Big]\geqq\mu\sum_{t\in T}\underline{x}_t & (3)\\
(\boldsymbol{\pi},\,\mathbf{1})=1\qquad(\mathbf{1}=\text{vecteur unité}) & (4)\\
\pi_i\geqq 0;\qquad i\in I^0 & (5)\\
\pi_i=0;\qquad i\in\bar{I}^0\quad(\bar{I}^0=I-I^0). & (6)
\end{array}\right\}\quad (\mathrm{I})$$

Ce modèle est du type programmation quadratique ou programmation linéaire selon la forme de l'expression : $\operatorname{Var}\big[\sum_{t\in T}\tilde{b}_t\big]$. De ce fait, il peut être résolu par des algorithmes classiques. Il est cependant intéressant d'étudier le cas où le système client atteint un état stable lorsque l'on a $T\to\infty$. Nous présentons ce cas dans le paragraphe suivant.

I. b. Étude du système client à l'état stable

Nous proposons ci-après une transformation du modèle basée sur le fait que, sous certaines conditions, un vecteur π constant entraîne une stabilité de l'état du système interne (l'état stable est noté $\mathbf{x}_*$).

Par ailleurs, on suppose que les revenus nets — ou bénéfices —, $\tilde{b}_t$, sont indépendants, i. e. :

$$\operatorname{Var}[\sum_{t \in T} \tilde{b}_t] = \sum_{t \in T} \operatorname{Var}[\tilde{b}_t].$$

En premier lieu, on présente les conditions de stabilité ainsi que l'ensemble des solutions stables accessibles. Ceci est fait en nous basant sur des résultats énoncés par Bartholomew [1] ([4]).

Au préalable, nous définissons :

$$Q(\pi) = P + \mathbf{p}_{n+1}\,\pi = (q_{ij}(\pi);\, i, j \in I)$$

$\mathbf{1}$ = vecteur composé de 1;

$(\mathbf{1})$ = matrice unité;

$(\,.\,)_i$ = colonne indicée i de la matrice $(\,.\,)$.

Les résultats de Bartholomew appliqués à notre problème s'énoncent comme suit :

RÉSULTAT 1 : *Lorsque le taux net de croissance est nul : $g_t = 0$; $\forall\, t \in T$ alors pour tout $t \in T$ assez grand et π constant dans le temps, le système interne atteint un équilibre défini comme suit :*

$$\mathbf{x}_t(\pi) \to \mathbf{x}_*(\pi) = \underline{x}_0\, \mathbf{q}_*(\pi),$$

avec

$$\lim_{t \to \infty} Q^t(\pi) = \begin{matrix} \mathbf{q}_*(\pi) \\ \vdots \\ \mathbf{q}_*(\pi) \end{matrix}$$

$$(\mathbf{q}_*(\pi),\ \mathbf{1}) = 1.$$

([4]) Bartholomew détermina ses résultats lors d'études sur l'évolution d'une hiérarchie de pouvoir. Il applique également ses résultats à l'étude de l'évolution d'un système universitaire.

RÉSULTAT 2 : *Lorsque le taux net de croissance tend vers zéro :*

$$\lim_{t \to \infty} g_t = 0, \tag{7}$$

alors on obtient pour $t \in T$ assez grand et π constant dans le temps :

$$\mathbf{x}_t(\pi) \to \mathbf{x}_*(\pi) = \underline{x}_* \mathbf{q}_*(\pi)$$

où $\mathbf{q}_*(\pi)$ est défini comme au résultat 1 et

$$\underline{x}_* = \lim_{t \to \infty} \underline{x}_t = \lim_{t \to \infty} \prod_{\tau=1}^{t-1} (1+g_\tau)\, \underline{x}_0.$$

A partir du résultat 2, lorsque la condition de l'équation (7) est satisfaite, on peut déterminer l'ensemble X_* des vecteurs stables $\mathbf{x}_*(\pi)$ lorsque π varie. Ces vecteurs $\mathbf{x}_*(\pi)$ doivent satisfaire les équations (4), (5), (6) ainsi que l'équation (8) ci-après obtenue à partir de l'équation (2)

$$\mathbf{x}_*(\pi) = \mathbf{x}_*(\pi)\, P + \mathbf{x}_*(\pi)\, \mathbf{p}_{n+1}\, \pi. \tag{8}$$

Et enfin on dimentionne le vecteur $\mathbf{x}_*(\pi)$ comme suit :

$$(\mathbf{x}_*(\pi),\ \mathbf{1}) = \underline{x}_*. \tag{9}$$

Après transformation, on arrive au résultat 3 qui suit :

RÉSULTAT 3 : *Lorsque le taux net de croissance tend vers zéro :*

$$\lim_{t \to \infty} g_t \to 0, \tag{7}$$

alors pour $t \in T$ assez grand, l'ensemble X_* des vecteurs d'équilibre $\mathbf{x}_*(\pi)$ pouvant être atteints se définit comme suit :

$$X_* = \{\, \mathbf{x}_*(\pi) \mid \text{éq. (9), (10), (11) } \textit{soient respectées} \,\},$$

avec

$$(\mathbf{x}^*(\pi),\ \mathbf{1}) = \underline{x}_* \tag{9}$$

$$\mathbf{x}_*(\pi)\,((\mathbf{1}) - P)_i \geqq 0; \qquad i \in I^0 \tag{10}$$

$$\mathbf{x}_*(\pi)\,((\mathbf{1}) - P)_i = 0; \qquad i \in \bar{I}^0 \tag{11}$$

et avec $\underline{x}_*$ et $\mathbf{x}_*(\pi)$ définis comme dans le résultat 2.

Nous précisons que la condition donnée par l'équation (7) — que par la suite on considère satisfaite — est une condition suffisante mais non nécessaire d'atteinte d'un équilibre $\mathbf{x}_*(\pi)$.

Par exemple, Guérin [9], à partir de nombreuses expérimentations, observe que les systèmes tendent, à un facteur multiplicatif près, vers un état d'équilibre, $\underline{x}_t \mathbf{q}_*$, lorsque les taux de croissance g_t sont constants dans le temps ($g_t = g$). Alors, l'ensemble X_{t*} des solutions d'équilibre se définissent comme suit :

$$X_{t*} = \{ \mathbf{x}_{t*}(\pi) \mid \text{éq. (12), (13), (14) soient respectées} \},$$

avec

$$(\mathbf{x}_{t*}(\pi), \mathbf{1}) = \underline{x}_t \tag{12}$$

$$\mathbf{q}_*(\pi)\,((1+g)(\mathbf{1}) - P)_i \geqq 0; \qquad i \in I^0 \tag{13}$$

$$\mathbf{q}_*(\pi)\,((1+g)(\mathbf{1}) - P)_i = 0; \qquad i \in \bar{I}^0. \tag{14}$$

Ces résultats précisés, si nous notons :

$\tau = 1^{\text{re}}$ période où le système atteint l'équilibre ($\tau \in T$), en se référant à l'équation (1), on peut écrire :

$$\sum_{t=1}^{T} \tilde{b}_t = \sum_{t=1}^{\tau-1} \tilde{b}_t + (T-\tau)\,\mathbf{x}_* \tilde{\mathbf{r}}.$$

On dira que l'on approxime $\sum_{t=1}^{T} \tilde{b}_t$ par $(T-\tau)\,\mathbf{x}_* \tilde{\mathbf{r}}$:

$$\sum_{t=1}^{T} \tilde{b}_t \simeq (T-\tau)\,\mathbf{x}_* \tilde{\mathbf{r}}, \tag{15}$$

lorsque T est assez grand comparativement à τ pour considérer la valeur de $\left(\sum_{t=1}^{\tau-1} \tilde{b}_t \right)$ comme négligeable par rapport à $((T-\tau)\,\mathbf{x}_* \tilde{\mathbf{r}})$.

Dans ce contexte, compte tenu des résultats 1, 2, 3, la résolution du modèle (I) peut se ramener à celle du modèle (II) énoncé dans le théorème 1 ci-dessous :

THÉORÈME 1: *Si la période d'étude T est assez grande par rapport à la période d'atteinte de l'équilibre τ pour que l'approximation donnée par* *l'équation* (15) *soit justifiée, alors la résolution du modèle* (I) *peut se ramener à celle du modèle* (II) *défini ci-dessous :*

$$\underset{(\mathbf{x}_*)}{\underline{\text{minimiser}}} \quad \text{Var.}\,[\mathbf{x}_*\tilde{\mathbf{r}}] \qquad (16)$$

sous les contraintes *(II)*

$$\text{E}\,[\mathbf{x}_*\tilde{\mathbf{r}}] \geqslant \mu\, \underline{x}_* \qquad (17)$$

$$(9), (10), (11).$$

Démonstration : En supposant l'équation (15) justifiée, la fonction économique et l'équation (3) du modèle (I) peuvent être remplacées respectivement par

$$\text{Var}\,[(T-\tau)\,\mathbf{x}_*\tilde{\mathbf{r}}]$$

et

$$E\,[(T-\tau)\,\mathbf{x}_*\tilde{\mathbf{r}}] \geqslant \mu\,(T-\tau)\,\underline{x}_*.$$

Dans le modèle (I), les équations (2), (4), (5), (6) définissent l'ensemble des états accessibles du système interne lorsque le vecteur $\boldsymbol{\pi}$ varie. Selon le résultat 3, lorsqu'on ne s'intéresse qu'aux états accessibles stables de ce système, ces équations (2), (4), (5), (6) peuvent être remplacées par les équations (9), (10), (11). Enfin, les variables décisionnelles (π_i; $i \in I$) du modèle (I) peuvent être remplacées par les variables décisionnelles (x_{i*}; $i \in I$) car, selon l'équation (8), à un vecteur d'équilibre $\mathbf{x}_*$ correspond un et un seul vecteur $\boldsymbol{\pi}$.

Le passage du vecteur optimum $\hat{\mathbf{x}}_*$ au vecteur $\hat{\boldsymbol{\pi}}$ se fait comme suit :

$$\hat{\boldsymbol{\pi}}_* = \hat{\mathbf{x}}_*\,((\mathbf{1}) - P)/\hat{\mathbf{x}}_*\,\mathbf{p}_{n+1}.$$

Compte tenu de cette remarque, le modèle (I) peut se ramener au modèle défini ci-dessous :

$$\underset{(\mathbf{x}_*)}{\underline{\min}} \quad \text{Var}\,[(T-\tau)\,\mathbf{x}_*\tilde{\mathbf{r}}]$$

s. l. c.

$$\left.\begin{array}{r} E\,[(T-\tau)\,\mathbf{x}_*\tilde{\mathbf{r}}] \geqslant \mu\,(T-\tau)\,\underline{x}_* \\ (9), (10), (11). \end{array}\right\}$$

Dans ce modèle, le vecteur optimum ($\hat{\mathbf{x}}_*$) est bien identique à celui déterminé par le modèle (II). ■

Étudions maintenant la forme du modèle (II).

En premier lieu, les équations (9), (10), (11) et (17) sont des contraintes qui s'expriment linéairement par rapport aux variables de décision : $\mathbf{x}_*$.

La formulation de la fonction objective (équation (16)) peut quand à elle prendre plusieurs formes :

— *Cas* 1 : en une période, les rentabilités dégagées par les différents éléments sont indépendantes les unes des autres. Alors, l'équation (16) peut encore s'écrire :

$$\mathbf{x}_* \, \mathbf{Var} \, [\tilde{r}_i],$$

avec

$$\mathbf{Var} \, [\tilde{r}_i] = (\mathrm{Var} \, [\tilde{r}_i]; \; i \in I).$$

Et l'équation (16) s'exprime linéairement par rapport aux variables de décision. Alors le modèle (II) est linéaire.

Par exemple, ce sera le cas pour des compagnies d'assurance I.A.R.D. où le caractère aléatoire de la rentabilité pour un client provient de l'aléa sur les montants de sinistres liés aux contrats. Or ces montants de sinistres sont, dans la quasi-totalité des cas, indépendants les uns des autres d'un client à l'autre.

— *Cas* 2 : en une période, les rentabilités dégagées par les différents éléments ne sont pas indépendantes les unes des autres.

Dans ce cas, l'équation (16) s'exprime sous une forme quadratique par rapport aux variables de décision et la résolution du modèle (II) se ramène à celle d'un modèle quadratique.

Par exemple, ce sera le cas pour une activité de service telle qu'assurer l'entretien de chaudières pendant une durée déterminée (contrat à 1 an). Le nombre d'interventions et leur emportance sont, ici, les éléments aléatoires. On ne peut les considérer indépendants d'une chaudière à l'autre dans la mesure où ces variables sont influencées par la rigueur de l'hiver qui est identique pour toutes les chaudières d'une même région.

II. INCITATIONS ET OBJECTIFS DE VENTE OPTIMA

L'objectif à long terme de l'entreprise déterminé dans le premier paragraphe est optimum. Mais encore faut-il l'atteindre en pratiquant une politique de vente appropriée.

Pour les entreprises qui font appel à des intermédiaires commerciaux, un des volets de cette politique est la détermination d'un système adéquat d'incitation. C'est à ce problème que nous nous intéressons dans le contexte qui suit.

— L'entreprise désire, comme cela a été défini au premier paragraphe, minimiser la variance de la rentabilité calculée sur T tout en assurant une espérance de revenu net par client égale a une valeur donnée μ. Pour ce faire, elle recherche la répartition de ses ventes et un système de commissionnement qui lui permettent de réaliser cet objectif.

En raison d'une rémunération différente des intermédiaires commerciaux, nous différençons à un moment donné t les nouveaux et les anciens clients selon leur système d'origine la période précédente. Les nouveaux clients — qui proviennent du système externe — donnent lieu au paiement d'une commission c_i^0 (variables décisionnelles) lorsqu'ils entrent dans la classe $i \in I^0$. Et les anciens clients — qui proviennent du système interne — donnent lieu au paiement d'une commission c_{ij} *lorsqu'ils proviennent de la classe* $i \in I$ et qu'ils entrent dans la classe $j \in I$. Dans ce travail, les commissions c_{ij} sont considérées comme déjà fixées. Par ailleurs, on suppose que l'entreprise veut, sur la période T, rémunérer les intermédiaires selon un pourcentage m du chiffre d'affaires (C.A.) réalisé. Lorsqu'on note :

K = ensemble des intermédiaires commerciaux k,

$\mathbf{v} = (v_i;\ i \in I)$, le vecteur des prix de vente supposés identiques dans le temps,

$\mathbf{x}_{kt}^0$ = vecteur des nombres x_{kit}^0 de nouveaux clients amenés par l'intermédiaire k dans les différentes classes i à la période t,

$\mathbf{x}_{kt}$ = vecteur des nombres x_{kit} de clients qui ont été amenés par l'intermédiaire k dans les différentes classes i avant la période t et sont toujours clients à la période t

$(CP) = (c_{ij} p_{ij};\ i, j \in I)$,

cette contrainte, que l'entreprise se fixe, s'écrit :

$$\sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \mathbf{x}_{kt-1} (CP) \mathbf{1} + \mathbf{x}_{kt}^0 \mathbf{c}^0 = m \sum_{t \in T} \sum_{k \in K} \mathbf{x}_{kt} \mathbf{v}. \tag{18}$$

Enfin, on suppose que l'entreprise connaît les éléments de décision des intermédiaires commerciaux k que l'on précise ci-dessous.

— Un intermédiaire commercial est considéré comme raisonnant à court terme, période par période. Il cherche à maximiser son revenu constitué par les commissions touchées sous les contraintes de disponibilité de temps précisées ci-après :

En une période t, l'intermédiaire k dispose d'un temps θ^0_{kt} disponible pour la prospection de nouveaux clients et d'un temps distinct θ_{kt} pour la gestion des anciens clients. Dans notre problème, le temps θ_{kt} est considéré comme pouvant s'adapter aux besoins (embauche du personnel administratif nécessaire) tandis que le temps θ^0_{kt} disponible pour la prospection des nouveaux clients constitue une contrainte.

A une période t, le revenu d'un intermédiaire k est donné par :

$$\mathbf{x}_{kt-1}(CP)\,\mathbf{1}+\mathbf{x}^0_{kt}\,\mathbf{c}^0. \quad (^5)$$

Lorsqu'on note :

$\theta_k(\mathbf{x}^0_{kt})$ = temps nécessaire à l'intermédiaire k pour réaliser le vecteur $\mathbf{x}^0_k$ de nouveaux clients à la période t,

le modèle de décision d'un intermédiaire commercial à la période t s'écrit :

$$\underset{(\mathbf{x}^0_{kt})}{\underline{\text{maximiser}}}\ \mathbf{x}_{kt-1}(CP)\,\mathbf{1}+\mathbf{x}^0_{kt}\,\mathbf{c}^0$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{ll} \theta_k(\mathbf{x}^0_{kt})\leqq\theta^0_{kt} & \\ x^0_{kit}\geqq 0; & i\in I^0 \\ x^0_{kit}=0; & i\in\bar{I}^0. \end{array}\right. \qquad (\mathrm{III})_{kt}$$

Ces modèles n'ont de signification que s'il existe au moins un $i\in I^0$ tel que $c^0_i\neq 0$. Le cas contraire ($c^0_i=0$; $\forall\, i\in I^0$) ne présente dans notre étude aucun intérêt car il nie toute politique d'incitation par les commissionnements dans la recherche de nouveaux clients.

(5) On aurait également pu considérer que les intermédiaires commerciaux désirent maximiser leur profit et par exemple si cet intermédiaire k a des frais fixes, ff_k et des frais variables par client, fv_k, le profit s'exprime comme suit :

$$\mathbf{x}_{kt-1}((CP)-fv_k)\,\mathbf{1}-\mathbf{x}^0_{kt}(\mathbf{c}^0-fv_k\,\mathbf{1})-ff_k.$$

Pour la suite, on note :

$X^0_{kt}(\mathbf{c}^0)$ = ensemble des solutions $\tilde{\mathbf{x}}^0_{kt}$ du modèle $(\mathrm{III})_{kt}$, alors que le vecteur $\mathbf{c}^0$ varie et on redéfinit :

$\tilde{\mathbf{r}}=(\tilde{r}_i;\ i\in I)$ = vecteur des revenus nets dégagés par les clients appartenant aux différentes classes i pendant une période, hormis les dépenses de commissionnement,

μ = revenu net minimum désiré par client en tenant compte des dépenses de commissionnement.

Le modèle de décision de l'entreprise pour un nombre de période $|T|$ assez grand et pour une valeur de μ admissible s'écrit :

$$\underset{(\mathbf{c}^0)}{\underline{\text{minimiser}}}\ \mathrm{Var}\Big[\sum_{t\in T}\sum_{k\in K}\tilde{b}_{kt}\Big]$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{ll}\tilde{b}_{kt}=\mathbf{x}_{kt}\tilde{\mathbf{r}}; & k\in K,\quad t\in T\\ E\Big[\sum_{t\in T}\sum_{k\in K}\tilde{b}_{kt}\Big]\geqq\sum_{t\in T}\sum_{k\in K}(\mu\,\mathbf{x}_{kt}\,1+m\,\mathbf{x}_{kt}\,\mathbf{v}) & \\ \mathbf{x}_{kt+1}=\mathbf{x}_{kt}P+\mathbf{x}^0_{kt+1}; & k\in K,\quad t\in T\\ \mathbf{x}^0_{kt}\in X^0_{kt}(\mathbf{c}^0); & t\in T\\ \qquad (18) & \\ c^0_i\geqq 0; & i\in I^0\\ c^0_i=0;\ i\in\bar{I}^0 & (\bar{I}^0=I-I^0).\end{array}\right\}\quad(\mathrm{IV})$$

Les modèles de décision des différents partenaires sont maintenant précisés. Les solutions d'équilibre [solutions satisfaisant simultanément les modèles $(\mathrm{III})_{kt}$ et (IV)], si elles existent, sont fonction des temps θ^0_{kt}. Pour simplification, nous supposons par la suite que pour tout intermédiaire $k\in K$, les temps de prospection disponibles, θ^0_{kt}, sont constants dans le temps.

Dans ce contexte, on montre dans un premier temps que le système client atteint un équilibre comparable à celui du système interne décrit au paragraphe I (lemme 1 et 2). Ceci nous permet de simplifier le modèle (IV) de décision de l'entreprise (théorème 2).

Dans un deuxième temps, on prouve que l'entreprise décide ses objectifs de vente indépendamment de sa politique de commissionnement (théorème 3). Cette politique de commissionnement n'est décidée qu'ensuite (corollaire) de façon à inciter les intermédiaires commerciaux à vendre effectivement ce que l'entreprise désire.

LEMME 1: *Si pour tout intermédiaire $k \in K$, les temps disponibles de prospection sont identiques dans le temps :*

$$\forall t \in T, \quad \theta_{kt}^0 = \theta_k^0$$

et s'il existe au moins un $i \in I^0$ tel que $c_i^0 > 0$ alors les vecteurs $\mathbf{x}_{kt}$, solutions des modèles $(\mathrm{III})_{kt}$ sont identiques dans le temps :

$$\mathbf{x}_{kt}^0 = \mathbf{x}_k^0; \qquad k \in K$$

et donc

$$X_{kt}^0(\mathbf{c}^0) = X_k^0(\mathbf{c}^0).$$

Démonstration : Dans le modèle $(\mathrm{III})_{kt}$, la composante $\mathbf{x}_{kt-1}(CP)\,\mathbf{1}$ de la fonction économique est une donnée. Aussi lorsqu'on considère :

$$\forall t \in T, \quad \theta_{kt}^0 = \theta_k^0,$$

tous les éléments du modèle autres que les variables de décision apparaissent indépendants de t. Et les solutions de ces modèles, si elles existent, sont bien indépendantes du temps :

$$\hat{\mathbf{x}}_{kt}^0 = \hat{\mathbf{x}}_k^0. \quad \blacksquare$$

LEMME 2: *Pour un intermédiaire k quelconque, si l'on a $\forall t \in T$,*

$$\mathbf{x}_{kt}^0 = \mathbf{x}_k^0$$

alors pour une période d'analyse T assez grande, la répartition dans les différentes classes $i \in I$ des clients amenés par l'intermédiaire k atteint l'équilibre :

$$\mathbf{x}_{k*} = \mathbf{x}_{k*}P + \mathbf{x}_k^0.$$

Démonstration : L'égalité $(\mathbf{x}_{kt}^0 = \mathbf{x}_k^0)$ signifie qu'à chaque période $t \in T$ l'intermédiaire k fait entrer dans chaque classe $i \in I^0$ un nombre identique de nouveaux clients. De ce fait, compte tenu de l'énoncé du problème, la clientèle amenée par l'intermédiaire k évolue de façon comparable à celle du système interne décrit au paragraphe I. Et par application du résultat 2 de ce paragraphe I, la répartition des clients dans les différentes classes $i \in I$ atteint pour t assez grand un équilibre $\mathbf{x}_{k*}$. En se référant à l'équation (8), cet équilibre se définit comme suit :

$$\mathbf{x}_{k*}=\mathbf{x}_{k*}P+\mathbf{x}_k^0. \quad \blacksquare$$

THÉORÈME 2: *Si on considère que la période d'étude T est assez grande en comparaison de la période d'atteinte de l'équilibre* τ *pour que l'on ait,* $\forall k \in K$ *:*

$$\sum_{t \in T} \tilde{b}_{kt} \simeq (T-\tau)\,\mathbf{x}_{k*}\tilde{\mathbf{r}}$$

et par ailleurs, $\forall k \in K$, *l'on ait :*

$$\forall t \in T, \qquad \theta_{kt}^0=\theta_k^0$$

alors la résolution du modèle (IV) *de décision de l'entreprise, — lorsqu'il existe à l'optimum au moins un i tel que* c_i^0 *soit strictement positif —, peut se ramener à celle du modèle* $(\mathrm{IV})_*$ *défini ci-dessous :*

$$\underset{(\mathbf{c}^0)}{\underline{\text{minimiser}}}\ \mathrm{Var}\Big[\sum_{k \in K} \tilde{b}_{k*}\Big]$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{lr}
\tilde{b}_{k*}=\mathbf{x}_k^0((\mathbf{1})-P)^{-1}\tilde{\mathbf{r}}; \qquad k \in K & (19)\\
E[\tilde{b}_{k*}]-m\sum_k \mathbf{x}_k^0((\mathbf{1})-P)^{-1}\mathbf{v} \geqq \mu\,\mathbf{x}_k^0((\mathbf{1})-P)^{-1}\mathbf{1} & (20)\\
\mathbf{x}_k^0 \in X_k^0(\mathbf{c}^0); \qquad k \in K & (21)_k\\
\sum_k \mathbf{x}_k^0((\mathbf{1})-P)^{-1}(CP)\mathbf{1}+\mathbf{x}_k^0\mathbf{c}^0=m\sum_k \mathbf{x}_k^0((\mathbf{1})-P)^{-1}\mathbf{v} & (22)\\
c_i^0 \geqq 0; \qquad i \in I^0 & (23)\\
c_i^0=0; \qquad i \in \bar{I}^0. & (24)
\end{array}\right\} (\mathrm{IV})_*$$

Démonstration : Sous la condition :

$$\forall t \in T, \quad \theta_{kt}^0=\theta_k^0,$$

par application successive des lemmes 1 et 2, on a pour t assez grand :

$$\mathbf{x}_{kt}=\mathbf{x}_{k*}$$

et en supposant $((\mathbf{1})-P)$ inversible :

$$\mathbf{x}_{k*}=\mathbf{x}_k^0((\mathbf{1})-P)^{-1}.$$

Par ailleurs, la condition :

$$\sum_{t \in T} \tilde{b}_{kt} \simeq (T-\tau)\, \mathbf{x}_{k*} \tilde{\mathbf{r}}$$

permet de ne raisonner qu'à l'équilibre.

En procédant comme pour le théorème I, on montre l'identité entre les modèles (IV) et $(\mathrm{IV})_*$. ■

Dans la suite du travail, on considère que, sur une période, les rentabilités dégagées par les différents clients sont indépendantes les unes des autres. Pour exprimer plus simplement les modèles de décision des partenaires à l'équilibre, on note :

$$\begin{aligned}\mathbf{d} &= ((\mathbf{1})-P)^{-1}(CP)\,\mathbf{1}\\ \sigma^2 &= ((\mathbf{1})-P)^{-1}\,\mathbf{Var}\,[\tilde{r}_i]\\ \mathbf{h}(\mu) &= ((\mathbf{1})-P)^{-1}(E[\tilde{\mathbf{r}}_i]-\mu\,\mathbf{1})\\ \mathbf{s} &= m\,((\mathbf{1})-P)^{-1}\,\mathbf{v}\end{aligned}$$

et comme on ne travaille plus qu'à l'équilibre, la notation $*$ sera supprimée. Dans le contexte considéré, le modèle $(\mathrm{IV})_*$ de décision de l'entreprise se réécrit :

$$\underset{(\mathbf{c}^0)}{\underline{\text{minimiser}}} \sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0 \sigma^2$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{lll} \sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0 (\mathbf{h}(\mu)-\mathbf{s}) \geqq \geqq 0 & & (28)\\ \sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0 (\mathbf{d}+\mathbf{c}^0-\mathbf{s}) = 0 & & (29)\\ \mathbf{x}_k^0 \in X_k^0(\mathbf{c}^0); & k \in K & (21)_k\\ c_i^0 \geqq 0; & i \in I^0 & (23)\\ c_i^0 = 0; & i \in \bar{I}^0, & (24) \end{array}\right\} (\mathrm{V})$$

où, on le rappelle, $\forall k \in K$, $X_k^0(\mathbf{c}^0)$ est l'ensemble des solutions du modèle $(\mathrm{VI})_k$ de décision de l'intermédiaire commercial k :

$$\underset{(\mathbf{x}_k^0)}{\underline{\text{maximiser}}}\; \mathbf{x}_k^0\, \mathbf{c}^0$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{lll} \theta_k(\mathbf{x}_k^0) \leqq \theta_k^0 & & (25)_k\\ x_{ki}^0 \geqq 0; & i \in I^0 & (26)_k\\ x_{ki}^0 = 0; & i \in \bar{I}^0. & (27)_k \end{array}\right\} (\mathrm{VI})_k$$

Par la suite, comme l'on fait notamment Darmon [4] et Srinivasan [10], on considère, $\forall k \in K$, que les fonctions $\theta_{ki}(x_{ki}^0)$, reliant le temps de vente aux quantités vendues x_{ki}^0 sont convexes (plus on vend de produit, plus l'effort marginal de vente est grand). Dans ce contexte, on démontre le théorème 3 énoncé ci-dessous :

THÉORÈME 3: *Supposant $\forall i \in I^0$ et $\forall k \in K$ les fonctions de temps $\theta_{ki}(x_{ki}^0)$ convexes, les vecteurs optima de vente aux nouveaux clients, — découlant de la résolution conjointe des modèles (V) et $[(\mathrm{VI})_k;\ k \in K]$ —, peuvent être déterminés par la seule résolution du modèle (VII) énoncé ci-dessous dès lors qu'il existe au moins un $i \in I^0$ tel que c_i^0 soit positif :*

$$\underset{(\mathbf{x}_k^0;\, k \in K)}{\underline{\text{minimiser}}} \sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0\, \sigma^2$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{lr} \displaystyle\sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0 (\mathbf{h}(\mu) - \mathbf{s}) \geqq 0 & (28) \\ \theta_k(\mathbf{x}_k^0) = \theta_k^0; \quad k \in K & (30)_k \\ \displaystyle\sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0 (\mathbf{d} - \mathbf{s}) \geqq \varepsilon \quad (\varepsilon \to 0^+) & (31) \\ (26)_k,\ (27)_k; \quad k \in K. & \end{array}\right\} \quad (\mathrm{VII})$$

Démonstration : Dans les modèles $(\mathrm{VI})_k$ à l'optimum, compte tenu de l'équation (23) et de l'hypothèse de convexité des fonctions $\theta_k(\mathbf{x}_k^0)$, les contraintes $(25)_k$ se trouvent à l'égalité dès lors qu'il existe au moins un $i \in I^0$ tel que $c_i^0 > 0$. Alors l'ensemble des solutions *admissibles* selon les modèles $(\mathrm{VI})_k$ correspond à l'ensemble des vecteurs $\mathbf{x}_k^0$ satisfaisant les équations :

$$\theta_k(\mathbf{x}_k^0) = \theta_k^0; \quad k \in K \tag{30$_k$}$$

$$(26)_k,\ (27)_k; \quad k \in K. \tag{26$_k$}$$

Par ailleurs, dans le modèle (V) la contrainte (29) définit pour des vecteurs donnés $\mathbf{x}_k^0$; $k \in K$ le montant de commissionnement (l'enveloppe) qui est à distribuer à l'ensemble des intermédiaires commerciaux :

$$\sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0 (\mathbf{d} - \mathbf{s}) = \sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0\, \mathbf{c}^0. \tag{32}$$

Cette enveloppe doit être positive dès lors qu'on désire qu'il existe au moins un $i \in I^0$ tel que $c_i^0 > 0$:

$$\sum_{k \in K} \mathbf{x}_k^0 (\mathbf{d} - \mathbf{s}) \geqq \varepsilon \quad (\varepsilon \to 0^+). \tag{31}$$

Compte tenu de ces remarques le modèle (VII) de décision de l'entreprise indiquant les vecteurs de vente désirés par l'entreprise, — en dehors de tout problème de répartition des commissions —, donne l'optimum au sens des modèles (V) et $(\mathrm{VI})_k$; $k \in K$ s'il existe un vecteur de commissionnement qui satisfait simultanément les conditions de premier ordre des modèles (VII) et $[(\mathrm{VI})_k;\ k \in K]$.

Pour la suite, on note :

$\hat{I}_k^0$ = ensemble des classes $i \in I^0$ tel que $\hat{x}_{ki}$, *solution du modèle VII, est* $\neq 0$
$\hat{c}_i^0 = 0$, $\forall\, i \notin \bigcup_{k \in K} \hat{I}_k^0$.

Ceci posé, pour les modèles $(\mathrm{VI})_k$; $k \in K$, si on attache les variables duales u_k aux contraintes $(25)_k$, les conditions de 1^er^ ordre de ces modèles s'écrivent sous la forme du système (S_1) d'équations :

$$\forall\, k \in K,$$

$$\left.\begin{array}{lll} \theta_k(\mathbf{x}_k^0) = \theta_k^0, & & (30)_k \\ \hat{c}_i^0 - \hat{u}_k\,\theta'_{ki}(\hat{\mathbf{x}}_k^0) = 0; & i \in \hat{I}_k^0, & (33)_{ki} \end{array}\right\} \quad (S_1)$$

avec $\theta'_{ki}(\mathbf{x}_k^0)$ la dérivée première de $\theta_k(\mathbf{x}_k^0)$ par rapport à x_{ki}^0.

Et pour le modèle (VII) si on attache les variables duales β, Γ, w_k; $k \in K$ respectivement aux contraintes (28), (31), $(30)_k$; $k \in K$, les conditions de 1^er^ ordre de ce modèle s'écrivent sous la forme du système (S_2) d'équations :

$$\forall\, k \in K,$$

$$\left.\begin{array}{ll} \sigma_i^2 + \hat{\beta}\,(h_i(\mu) - s_i) + \hat{\Gamma}\,(d_i - s_i) + \hat{w}_k\,\theta'_{ki}(\hat{\mathbf{x}}_k^0) = 0; \quad i \in \hat{I}_k^0 & (34)_{ki} \\ (28), \quad (31), \quad (30)_k; \quad k \in K. & \end{array}\right\} \quad (S_2)$$

Lorsqu'il existe une solution aux modèles $[(VI)_k;\ k \in K]$ et (VII), — l'existence a priori d'au moins un $i \in I^0$ tel que $c_i^0 > 0$ assurant la satisfaction de l'équation (31) —, les conditions de premier ordre de ces modèles sont respectées simultanément dès lors que les équations $(33)_{ki}$ et $[(34)_{ki};\ k \in K,\ i \in I_k^0]$ sont satisfaites en même temps.

Des équations $(33)_{ki}$, on tire :

$$\theta'_{ki}(\hat{\mathbf{x}}_k^0) = \hat{c}_i^0 / \hat{u}_k; \qquad k \in K, \quad i \in \hat{I}_k^0.$$

Cette valeur étant portée dans les équations $(34)_{ki}$, on obtient :

$$\sigma_i^2 + \hat{\beta}\,(h_i(\mu) - s_i) + \hat{\Gamma}\,(d_i - s_i) + (\hat{w}_k / \hat{u}_k)\,\hat{c}_i^0 = 0;$$
$$k \in K, \qquad i \in \hat{I}_k^0$$

ou encore,

$$\hat{c}_i^0 = \frac{-1}{(\hat{w}_k/\hat{u}_k)}(\sigma_i^2 + \hat{\beta}(h_i(\mu) - s_i) + \hat{\Gamma}(d_i - s_i)); \qquad (35)_{ki}$$

$$k \in K, \qquad i \in \hat{I}_k^0.$$

Il nous reste à démontrer que les valeurs $\hat{c}_i^0$ définies selon l'équation $(35)_{ki}$ pour un intermédiaire k sont compatibles avec celles définies pour les autres intermédiaires k', k'',... par cette même équation.

Tout d'abord, pour un k donné, si $i, j \in \hat{I}_k^0$ on a le rapport :

$$\frac{\hat{c}_i^0}{\hat{c}_j^0} = \frac{\sigma_i^2 + \hat{\beta}(h_i(\mu) - s_i) + \hat{\Gamma}(d_i - s_i)}{\sigma_j^2 + \hat{\beta}(h_j(\mu) - s_j) + \hat{\Gamma}(d_j - s_j)} \qquad (36)$$

qui est indépendant de k et qui est donc identique $\forall k' \in K$ tel que $i, j \in \hat{I}_{k'}^0$.

Cette équation (36) s'étend aux cas où l'on a :

$$i \in I_k, \quad \notin I_{k''}$$

$$j \notin I_k, \quad \in I_{k''}$$

alors qu'il existe un « chemin » : $k, k', \ldots, k''$ défini comme suit :

$$I_k \cap I_{k'} \neq \varnothing$$

$$I_{k'} \cap . \quad \neq \varnothing$$

$$\vdots$$

$$.. \cap I_{k''} \neq \varnothing.$$

En effet, dans ces cas de figure, il existe au moins un $h \in I_k \cap I_{k'}$, un $h' \in I_{k'} \cap .$, $\ldots$, un $h'' \in .. \cap I_{k''}$ et on retrouve bien l'équation (36) en procédant comme suit :

$$\frac{\hat{c}_i^0}{\hat{c}_j^0} = \frac{\hat{c}_i^0}{\hat{c}_h^0} \times \frac{\hat{c}_h^0}{\hat{c}_{h'}^0} \times \frac{\hat{c}_{h'}^0}{.} \times \ldots \times \frac{\hat{c}_{h''}^0}{\hat{c}_j^0}.$$

Par contre si un tel chemin $k, k', \ldots, k''$, n'existe pas, la satisfaction simultanée des équations $(35)_{ki}$; $k \in K$, $(35)_{k''j}$; $k'' \in K$ ne contraint en aucune sorte les rapports $\hat{c}_i^0/\hat{c}_j^0$.

Indépendamment de l'existence d'un chemin défini comme ci-dessus, on a montré qu'il existe au moins un vecteur $\mathbf{c}^0$ qui satisfait simultanément les équations $(35)_{ki}$; $k \in K$, $i \in I_k^0$. Le théorème 3 est ainsi démontré. ■

COROLLAIRE 1 : *Si on partitionne l'ensemble K des intermédiaires en M sous-ensembles $\hat{K}_m$ tel que l'on ait :*

$$\bigcup_{m=1}^{M} \hat{K}_m = K$$

$$\forall k \in \hat{K}_m, \quad \bigcup_{k' \in \hat{K}_m,\, k' \neq k} \hat{I}^0_{k'} \cap \hat{I}^0_k \neq \varnothing$$

$$\hat{K}_m \cap \hat{K}_{m'} = \varnothing; \qquad m, m' = 1, \ldots, M \qquad \text{et} \qquad m \neq m'$$

et si l'enveloppe de commissionnement e_m allouée aux différents sous-ensembles $\hat{K}_m$ d'intermédiaires respecte la contrainte :

$$\sum_{m=1}^{M} e_m = \sum_{k \in K} \mathbf{x}^0_k (\mathbf{s} - \mathbf{d}); \qquad e_m > 0, \tag{37}$$

alors pour chaque sous-ensemble $\hat{K}_m$, le vecteur optimal $(\hat{c}^0_i;\ i \in \bigcup_{k \in \hat{K}_m} \hat{I}^0_k)$ de commissionnement est solution du système linéaire de « n équations à n inconnues » :

$$e_m = \sum_{i \in \bigcup_{k \in \hat{K}_m} \hat{I}_k} \hat{\mathbf{c}}^0_i \, \hat{\mathbf{x}}^0_k$$

$$\frac{\hat{c}^0_i}{\hat{c}^0_j} = \frac{\sigma_i^2 + \hat{\beta}(h_i(\mu) - s_i) + \hat{\Gamma}(d_i - s_i)}{\sigma_j^2 + \hat{\beta}(h_j(\mu) - s_j) + \hat{\Gamma}(d_j - s_j)};$$

$$i, j \in \bigcup_{k \in \hat{K}_m} \hat{I}^0_k.$$

Le vecteur optimal $(\hat{c}^0_i;\ i \in \bigcup_{k \in K} \hat{I}^0_k)$ est obtenu par la juxtaposition de ces M vecteurs.

Enfin, on peut poser :

$$\hat{c}^0_i = 0; \quad \forall i \in I^0 - \bigcup_{k \in K} \hat{I}^0_k.$$

Démonstration : L'équation (37) assure la satisfaction de l'équation (32) et donc de la contrainte (29) du modèle (V). Le reste de la preuve découle directement de la démonstration du théorème 3. ■

Il est intéressant de noter que dans le contexte étudié, le volume global (e_m) de commissions alloué à un sous-ensemble $\hat{K}_m$ d'intermédiaires est laissé à l'entière discrétion de l'entreprise (seule contrainte : $e_m > 0$). Par contre, le volume global de commissions $\left(\sum_{m=1}^{M} e_m\right)$ sur l'ensemble K d'intermédiaires doit respecter la contrainte (37).

Par ailleurs, on remarque que, pour un intermédiaire k, à l'optimum, le rapport entre les commissions $(\hat{c}_i^0/\hat{c}_j^0)$ s'exprime indépendamment de sa fonction de temps et des variables duales attachées à celle-ci [équation (36)].

Procédure d'obtention des politiques de vente et de commissionnement

Dans le contexte considéré, une entreprise qui désire, sur une assez longue période, connaître ses objectifs optima de vente $(\hat{\mathbf{x}})$ et sa politique associée de commissionnement propre aux nouveaux clients $(\hat{\mathbf{c}}^0)$ doit procéder comme suit :

1. Résoudre le modèle quadratique (VII). La résolution de ce modèle indique pour les nouveaux clients les vecteurs de vente optima $(\hat{\mathbf{x}}_k^0)$ qui sont à réaliser par l'intermédiaire k et ce à chaque période considérée.

La résolution de ce modèle nous indique également les variables duales $\hat{\beta}$ et $\hat{\Gamma}$ associées respectivement aux contraintes (28) et (31).

2. Partant de ces vecteurs $(\hat{\mathbf{x}}_k^0)$, par application du résultat 3, on déduit à l'équilibre le vecteur de vente recherché $(\hat{\mathbf{x}})$.

3. Enfin, connaissant $\hat{\beta}$ et $\hat{\Gamma}$, le vecteur de commissionnement sur les nouveaux clients est obtenu comme décrit dans le corollaire 1.

CONCLUSION

Dans cette étude, nous nous sommes intéressés aux entreprises dont les clients passent d'une classe à l'autre selon des probabilités de transition constantes dans le temps et qui admettent à chaque période des nouveaux clients (système ouvert). On a montré que, sous certaines conditions, l'état de la clientèle tend vers un état stable dès lors que l'on a une politique de répartition des nouveaux clients identique à chaque période. Ceci est notamment réalisé lorsque l'entreprise pratique vis-à-vis de ses intermédiaires commerciaux une politique de commissionnement constante dans le temps. Ainsi, on a déterminé l'ensemble des états stables accessible correspondant à l'ensemble des politiques possibles de répartition des nouveaux clients. Parmi l'ensemble des états stables accessibles, on choisit alors celui qui satisfait les objectifs de l'entreprise.

Dans le contexte étudié, cette démarche nous permet de déterminer simultanément des objectifs optima et stables de vente ainsi qu'une politique de commissionnement appropriée.

Les résultats déterminés peuvent conduire à d'intéressants développements intégrant notamment :

– les problèmes de « Marketing Mix »,

– la recherche d'une politique optimale de commissionnement des anciens clients,

– le caractère aléatoire du comportement des clients.

BIBLIOGRAPHIE

1. D. J. Bartholomew, *Stochastic Models for Social Process*, J. Wiley and Sons, 2e éd., 1973.
2. F. Böcker, *A. Stochastic Brand Choice Price Model*, E.I.A.S.M., Bruxelles, sept. 1981.
3. Corstiens et Weinstein, *Optimal Product Market Portfolio Analysis*, Research paper, I.N.S.E.A.D., 1980.
4. R. Y. Darmon, *Alternative Model of Salesmen's Response to Financial Incentives*, Op. Res. Q., vol. 28, 1977, p. 37-49.
5. R. Y. Darmon, *The Control of the Sales Force Communication Effort Allocation Over Time Through Commission Plans*, Senanque, I.A.E. Aix-en-Provence, 1982.
6. J. Farley, *Optimal Plan for Sales Compensation*, J. of M. R., vol. 1, may 1964, p. 39-43.
7. E. Gijsbrechts, *Multiproduct Marketing Models: The State of the Art*, E.I.A.S.M., nov. 1981.
8. M. Givon et D. Horsky, *Application of a Composite Stochastic Model of Brand Choice*, J. of M. R., vol. 16, mai 1979.
9. G. Guérin, *Élaboration d'un modèle de prévision des effectifs étudiants au niveau universitaire*, Ph. D. option informatique, Faculté des études supérieures, Montréal, sept. 1972.
10. Srinivasan, *An Investigation of the Equal Commission Rate Policy for a Multiproduct Sales Force*, E.I.A.S.M., janvier 1980.