

B. PEROCHE

B. SADI

## **Recouvrement et partition en chaînes des arêtes d'un graphe cubique**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 20, n° 2 (1986), p. 163-170

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1986\\_\\_20\\_2\\_163\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1986__20_2_163_0)

© AFCET, 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## RECOUVREMENT ET PARTITION EN CHAÎNES DES ARÊTES D'UN GRAPHE CUBIQUE (\*)

par B. PEROCHE <sup>(1)</sup>, et B. SADI <sup>(2)</sup>

---

Résumé. — *Étant donné un graphe cubique, nous montrons que la détermination de son indice de recouvrement en chaînes est un problème NP-complet et nous exhibons un algorithme linéaire pour obtenir son indice de partition en chaînes.*

Mots clés : Complexité, algorithme, graphe, recouvrement.

Abstract. — *Given a cubic graph, we prove that the determination of its unrestricted path number is a NP-complete problem but we exhibit a linear algorithm for the determination of its path number.*

Keywords: Complexity, algorithm, graph, cover.

### 1. INTRODUCTION

Un graphe  $G$  est constitué d'un ensemble fini non vide de sommets,  $X(G)$ , et d'une famille finie  $E(G)$  de paires de sommets, les arêtes.

La terminologie suivie sera celle de Berge [1].

Soit  $P$  une famille de chaînes élémentaires de  $G$ . Si chaque arête de  $G$  appartient à au moins un élément de  $P$ , alors  $P$  est un recouvrement en chaînes des arêtes de  $G$ ; si chaque arête de  $G$  appartient à exactement un élément de  $P$ , alors  $P$  est une partition en chaînes des arêtes de  $G$ . On notera  $\rho(G)$  [resp.  $\pi(G)$ ] le cardinal minimal d'un recouvrement (resp. partition) en chaînes de  $E(G)$ . Ces invariants ont été introduits par Harary dans [4] et étudiés par de nombreux auteurs, en particulier [2], [5], [6], [7] et [9].

Dans cet article, nous allons nous intéresser à la complexité de problèmes de détermination des invariants définis ci-dessus. Pour les définitions de complexité utilisées ici, nous renvoyons le lecteur à [3].

---

(\*) Reçu mars 1985.

<sup>(1)</sup> Département Informatique, École des Mines de Saint-Étienne, 158, cours Fauriel, 42023 Saint-Étienne Cedex 2, France.

<sup>(2)</sup> Laboratoire d'Économétrie, Université P. et M. Curie, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex, France.

Dans [8], les problèmes de détermination de  $\pi(G)$  et de  $\rho(G)$  ont été classés. Plus précisément, si on note 2-PAR le problème :

*donnée* : un graphe  $G$ ;

*question* : a-t-on  $\pi(G) = 2$  ?

et 2-REC le problème :

*donnée* : un graphe  $G$ ;

*question* : a-t-on  $\rho(G) = 2$  ?

on a :

THÉORÈME A [8] : 2-PAR et 2-REC sont NP-complets.

Dans cet article, nous allons nous restreindre à la classe des graphes cubiques. Nous allons montrer que la détermination de  $\rho(G)$  reste un problème NP-complet; par contre, nous exhiberons un algorithme linéaire fournissant une partition en chaînes de cardinal minimal des arêtes de  $G$ .

A notre connaissance, c'est la première fois que des problèmes correspondants de partition et de recouvrement des arêtes ou des sommets d'un graphe ne figurent pas dans la même classe de complexité. Nous pensons qu'il s'agit là d'un fait qui mérite d'être souligné.

## 2. DÉTERMINATION DE L'INDICE DE RECOUVREMENT

Considérons le problème suivant, que nous noterons 2-REC/CUBIQUE :

*donnée* : un graphe cubique  $G$ ;

*question* : a-t-on  $\rho(G) = 2$  ?

Il est clair que 2-REC/CUBIQUE appartient à NP. Nous allons montrer que ce problème est NP-complet en exhibant une transformation polynomiale de 2-DEC vers 2-REC/CUBIQUE, où 2-DEC est défini de la manière suivante :

*donnée* : un graphe orienté  $G = (X, U)$  tel que  $\forall x \in X, d^+(x) = d^-(x) = 2$ ;

*question* : peut-on partitionner  $U$  en deux circuits hamiltoniens ?

Rappelons que 2-DEC a été étudié dans [8] et qu'il a été classé NP-complet.

Pour définir la transformation, nous allons utiliser le graphe cubique  $G_0$  défini par la figure 1.

Ce graphe vérifie les propriétés suivantes :

LEMME 1 :

(i)  $\rho(G_0) = 2$ .

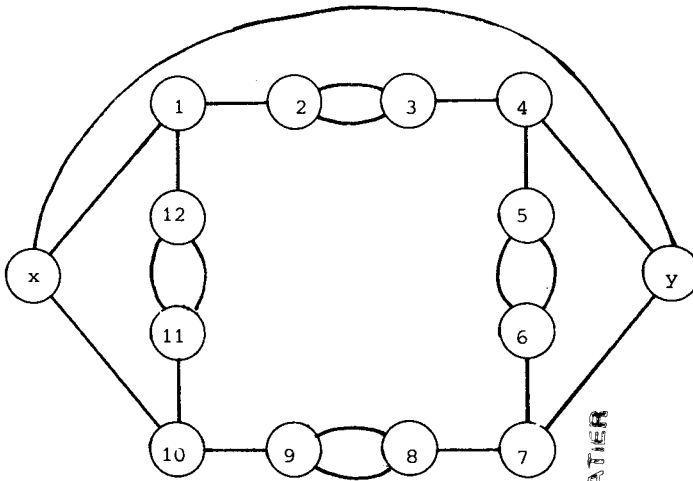


Figure 1

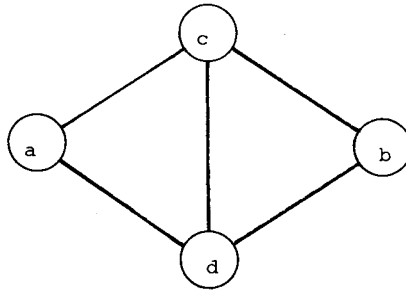


Figure 2

UNIVERSITÉ PAUL SABATIER  
 LABORATOIRE  
 DE STATISTIQUE ET PROBABILITÉS  
 118, ROUTE DE NARBONNE  
 31062 TOULOUSE CEDEX

(ii) Pour tout recouvrement en chaînes  $P = \{P_1, P_2\}$  des arêtes de  $G_0$ ,  $xy$  appartient à  $P_1$  et à  $P_2$ .

Preuve: (i) est évident.

Pour prouver (ii), il suffit de montrer que toute chaîne hamiltonienne de  $G_0$  contient  $xy$ . Supposons donc qu'il existe une chaîne hamiltonienne  $\mu$  ne contenant pas  $xy$ . Si  $\mu$  n'a pas d'extrémité en  $x$ ,  $\mu$  a nécessairement une extrémité dans  $\{11, 12\}$ , par exemple 12; l'autre extrémité ne peut donc être que 9 et  $\mu$  ne peut alors passer à la fois par 5 et par  $y$ . Ce cas est donc impossible et  $\mu$  joint donc  $x$  à  $y$ . Supposons que  $\mu$  contienne l'arête  $\{x, 1\}$ ; si  $\{1, 2\}$  (resp.  $\{1, 12\}$ ) appartient à  $\mu$ , 12 (resp. 2) doit être extrémité de  $\mu$ , ce qui contredit le fait que  $\mu$  joint  $x$  à  $y$ . Toute chaîne hamiltonienne de  $G_0$  contient donc  $xy$ .  $\square$

*Remarque*: il est possible d'obtenir un graphe ayant la propriété du graphe  $G_0$  et sans arêtes parallèles; pour ce faire, il suffit de remplacer toute paire d'arêtes parallèles entre deux sommets par le graphe  $H$  de la figure 2.

On peut maintenant définir la transformation  $T$ .

Soit  $G=(X, U)$  un graphe orienté tel que  $\forall x \in X, d^+(x)=d^-(x)=2$ . On supposera que  $X=\{1, 2, \dots, n\}$ .

(i) On remplace le sommet 1 par un graphe isomorphe à  $G_0 - xy + xx' + yy'$ , où  $x'$  et  $y'$  sont de nouveaux sommets.

(ii) Pour tout  $i \in 2, \dots, n$ , on remplace le sommet  $i$  par un graphe  $G_i$  isomorphe à  $H + aa' + bb'$ , où  $a'$  et  $b'$  sont de nouveaux sommets (on supposera que  $X(G_i)=\{a'_i, a_i, b_i, b'_i, c_i, d_i\}$ ).

(iii) Pour tout  $i$  et  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , on remplace chaque arc  $[i, j]$  par :

- une arête  $b'_i a'_j$ , si  $i \neq 1$  et  $j \neq 1$ ;
- une arête  $y' a'_j$ , si  $i = 1$ ;
- une arête  $b'_i x'_j$ , si  $j = 1$ .

$T$ , qui peut être schématisée par la figure 3, est bien polynômiale et associe à  $G$  un graphe non orienté cubique  $G'$ . On a :

**THÉORÈME 2**:  $G$  peut être décomposé en deux circuits hamiltoniens si et seulement si  $\rho(G')=2$ .

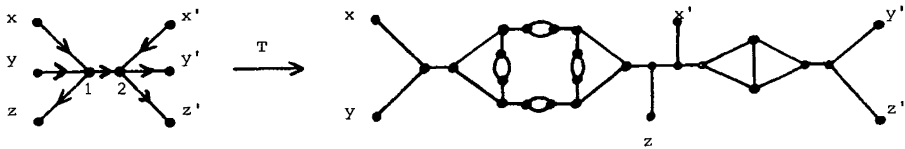


Figure 3

*Preuve*: Supposons que  $G$  soit décomposé par les deux circuits hamiltoniens :

$$c_1 = [i_1 = 1, i_2, \dots, i_n, i_1]$$

et

$$c_2 = [j_1 = 1, j_2, \dots, j_n, j_1].$$

Si on note :

$$\rightarrow i = [a'_i, a_i, c_i, d_i, b_i, b'_i],$$

$$\leftarrow i = [a'_i, a_i, d_i, c_i, b_i, b'_i],$$

les deux chaînes recouvrant les arêtes de  $G_i$ , on peut définir deux chaînes dans  $G'$  par :

$$\begin{aligned} \mu_1 &= [9, 8, 7, 6, 5, 4, y, y', \rightarrow i_2, \rightarrow i_3, \dots, \rightarrow i_m, x', x, 10, 11, 12, 1, 2, 3], \\ \mu_2 &= [12, 11, 10, 9, 8, 7, y, y', \leftarrow j_2, \leftarrow j_3, \dots, \leftarrow j_m, x', x, 1, 2, 3, 4, 5, 6]. \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que  $\{\mu_1, \mu_2\}$  est un recouvrement en chaînes des arêtes de  $G'$ .

Inversement, supposons que  $\rho(G')=2$  et soit  $P = \{\mu_1, \mu_2\}$  un recouvrement en chaînes minimal des arêtes de  $G'$ . Comme  $G'$  est cubique,  $\mu_1$  et  $\mu_2$  ont quatre extrémités distinctes et, d'après le Lemme 1, ces quatre extrémités appartiennent au graphe isomorphe à  $G_0$ . Pour  $i=1, 2$ , chaque chaîne  $\mu_i$  arrivant en un sommet  $a'_j$  traverse donc tous les sommets du graphe  $G_j$  et ressort par  $b'_j$ . En remplaçant chaque sous-chaîne  $[a'_j, \dots, b'_j]$  par le sommet  $j$ , on obtient deux circuits hamiltoniens de  $G$  qui sont disjoints, aucune arête  $a'_j b'_k$  de  $G'$  ne pouvant être couverte deux fois par les chaînes de  $P$ .  $\square$

Il est facile de voir que le graphe cubique  $G'$  obtenu par la transformation  $T$  est 2-connexe. Définissons alors le problème 2-REC/3-CONNEXE par :

*donnée* : un graphe  $G$  cubique, 3-connexe;

*question* : a-t-on  $\rho(G)=2$ ?

Nous proposons la conjecture suivante :

CONJECTURE 1: 2-REC/3-CONNEXE est NP-complet.

### 3. DÉTERMINATION DE L'INDICE DE PARTITION

Soit  $G$  un graphe cubique connexe simple (c'est-à-dire sans arêtes parallèles); nous noterons  $n = |X(G)|$  et  $m = |E(G)|$ . Nous allons proposer ci-dessous un algorithme linéaire exhibant une partition en chaînes de cardinal minimal de  $E(G)$ .

Nous fournirons deux versions de cet algorithme. La première présente les idées utilisées et permet de prouver facilement l'algorithme; la seconde, plus détaillée, permet de mesurer la complexité de l'algorithme.

#### 3.1. Version simplifiée

```

début
  Tant qu'il existe une arête  $e$  non marquée, faire
    début
      prendre une chaîne élémentaire maximale  $\mu$  contenant  $e$ 
      marquer toutes les arêtes de  $\mu$ 
    fintantque
  fin
    
```

Pour prouver cet algorithme, nous allons démontrer la propriété suivante :

**PROPOSITION 3:** *L'algorithme fournit une partition en chaînes élémentaires où tout sommet est exactement extrémité d'une chaîne.*

*Preuve:* Raisonnons par l'absurde; supposons la propriété fautive et soit  $x$  le premier sommet rencontré au cours de l'exécution de l'algorithme en lequel deux chaînes  $\mu_1$  et  $\mu_2$  aient une extrémité commune. On supposera que  $x$  a pour voisins  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  (comme  $G$  est simple,  $x_i \neq x_j$  si  $i \neq j$ ). On supposera que  $\mu_1 = [x, x_1, \dots]$  a été obtenue avant  $\mu_2 = [x, x_2, \dots]$  lors de l'exécution de l'algorithme.

Comme  $\mu_1$  est maximale par construction,  $\mu_1$  passe par  $x_3$ ; le même raisonnement montre que  $\mu_2$  passe par  $x_3$ . Comme l'arête  $xx_3$  ne peut appartenir ni à  $\mu_1$ , ni à  $\mu_2$ , on a  $\mu_1 = [x, x_1, \dots, x_3]$  et  $\mu_2 = [x, x_2, \dots, x_3]$ . Considérons alors le sommet  $y$  voisin de  $x_3$  sur  $\mu_2$ . Comme  $\mu_1$  est maximale,  $\mu_1$  passe par  $y$ ; on obtient donc une contradiction car  $y$ , de degré 3, devrait être sommet intérieur de deux chaînes distinctes, ce qui est impossible.  $\square$

La Proposition 3 permet de valider l'algorithme car elle met en évidence l'invariant de l'algorithme : à chaque fois que l'on visite un arc supplémentaire, la propriété est vérifiée.

Par ailleurs,  $\pi(G) \geq i(G)/2$  (voir [7]), où  $i(G)$  est le nombre de sommets impairs de  $G$ . D'après la Proposition 3, on obtient  $i(G)/2$  chaînes élémentaires partitionnant  $E(G)$ , ce qui prouve que la partition est optimale.

### 3.2. 2<sup>e</sup> version

Nous allons présenter maintenant une version plus précise de l'algorithme; cette version sera exprimé en un pseudo-langage proche de PASCAL.

Nous utiliserons les structures de données suivantes :

deux tableaux à une dimension, MARQ et NUM, indicés par les sommets;  
un tableau à une dimension, UTILISE, indicé par les arêtes;  
une pile PIL, qui pourra contenir les sommets.

### 3.3. Algorithme PARTIT ( $G$ )

début

1. pour  $j$  de 1 à  $n$ , faire

    début

    MARQ [ $j$ ]  $\leftarrow 0$

    NUM [ $j$ ]  $\leftarrow 0$

    finpour

2. pour toute arête  $xy$ , faire

    UTILISE [ $xy$ ]  $\leftarrow 0$

3.  $i \leftarrow 1$

    choisir une arête  $e = xy$  dans  $G$

```

 $\mu_i \leftarrow \{xy\}$ 
UTILISE [xy]  $\leftarrow$  1
empiler (y, PIL)
MARQ [x]  $\leftarrow$  MARQ [x] + 1
MARQ [y]  $\leftarrow$  MARQ [y] + 1
NUM [x]  $\leftarrow$  i
NUM [y]  $\leftarrow$  i
4. tant que c'est possible, faire
    début
    choisir une arête uv, avec
     $u \in \{\text{origine}(\mu_i), \text{extrémité}(\mu_i)\}$ , telle que NUM [v] = 0
     $\mu_i \leftarrow \mu_i \cup \{uv\}$ 
    UTILISE [uv]  $\leftarrow$  1
    empiler (v, PIL)
    MARQ [v]  $\leftarrow$  MARQ [v] + 1
    NUM [v]  $\leftarrow$  i
    fintantque
5. dépiler (PIL, x)
6. tant que PIL non vide, faire
    début
    i  $\leftarrow$  i + 1
7. répéter
    dépiler (PIL, x)
    jusqu'à ce que (MARQ [x] < 2) ou (PIL vide)
8. si PIL non vide, alors
    début
    choisir l'arête xy telle que UTILISE [xy] = 0
     $\mu_i \leftarrow \{xy\}$ 
    UTILISE [xy]  $\leftarrow$  1
    MARQ [x]  $\leftarrow$  MARQ [x] + 1
    MARQ [y]  $\leftarrow$  MARQ [y] + 1
    NUM [x]  $\leftarrow$  i
    NUM [y]  $\leftarrow$  i
    empiler (y, PIL)
    x  $\leftarrow$  y
9. tant que c'est possible, faire
    début
    choisir une arête xy telle que UTILISE [xy] = 0
    et NUM [y] < i
     $\mu_i \leftarrow \mu_i \cup \{xy\}$ 
    UTILISE [xy]  $\leftarrow$  1
    MARQ [y]  $\leftarrow$  MARQ [y] + 1
    NUM [y]  $\leftarrow$  i
    empiler (y, PIL)
    fintantque
10. dépiler (PIL, x)
    finsi
    fintantque
fin.
    
```

Cette version de l'algorithme permet de préciser comment on construit une chaîne maximale contenant une arête  $e$  non marquée. Par ailleurs, la pile a été introduite pour obtenir une complexité en temps linéaire de l'algorithme.

### 3.4. Complexité de l'algorithme

Grâce au tableau UTILISE, chaque arête est utilisée une fois dans l'algorithme. De plus, chaque sommet est empilé au plus deux fois dans PIL,



chaque élément de MARQ, NUM, UTILISE reçoit au plus deux affectations, donc le nombre d'opérations élémentaires utilisé par PARTIT ( $G$ ) est en  $O(n+m)$ ; comme  $m = 3n/2$ , l'algorithme a une complexité en temps en  $O(n)$ .

La complexité en espace est également linéaire par rapport à  $n$ : les tableaux MARQ, NUM et UTILISE et la pile PIL utilisant  $O(n+m)$  emplacements.

Remarque: Dans [6], Lovasz a montré que pour tout graphe impair (graphe dont tous les sommets sont de degré impair),  $\pi(G) = |X(G)|/2$ . Nous retrouvons ici ce résultat dans le cas très particulier des graphes cubiques, mais par une procédure algorithmique, ce qui ne paraît pas être le cas de la preuve de Lovasz.

De plus, nous pensons que notre résultat peut être notablement amélioré:

Notons PAR/IMPAIR le problème:

*donnée*: un graphe  $G$  dont tous les sommets sont impairs;

*question*: trouver une partition en chaîne optimale des arêtes de  $G$ .

Nous proposons la:

CONJECTURE 2: PAR/IMPAIR est polynômial.

## BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. A. DONALD, *An Upper Bound for the Path Number of a Graph*, J. of Graph Theory, vol. 4, 1980, p. 189-201.
3. M. R. GAREY et D. S. JOHNSON, *Computers and Intractability*, Freeman, San Francisco, 1979.
4. F. HARARY, *Covering and Packing in Graphs I*, Ann. N.Y. Acad. Sc., vol. 175, 1970, p. 198-205.
5. F. HARARY et J. SCHWENK, *Covering and Packing in Graphs II*, in: R. C. READ ed., *Graph Theory and Computing*, Acad. Press, New York, 1972.
6. L. LOVASZ, *On Covering in Graphs*, in: *Theory of graphs*, Erdos, Katona eds., Tihany, Acad. Press, New York, 1968, p. 231-236.
7. B. PEROCHE, *Connexité et indices de recouvrement dans les graphes*, Thèse d'État, Université Paris-Nord, 1982.
8. B. PEROCHE, *NP-completeness of Some Problems of Partitioning and Covering in Graphs*, *Discrete Applied Math.*, vol. 8, 1984, p. 195-208.
9. R. STANTON, D. D. COWAN et L. O. JAMES, *Some Results on Path Numbers*, Proc. of the Louisiana Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing, 1970, p. 112-135.