RAIRO. Recherche opérationnelle

D. Viaud

Une stratégie générale pour jouer au Master-Mind

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 21, n° 1 (1987), p. 87-100

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1987__21_1_87_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 21, n° 1, février 1987, p. 87 à 100)

UNE STRATÉGIE GÉNÉRALE POUR JOUER AU MASTER-MIND (*)

par D. VIAUD [2]

Résumé. – *Cet article décrit et évalue une stratégie générale pour le jeu de MASTER-MIND. On rapelle tout d'abord les règles du jeu puis on introduit un problème de recherche dichotomique de sous-ensembles. On décrit ensuite la stratégie proposée et on l'évalue grace aux résultats obtenus auparavant.*

Mots clés : Jeux; Stratégies; Master-mind; Recherche Dichotomique.

Abstract. – *The aim of this paper is to present a general strategy for playing MASTER-MIND. First of all we state the rules of the game. Then a binary search algorithm of subsets is presented, followed by the strategy we are interested in. It is evaluated by using the algorithm formerly described.*

Keywords : Games; Strategies; Master-Mind; Binary Search.

I. DESCRIPTION DU JEU

Le jeu de MASTER-MIND se joue à deux. Chacun des joueurs dispose de pions colorés, les couleurs étant au nombre de m. Le joueur 1 choisit un code formé de n pions alignés que doit découvrir le joueur 2. Pour cela il propose différents codes. A chaque fois, le joueur 1 lui indique le nombre de points obtenus. Ces points sont de deux sortes. Les points noirs donnent le nombre de pions apparaissant dans le code caché et dans le code proposé à la même place et avec la même couleur. Les points blancs donnent pour les pions restants, le nombre de pions de même couleur apparaissant dans les deux codes.

A chaque coup, le joueur 2 joue en fonction des points obtenus aux coups précédents. La partie se termine lorsqu'il trouve le code caché.

(*) Reçu septembre 1985.
[2] Université Louis-Pasteur, Département d'Informatique, 7, rue René-Descartes, 67084 Strasbourg.

On peut considérer un code comme une suite de n entiers, chacun compris entre 1 et m. Soient alors deux codes :

$$s=s1,\ s2,\ \ldots,\ sn \qquad \text{et} \qquad t=t1,\ t2,\ \ldots,\ tn$$

où pour $1 \leqq i \leqq n$:

$$1 \leqq si, \qquad ti \leqq m.$$

Soient nsj (resp. ntj) le nombre d'occurences de la couleur j dans s resp. t) et pn (resp. pb) le nombre de points noirs (resp. blancs) obtenus entre s et t. Alors :

$$pn = \sum_{i=1}^{n} d(si,\ ti)$$

$$pn + pt = \sum_{j=1}^{m} \inf(nsj,\ ntj)$$

où : $d(i,\ j)=1$ si $i=j$ et 0 sinon.

II. STRATÉGIES DE JEU

Une stratégie est un procédé déterministe permettant de trouver tout code caché s. Notons par $N(s)$ le nombre de coups pour y parvenir. L'ordre de la stratégie est alors défini par :

$$\max_{s} N(s),$$

où s parcourt l'ensemble des m^n codes possibles. Une stratégie est optimale si son ordre est inférieur à celui de toute autre stratégie.

Dans ce qui suit, on suppose implicitement que n et/ou m sont grands. Le cas du MASTER-MIND classique où $n=4$ et $m=6$ a été étudié de façon indépendante par Irving [2], Knuth [3] et par l'auteur [5 et 6], avec des résultats analogues.

De son coté, Neuwirth [4] a proposé d'autres stratégies, de caractère probabiliste, qui considèrent le code caché comme équiprobable parmi les codes candidats et minimisent à chaque instant l'espérance du nombre de coups restant à jouer. Il a aussi envisagé, ainsi que Flood [1], le cas où plusieurs parties sont jouées consécutivement par des joueurs qui à chaque fois modifient leur stratégie.

La stratégie présentée ici est de nature heuristique. Elle repose sur une méthode de recherche de sous-ensembles donnée au paragraphe IV qui, pour la recherche d'un code caché, s'adapte aussi bien à la détermination des couleurs qu'à celle des positions des pions qui le composent.

On donne aussi une majoration du coût de cette méthode qui permet ensuite de majorer l'ordre de la stratégie proposée.

Lorsque n et m (nombre de trous et de couleurs) sont du même ordre on obtient une majoration en :

$$O(m\,.\,\mathrm{Log}\,n),$$

et si $m \gg n$, une majoration en :

$$O(m/n + m\,.\,\mathrm{Log}\,n).$$

III. FONCTIONS $f(n;\, x)$

Les fonctions introduites ici serviront ultérieurement à estimer le nombre de coups nécessaire pour mettre en œuvre diverses stratégies.

Pour n entier et x réel, $n \geqq 1$ et $0 \leqq x \leqq n$, la fonction $f(n;\, x)$ est définie par :

$$f(n;\, x) = \begin{cases} x\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n/x & \text{si} \quad x \leqq n/2 \\ (n-x)\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n/(n-x) & \text{si} \quad x \geqq n/2 \end{cases}.$$

Pour $x = 0$ ou n, la valeur de la fonction est prise égale a 0. On vérifie facilement que :

– $f(n;\, x) = f(n;\, n-x)$ pour tout $0 \leqq x \leqq n$.

– $f(n;\, n/2) = n$.

– $f(n;\, x)$ est croissante (resp. décroissante) pour $0 \leqq x \leqq n/2$ (resp. pour $n/2 \leqq x \leqq n$).

– $f(n;\, x)$ est concave.

On a aussi le résultat suivant.

Lemme III.1 : *Si* $n\,1$ *et* $n\,2 \geqq 1$ *et si* $0 \leqq xi \leqq ni$, $i = 1, 2$, *on a :*

$$f(n\,1;\, x) + f(n\,2;\, x\,2) \leqq f(n\,1 + n\,2;\, x\,1 + x\,2).$$

Preuve : On suppose tout d'abord que :

$$0 < xi <, i, \qquad i = 1, 2.$$

Si $xi=0$ ou ni, le résultat s'obtient en passant à la limite dans l'inégalité ci-dessus.

On pose :

$$n=n\,1+n\,2, \qquad x=x\,1+x\,2.$$

Trois cas sont à envisager :

(*a*) $x\,1 \leqq n\,1/2$, $x\,2 \leqq n\,2/2$.

Alors, d'après la concavité de la fonction $\mathrm{Log}_2\, x$:

$$\begin{aligned} f(n\,1;\ x\,1)+f(n\,2;\ x\,2) & \\ &= x\,1\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n\,1/x\,1+x\,2\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n\,2/x\,2 \\ &\leqq x\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,((x\,1/x)\,.\,(n\,1/x\,1)+(x\,2/x)\,.\,(n\,2/x\,2))= \\ &\qquad x\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n/x=f(n;\ x). \end{aligned}$$

(*b*) $x\,1 \geqq n\,1/2$, $x\,2 \geqq n\,2/2$.

On se ramène au cas précédent en écrivant que :

$$\begin{aligned} f(n\,1;\ x\,1)+f(n\,2;\ x\,2) &= f(n\,1;\ n\,1-x\,1)+f(n\,2;\ n\,2-x\,2) \\ &\leqq f(n\,1+n\,2;\ n\,1-x\,1+n\,2-x\,2)=f(n;\ n-x)=f(n;\ x) \end{aligned}$$

car : $ni-xi \leqq ni/2$, $i=1,\ 2$.

(*c*) $x\,1 \leqq n\,1/2$, $x\,2 \geqq n\,2/2$.

Avec la concavité de la fonction $\mathrm{Log}_2\, x$:

$$\begin{aligned} f(n\,1;\ x\,1)+f(n\,2;\ x\,2) & \\ &= x\,1\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n\,1/x\,1+(n\,2-x\,2)\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n\,2/(n\,2-x\,2) \\ &\leqq (n\,2+x\,1-x\,2)\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n/(n\,2+x\,1-x\,2) \\ &= (n-(n\,1-x\,1+x\,2))\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n/(n-(n\,1-x\,1+x\,2)) \end{aligned}$$

Deux possibilités peuvent alors se présenter.

Si : $x\,1+x\,2 \leqq n/2$, $x\,2 \geqq n\,2/2$ entraine : $n\,2+x\,1-x\,2 \leqq x\,1+x\,2 \leqq n/2$, et comme $f(n;\ x)$ est croissante pour $0 \leqq x \leqq n/2$:

$$(n\,2+x\,1-x\,2)\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n/(n\,2+x\,1-x\,2)=f(n;\ n\,2+x\,1-x\,2) \leqq f(n;\ x\,1+x\,2).$$

Si : $x\,1+x\,2 \geqq n/2$, $x\,1 \leqq n\,1/2$ entraine : $n/2 \leqq x\,1+x\,2 \leqq n\,1-x\,1+x\,2$, et comme $f(n;\ x)$ est décroissante pour $n/2 \leqq x \leqq n$:

$$(n-(n\,1-x\,1+x\,2))\,.\,\mathrm{Log}_2\, 2\,.\,n/(n-(n\,1-x\,1+x\,2))$$

$$=f(n;\ n\,1\,x\,1+x\,2)\leqq f(n;\ x\,1+x\,2).$$

On obtient ainsi le résultat cherché dans les deux cas.

Remarque III.1. On déduit facilement du lemme que si $n\leqq m$: $f(n;\ x)\leqq f(m;\ x)$ pour $0\leqq x\leqq n$.

Remarque III.2 : On peut définir les fonctions $f(n;\ x)$ pour n réel supérieur à 1. Les propriétés précédentes sont alors conservées.

IV. RECHERCHE D'UN SOUS-ENSEMBLE

Soit E un ensemble donné avec $|E|=n>1$. Il s'agit de déterminer $S\subset E$ avec $|S|=p$ connu.

Pour cela, on choisit un sous-ensemble $S'\subset E$ et on reçoit en échange l'information :

$$q=|S'\cap S|.$$

On itère ce procédé jusqu'à déterminer S entièrement par la stratégie que la proposition suivante précise et évalue.

Proposition IV.I:*Le nombre de choix à faire pour trouver S est majoré par :*

$$\begin{cases} f(n;\ p)-1 & \textit{si } n \textit{ est une puissance de } 2,\\ f(n;\ p) & \textit{si } n \textit{ n'est pas une puissance de } 2\end{cases}$$

Preuve : Par récurrence sur n.

(i) $n=2$. Seul le cas $p=1$ à de l'intérêt. On propose S' tel que $|S'|=1$ et la détermination de S est alors évidente.

(ii) $n=2^{\nu}$, $\nu>1$. On propose un sous-ensemble S' tel que :

$$|S'|=2^{\nu-1}.$$

Soit q l'information obtenue. On sait alors que :

$$|S\cap S'|=q,\qquad |S\cap(E-S')|=p-q.$$

On obtient ainsi deux problèmes du même type mais plus simples où n est remplacé par $n/2$ et p respectivement par q ou $p-q$.

Le nombre total de choix à faire se majorera donc par :

$$1+(f(n/2;\ q)-1)+(f(n/2;\ p-q)-1\leqq f(n;\ p)-1$$

d'après le lemme III. 1.

(iii) $n=2^{\nu}+r$, $\nu>1$, $0\leqq r<2^{\nu}$. On propose un sous-ensemble S' tel que :

$$|S'|=2^{\nu}.$$

Comme précédemment, on en déduit :

$$|S\cap S'|=q, \qquad |S\cap(E-S')|=p-q.$$

On obtient encore deux problèmes du même type mais plus simples où n et p sont remplacés respectivement par 2^{ν} et q d'une part, r et $p-q$ de l'autre.

Le nombre total de choix à faire est majoré maintenant par :

$$1+(f(2;\, q)-1)+f(r;\, p-q)\leqq f(n;\, p)$$

d'après le lemme III. 1.

Remarque IV. 1 : Le dernier S' choisi permet, avec ceux qui précèdent de déterminer S sans ambiguité. Il n'a cependant aucune raison d'etre égal à S.

APPLICATIONS

a. Détermination de couleurs

Soit s^* un code inconnu et $E=\{1, 2, \ldots, n\}$ un ensemble de couleurs distinctes dont $p>0$ (p connu) d'entre elles apparaissent dans s^*.

On veut déterminer les couleurs qui font partie de E et qui apparaissent dans s^*, autrement dit un sous-ensemble S de E.

Pour cela on utilise la couleur 0, une des m couleurs initiales, pour laquelle on suppose connu le nombre $n0$ de fois ou elle intervient dans le code caché.

Elle permet de déterminer pour tout ensemble de q couleurs ($q<n$) combien d'entre elles appraissent dans le code caché comme indiqué ci-après.

Les choix consistent à proposer des codes de la forme :

$$s=J1,\, J2, \ldots, Jq,\, 0,\, 0, \ldots, 0$$

ou : $1\leqq J1<J2\ldots<Jq\leqq n$.

Il leur correspond les sous-ensembles de E :

$$S'=\{J1,\, J2, \ldots, Jq\}.$$

Si pn et pb sont les points noirs et blancs obtenus entre les codes s et s^*, on aura :

$$pn+pb=(\text{Nombre de couleurs proposées présentes dans } s^*)$$
$$+(\text{Nombre de pions de couleur 0 communs a } s \text{ et } as^*)$$

soit

$$|S \cap S'|=pn+pb-\inf(n0,\ n0-q).$$

Remarque IV.2 : La méthode reste valable lorsque $|E|=n'<n$.

b. Localisation d'une couleur

Soit s^* un code inconnu. Il est formé de $p>0$ pions de couleur 1 et de $p0 \geqq 0$ pions de couleur 0. Éventuellement, il peut aussi y avoir des pions d'autres couleurs.

p est connu et les pions de couleur 0 sont localisés.

On veut localiser les pions de couleur 1, autrement dit déterminer un sous-ensemble S de :

$$E=\{1, 2, \ldots, n\}$$

qui est l'ensemble des positions possibles.

Les choix consistent a proposer des codes :

$$s=J1, J2, \ldots, Jn$$

associés a un sous-ensemble S' de E par :

$$Jk=\begin{cases} 1 & \text{si } k \in S' \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si la comparaison des codes s et s^* fournit pn points noirs, on aura :

$$pn=(\text{nombre de pions 1 bien placés})+q0$$

où :

$$q0=(\text{nombre de pions 0 bien placés}).$$

$q0$ se déduit des données.

Par conséquent :

$$|S \cap S'| = pn - q0.$$

Remarque IV. 3 : La localisation peut se faire non pas sur n positions mais sur $n - p0$, si l'on tient compte des pions de couleur 0 déjà localisés et si $p0 > 0$.

V. STRATÉGIE GLOBALE

Soit s^* un code caché à trouver. Le principe est de déterminer, au moyen des résultats obtenus précédemment, tout d'abord quelles couleurs interviennent dans s^* et combien de fois puis de les localiser. A cet effet, on note :

t : nombre de couleurs distinctes intervenant dans s^*,

nJ : nombre de fois où la couleur J apparait dans s^*.

a. Détermination des couleurs

On suppose que : $m = n.q + r$ où $q \geqq 1$ et $0 \leqq r < n$.

On joue tout d'abord le code :

$$s = m, m, \ldots, m.$$

Le nombre de points noirs obtenus est nm.

On joue ensuite le code :

$$s = n.q + 1, n.q + 2, \ldots, m, m, \ldots, m, \ldots, m.$$

Les $p0$ points obtenus (noirs + blancs), permettent avec nm de déterminer combien de couleurs parmi : $n.q + 1, \ldots, m$ interviennent dans s^*.

On joue enfin les codes :

$$s = i + 1, i + 2, \ldots, i + n \qquad \text{où} \quad i = n.(k - 1), \quad 1 \leqq k \leqq q.$$

A chaque fois le nombre pk des points obtenus (noirs + blancs) est celui des couleurs qui, parmi les n proposées, interviennent dans s^*.

Il faut alors préciser ces couleurs. D'après les résultats du paragraphe précédent, il faut un nombre N de coups qui se majore par :

$$N \leqq \sum_{k=1}^{q} f(n; pk) + f(r; p0).$$

La concavité de la fonction $f(n;\ x)$ et la remarque III.I montrent que :

$$N \leqq \sum_{k=0}^{q} f(n;\ pk) \leqq l.f\left(n; \left(\sum_{k=0}^{q} pk\right)/l\right).$$

où l désigne le nombre d'entiers pk non nuls.

Mais :

$$\sum_{k=0}^{q} pk = t.$$

Par conséquent :

$$N \leqq l.f(n;\ t/l).$$

Si $t/l \leqq n/2$, puisque $l \leqq t$, on a :

$$N \leqq t.\mathrm{Log}_2\, 2n.(l/t) \leqq t.\mathrm{Log}_2\, 2n.$$

Si $t/1 \geqq n/2$, on a : $n.l - t \leqq t$. De plus, si $t = n$, on doit avoir $l = 1$, auquel cas il n'y a plus rien à déterminer. On a donc :

$$n.l/(n.l - t) \leqq n/(n - t) \leqq n.$$

Par conséquent :

$$N \leqq l.(n - (t/l)).\mathrm{Log}\ 2n/(n - (t/l)) = (n.l - t).\mathrm{Log}_2\, 2n.l/(n.l - t) \leqq t.\mathrm{Log}_2\, 2n.$$

On connait alors les couleurs : $i1,\ i2, \ldots, it$ qui apparaissent dans le code s^*. Pour déterminer le nombre de fois où elles interviennent, on joue les $t-1$ codes :

$$s = i,\ i, \ldots, i \qquad \text{où } i = i2,\ i3, \ldots, it.$$

A chaque fois, le nombre de points obtenus est ni. De son coté, $n1$ se détermine par :

$$n = n1 + n2 + \ldots + nt.$$

La déterminat on des couleurs demande ainsi un nombre de coups qui se majore par :

$1 + (q+1) + l.f(n;\ t/l) + (t-1)$

$$\leq m/n+t.\mathrm{Log}_2\, 2n+t+1$$
$$\leq m/n+n.\mathrm{Log}_2\, n+2.n+1 \quad \text{puisque } t\leq n.$$

Cas où $m\leq n$

Le principe est le même. On joue successivement les codes :

$$s=m,\ m,\ \ldots,\ m \qquad \text{et} \qquad s=1,\ 2,\ \ldots,\ m,\ m,\ \ldots,\ m.$$

Le premier coup fournit nm, le second, le nombre t' de couleurs différentes de m qui interviennent dans s^*. Pour déterminer ces couleurs, il faut un nombre de coups qui se mahore par :

$$f(m-1;\ t')\leq m-1.$$

Pour savoir combien de fois elles interviennent, il faut : $t'-1$ coups supplémentaires. Soit en tout :

$$2+(m-1)+(t'-1)\leq m+t\leq 2.m \quad \text{puisque } t\leq m.$$

b. Localisation des couleurs

Notons par : 1, 2, . . ., t, les couleurs qui interviennent dans s^*, respectivement : $n1$, $n2$, . . . nt fois. On a alors :

$$n1+n2+\ldots+nt=n \qquad (V.1)$$

et on peut supposer que :

$$n1\geq n2\geq \ldots \geq nt\geq 1. \qquad (V.2)$$

On suppose également que les recherches precédentes ont déterminé une autre couleur qui n'intervient pas dans s^*.

Avec les méthodes exposées au paragraphe précédent, on peut déterminer successivement dans s^* : parmi les n positions possibles, les $n1$ occupées par la couleur 1, puis parmi es $n-n1$ positions restantes les $n2$ occupées par la couleur 2, etc. jusqu'à la couleur $t-1$.

Le nombre N de coups nécessaires se majore par :

$$N\leq \sum_{J=1}^{t-1} f\left(n-\sum_{i=1}^{J-1} nJ;\ nJ\right).$$

Il vient par le lemme III.1 :

$$N\leq f(n0;\ n-nt),$$

où :

$$n0=\sum_{J=1}^{t-1}\left(n-\sum_{i=1}^{J-1} nJ\right)=(t-1).n-\sum_{i=2}^{t-2}(t-i-1).ni.$$

D'aprés (V.1) et (V.2) :

$$n \leqq t.n1,$$
$$n-n1 \leqq (t-1).n2,$$
$$n-n1-n2 \leqq (t-2).n3,$$

etc.

Par sommation, ces inégalités donnent :

$$n0 \leqq \sum_{i=1}^{t-1}(t-i+1).ni=2.\sum_{i=1}^{t-1} ni+\sum_{i=1}^{t-2}(t-i-1).ni=2.(n-nt)+(t-1).n-n0,$$

d'où :

$$n0 \leqq n-nt+(t-1).n/2.$$

On en déduit, avec les remarques III.1 et III.2, que :

$$N \leqq f(n-nt+(t-1).n/2;\ n-nt).$$

Si $t \geqq 3$, on a :

$$n.(t-1)/2 \geqq n \qquad \text{et} \qquad n-nt \leqq (n-nt+(t-1).n/2)/2.$$

Par conséquent :

$$N \leqq (n-nt).\operatorname{Log}_2(2+n.(t-1)/(n-nt)).$$

D'après (V.1) et (V.2) :

$$n \geqq t.nt,$$

d'où :

$$(t-1).n \leqq t.(n-nt) \qquad \text{et} \qquad n.(t-1)/(n-nt) \leqq t.$$

On en déduit que :

$N \leqq (n-nt).\operatorname{Log}_2(t+2)$

$$\begin{aligned} &\leqq (n-1) . \operatorname{Log}_2 (n+2) \quad \text{puisque } t \leqq n \text{ et } nt \geqq 1, \\ &N \leqq (n-1) . \operatorname{Log}_2 (n+2) \leqq n . \operatorname{Log}_2 n \quad \text{puisque } n \geqq 2. \end{aligned} \tag{V.3}$$

Si $t=2$, il faut déterminer, parmi n positions possibles, les ni occupées par la couleur 1. Le nombre N de coups nécessaires se majore ici par :

$$N \leqq f(n;\ n1) \leqq n,$$

et l'inégalité obtenue dans le cas $t>2$ est ici encore valable.

Cas où $m \leqq n$

La méthode utilisée suppose connue une couleur qui n'intervient pas dans le code caché (ou éventuellement, une couleur qui intervient mais qui a déjà été localisée).

Si $m>n$, cela ne pose pas de problème. En effet, la détermination des couleurs en a fait apparaitre obligatoirement une qui n'apparaît pas dans s^*.

Il en est de même si $m \leqq n$ et $t<m$. En fait, on peut obtenir dans ce cas une majoration un peu plus fine. En effet, en revenant à (V.3) :

$$N \leqq (n-nt) . \operatorname{Log}_2 (t+2).$$

et en tenant compte de :

$$nt \leqq n/t.$$

il vient :

$$n-nt \leqq n . (t-1)/t \leqq n . (m-2)/(m-1),$$

d'où :

$$N \leqq n . (m-2)/(m-1) . \operatorname{Log}_2 (m+1) \leqq n . \operatorname{Log}_2 m.$$

Par contre, si $m \leqq n$ et $t=m$, il faut modifier la méthode utilisée précédemment.

En supposant maintenant que les couleurs qui interviennent sont : 1, 2, . . ., m, respectivement : $n1$, $n2$, . . ., nm fois, on joue tout d'abord les n codes suivants :

$$s1=2,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1$$
$$s2=1,\ 2,\ 1,\ \ldots,\ 1$$
$$s3=1,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 1$$

etc.

Posons :

$$s^* = i1\ i2, \ldots, in.$$

Le nombre de points noirs obtenus en jouant sk est alors :

$$pn = \begin{cases} n1 - 1 & \text{si} \quad ik = 1, \\ n1 + 1 & \text{si} \quad ik = 2, \\ n1 & \text{si} \quad ik > 2. \end{cases}$$

On localise ainsi complétement les couleurs 1 et 2 de s^*. Cette méthode peut d'ailleurs s'utiliser directement dans les cas ou $t = 2$.

Il faut ensuite localiser les $m - 2$ couleurs restantes qui occupent $n - n1 - n2 \leqq n - 2$ positions. On connait aussi une couleur (1 ou 2) n'intervenant pas. Avec ce qui précède, le nombre total N de coups nécessaires à la localisation se majore dans ce cas par :

$$N \leqq n + (n-2) . \operatorname{Log}(m-2) \leqq n + n . \operatorname{Log} m.$$

En fin de compte, on obtient le résultat suivant.

PROPOSITION V.1 : *Le nombre total de coups nécessaires pour trouver un code caché est majoré par :*

$$m/n + 2n . \operatorname{Log}_2 \mathrm{n} + 2\mathrm{n} + 1 \qquad si \quad m > n,$$
$$n . \operatorname{Log}_2 2m \qquad si \quad m \leqq n,$$

soit encore :

$$O(m/n + n . \operatorname{Log}_2 n) \qquad si \quad m > n,$$
$$O(n . \operatorname{Log}_2 m) \qquad si \quad m \leqq n$$

Remarque V.1 : Il faut éventuellement rajouter aux estimations précédentes un coup supplémentaire destiné à montrer le code s^* trouvé.

VI. CONCLUSIONS

Que peut-ont penser de la stratégie proposée? Il est probable qu'elle est « à peu près optimale » pour n (resp. m) fixé et pour m (resp. n) « grand », par exemple dans les cas extrêmes $n = 2$ ou $m = 2$.

Dans les autres cas rien n'est moins sûr. En effet on détermine tout d'abord les couleurs qui interviennent dans le code caché. Pour cela, on propose un certain nombre de codes en échange de l'information : nombre de points noirs + nombre de points blancs. On n'utilise ainsi qu'une partie de l'information reçue alors qu'il faudrait en tirer des renseignements supplémentaires relatifs à la localisation des couleurs. Quoiqu'il en soit, la proposition V. 1 permet de majorer l'ordre d'une stratégie optimale.

Il serait souhaitable d'avoir aussi une minoration de cet ordre. On peut en trouver une, qui est malheuresement assez médiocre, de la façon suivante.

Soient *pn* et *pb* les points obtenus après avoir joué un coup. On a :

$$0 \leqq pn + pb \leqq n \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq pn \leqq n.$$

Il y a donc :

$$p = n.(n+3)/2$$

possibilités en excluant le cas impossible : $pn = n-1$, $pb = 1$.

On a montré dans [5] que pour toute stratégie, l'ordre est minoré par $q\,0$, plus petit entier q tel que :

$$1 + p + p^2 + \ldots + p^q \geqq m^n.$$

On en déduit que :

$$q\,0 \geqq n.\operatorname{Log} m/\operatorname{Log} p.$$

BIBLIOGRAPHIE

1. M. M. FLOOD, Journal of Recreational Mathematics (à paraitre).
2. R. W. IRVING, *Towards an Optimum Mastermind Strategy*, Journal of Recreational Mathematics, vol. 11, (2), 1978-79, p. 81-87.
3. D. E. KNUTH, *The Computer as Mastermind*, Journal of Rrecreational Mathematics, vol. 9, 1976-77, p. 1-6.
4. E. NEUWIRTH, *Some strategies for Mastermind*, Zeitschrift fur operation Research, vol. 26, 1982, p. 257-278.
5. D. VIAUD, *Une Formalisation du Jeu de Mastermind*, R.A.I.R.O. Recherche Operationnelle, vol. 13, 1979, p. 307-321.
6. D. VIAUD, *Graphe d'une Stratégie de Mastermind*, Publications I.R.M.A., Université Louis-Pasteur, Strasbourg, 1979.

Imprimerie GAUTHIER-VILLARS-France
Dépôt légal 1987 : Imprimeur : 3018 — Éditeur : 029 — CPPP 63423
Le Directeur de la Publication : J.-M. BOURGOIS
1171-87 février 1987 *Imprimé en France*