

ROLAND JEGOU

Sur quelques formes quadratiques associées à des partitions d'entiers

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 19, n° 2 (1985),
p. 185-201

http://www.numdam.org/item?id=RO_1985__19_2_185_0

© AFCET, 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR QUELQUES FORMES QUADRATIQUES ASSOCIÉES A DES PARTITIONS D'ENTIERS (*)

par Roland JEGOU ⁽¹⁾

Résumé. — *Nous résolvons ici un problème de minimisation et de maximisation d'une forme quadratique en variables entières pour une partition de n en k sommants, puis sur l'ensemble $\mathcal{P}(n, k)$ de ces partitions.*

Nous étendons ensuite ces résultats à une forme quadratique voisine, montrons qu'ils permettent d'obtenir le nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse (graphe simple orienté sans circuit et sans arc de transitivité) en fonction de son ordre n uniquement puis de n et du rang du graphe.

Enfin, une interprétation en terme de joint de k stables suivant une chaîne ou un cycle élémentaire conduit à une généralisation intéressante des problèmes posés initialement.

Mots clés : Forme quadratique; Partition d'entier; Optimisation.

Abstract. — *In this paper we study particular integer quadratic forms associated with partitions of integers. We consider the problem to minimize and to maximize such functions, at first with a partition of n with k integers, then over the set $\mathcal{P}(n, k)$ of these partitions.*

We extend this results to another similar quadratic form.

We prove that the maximal number of arcs in a Hasse diagram (i. e. a directed acyclic graph without loops and transitivity arc) with n vertices can be obtained by these methods we give two upper bounds the first one depending on n and the second on n and the rank of the graph.

We end by noticing that these results can be used also for the case of the join of k stables in elementary chain and cycle and propose an interesting generalization of the initial problems.

Keywords: Quadratic form; integer partition; optimization.

I. INTRODUCTION

Nous nous intéressons ici principalement à la forme quadratique en k variables

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1}$$

(*) Reçu en mai 1983.

(¹) École Nationale Supérieure des Mines de Saint-Étienne 158, Cours Fauriel, 42023 Saint-Étienne, France.

sur laquelle nous étudions les problèmes de minimisation et de maximisation en variables entières sous contraintes linéaires suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^k x_i = n \\ x_i \geq 1 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} \\ \sum_{i=1}^k x_i = n \\ x_i \geq 1 \end{array} \right.$$

Nous montrons que les solutions de ces problèmes peuvent s'obtenir uniquement par des techniques simples de type analyse combinatoire.

Notre démarche sera la suivante.

Étant donnés deux entiers k, n vérifiant $2 \leq k \leq n$ nous désignerons par $\mathcal{P}(n, k)$ l'ensemble des partitions de n en k sommants que nous définirons à la numérotation près, comme L. Comtet dans [3], par :

$$\mathcal{P}(n, k) = \left\{ (n_1, n_2, \dots, n_k) / 1 \leq n_1 \leq \dots \leq n_k, \sum_{i=1}^k n_i = n \right\}$$

et par Σ_k l'ensemble des permutations de $[1, k]$.

Pour $\sigma \in \Sigma_k$ et $p \in \mathcal{P}(n, k)$ nous noterons

$$Q(p, \sigma) = Q(n_{\sigma(1)}, \dots, n_{\sigma(k)}) = \sum_{i=1}^{k-1} n_{\sigma(i)} n_{\sigma(i+1)}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$a_i = n_{\sigma(i)} \quad \forall i \in [1, k]$$

de sorte que :

$$Q(p, \sigma) = Q(a_1, a_2, \dots, a_k) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1}.$$

Nous allons résoudre les problèmes suivants :

(PB1) Étant donnée $p \in \mathcal{P}(n, k)$ déterminer les permutations extrémales σ_m et σ_M c'est-à-dire vérifiant

$$Q(p, \sigma_m) \leq Q(p, \sigma) \leq Q(p, \sigma_M) \quad \forall \sigma \in \Sigma_k.$$

(PB2) Déterminer les partitions extrémales p_m et p_M c'est-à-dire vérifiant

$$Q(p_m, \sigma_m) \leq Q(p, \sigma) \leq Q(p_M, \sigma_M) \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k), \quad \forall \sigma \in \Sigma_k.$$

A priori, σ_m et σ_M dépendent de la partition p considérée.

D'autre part, à toute permutation σ correspond la permutation « miroir » $\bar{\sigma}$ définie par $\bar{\sigma}(i) = \sigma(k+1-i) \quad \forall i \in [1, k]$, et qui vérifie trivialement.

LEMME I. 1. — $Q(p, \sigma) = Q(p, \sigma)$.

Nous déterminerons tout d'abord les permutations extrémales σ_m et σ_M puis nous en déduirons les formes exactes des partitions minimales et maximales p_m et p_M .

Enfin, après avoir montré que les méthodes utilisées s'appliquent pour une forme quadratique voisine ainsi que pour le calcul du nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse, nous étendrons les problèmes (PB1) et (PB2) à des formes quadratiques plus générales en terme de joint de k stables suivant un graphe donné, ainsi qu'à l'opération de substitution dans un hypergraphe.

II. RÉOLUTION DE (PB1) ET (PB2)

A l'aide du Lemme II. 1 nous déterminons les permutations extrémales σ_m et σ_M et montrons qu'elles sont uniques dans un sens que nous préciserons. Nous en déduisons les partitions minimales et maximales, p_m et p_M à partir desquelles nous pouvons obtenir un encadrement précis de $Q(p, \sigma)$ en fonction de k et n .

Pour toute partition $p \in \mathcal{P}(n, k)$ et toute permutation $\sigma \in \Sigma_k$ nous avons :

LEMME II. 1. — Si $i, j \in [1, k]$ vérifient $i + 1 \leq j$

Si $(a_{i-1} \geq a_{j+1})$ et $(a_i \geq a_j)$ (I)

ou $(a_{i-1} \leq a_{j+1})$ et $(a_i \leq a_j)$ (II)

alors

$$Q(\dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots) \geq Q(\dots, a_{i-1}, a_j, a_{j-1}, \dots, a_{i+1}, a_i, a_{j+1}, \dots)$$

Si $(a_{i-1} \leq a_{j+1})$ et $(a_i \geq a_j)$ (III)

ou $(a_{i-1} \geq a_{j+1})$ et $(a_i \leq a_j)$ (IV)

alors

$$Q(\dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots) \leq Q(\dots, a_{i-1}, a_j, a_{j-1}, \dots, a_{i+1}, a_i, a_{j+1}, \dots).$$

Preuve. — Le résultat est immédiat car :

$$\begin{aligned} & Q(\dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_{j-1}, a_j, a_{j+1}, \dots) \\ & - Q(\dots, a_{i-1}, a_j, a_{j-1}, \dots, a_{i+1}, a_i, a_{j+1}, \dots) \\ & = a_{i-1}a_i + a_ja_{j+1} - a_{i-1}a_j - a_i a_{j+1} \\ & = (a_{i-1} - a_{j+1})(a_i - a_j). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarquons que le Lemme II.1 est valable dans les cas extrêmes $i=1$, dans les cas (II) et (III) par exemple, où il suffit de prendre $a_0=0$ et $j=k$, dans les cas (I) et (IV) en particulier, où il suffit de prendre $a_{k+1}=0$.

Une partition $p=(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ étant donnée, partant d'une permutation quelconque σ de Σ_k , par minorations et majorations successives, utilisant le Lemme II.1, les deux Théorèmes suivants donnent les solutions de (PB1).

D'après le Lemme I.1, quitte à remplacer σ par $\bar{\sigma}$ nous supposons $\sigma_m(1) > \sigma_m(k)$ et $\sigma_M(1) < \sigma_M(k)$, ainsi pour $Q(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nous faisons les hypothèses $a_k \neq n_k$ et $a_k \neq n_1$ dans les Théorèmes II.1 et II.2 respectivement.

THÉORÈME II.1. — $Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, n_1, n_{k-2}, n_3, \dots, n_n, n_{k-3}, n_2, n_{k-1})$.

Preuve. — Le Lemme II.1 appliqué avec $a_i = a_1$ (donc $a_{i-1} = a_0 = 0$) et $a_j = n_k$ puis avec $a_i = n_{k-1}$ et $a_j = a_k$ (donc $a_{j+1} = a_{k+1} = 0$) qui vérifient respectivement les hypothèses (II) et (I) montrent que :

$$Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, a_2, \dots, a_{k-1}, n_{k-1}).$$

De la même façon, en utilisant le Lemme II.1 avec $a_i = a_2$ et $a_j = n_1$, puis $a_i = n_2$ et $a_j = a_{k-1}$ où (I) et (II) sont respectivement vérifiées, nous avons :

$$Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, n_1, a_3, \dots, a_{k-2}, n_2, n_{k-1}).$$

De sorte qu'en appliquant le Lemme II.1 sous les formes (I) et (II) alternativement avec :

$$a_i = a_3 \quad \text{et} \quad a_j = n_{k-2} \tag{II}$$

$$a_i = n_{k-3} \quad \text{et} \quad a_j = a_{k-2} \tag{I}$$

$$a_i = n_{k-3} \quad \text{et} \quad a_j = n_3 \tag{I}$$

$$a_i = n_4 \quad \text{et} \quad a_j = a_{k-3} \tag{II}$$

⋮

nous obtenons finalement

$$Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, n_1, n_{k-2}, n_3, \dots, n_4, n_{k-3}, n_2, n_{k-1}). \quad \blacksquare$$

THÉORÈME II.2. — $Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, n_3, n_5, \dots, n_6, n_4, n_2)$.

Preuve. — En appliquant le Lemme II.1 avec $a_i = a_1$ (donc $a_{i-1} = a_0 = 0$) et $a_j = n_1$ qui vérifie (III) puis avec $a_i = n_2$ et $a_j = a_k$ (donc $a_{j+1} = a_{k+1} = 0$) qui vérifie (IV) nous avons nécessairement

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, a_2, \dots, a_{k-1}, n_2).$$

Supposons avoir montré

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, \dots, n_{2q-1}, a_{q+1}, \dots, a_{k-q}, n_{2q}, \dots, n_2).$$

où $q \geq 1$ et $2q + 1 < k$.

Alors nous obtenons

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, \dots, n_{2q-1}, n_{2q+1}, a_{q+2}, \dots, a_{k-q-1}, n_{2q+2}, n_{2q}, \dots, n_2)$$

de la même façon c'est-à-dire en appliquant de nouveau le Lemme II.1 avec $a_i = a_{q+1}$ et $a_j = n_{2q+1}$, cas (III), puis avec $a_i = n_{2q+2}$ et $a_j = a_{k-q}$, cas (IV).

Si bien que nécessairement

$$Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, n_3, n_5, \dots, n_6, n_4, n_2). \quad \blacksquare$$

Remarquons que d'après les Théorèmes précédents, compte tenu de la notation utilisée pour toute partition $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ à savoir $n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k$, et d'après le Lemme I.1, il y a unicité des permutations extrémales, à la permutation-miroir près.

Résolvons maintenant (PB2).

LEMME II.2. — $Q(p, \sigma) \geq n - 1 \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k), \forall \sigma \in \Sigma_k$.

Preuve. — Pour tout couple x, y de \mathbb{N}^* nous avons $xy \geq x + y - 1$. Si bien que

$$Q(p, \sigma) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1} \geq \sum_{i=1}^{k-1} (a_i + a_{i+1} - 1).$$

Or

$$\sum_{i=1}^{k-1} (a_i + a_{i+1} - 1) = \sum_{i=1}^k a_i + \sum_{i=2}^{k-1} a_i - k + 1.$$

Donc, comme $\sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k n_i = n$ et $a_i \geq 1 \quad \forall i \in [1, k]$, nous obtenons

$Q(p, \sigma) \geq n + k - 2 - k + 1$, c'est-à-dire $Q(p, \sigma) \geq n - 1$. \blacksquare

THÉORÈME II.3. — Toute partition minimale est de la forme

$$p_m = (1, \dots, 1, n_{k-1}, n_k) \quad \text{où } n_{k-1} = 1 \text{ si } k = 2.$$

Preuve. — Si $k = 2$ alors $p_m = (1, n - 1)$ d'après le Lemme II.2 car $Q(p_m, \sigma) = n - 1$ et $Q(p, \sigma) = n_1 n_2 \geq n_1 + n_2 = n$ si $p = (n_1, n_2)$ vérifie $2 \leq n_1 \leq n_2$.

Supposons donc $k \geq 3$.

Comme $n_k + n_{k-1} = n - k + 2$ nous avons :

$$Q(p_m, \sigma_m) = Q(n_k, 1, \dots, 1, n_{k-1}) = n_k + k - 3 + n_{k-1} = n - 1.$$

Ainsi, d'après le Lemme II.2, toute partition de la forme $p_m = (1, \dots, 1, n_{k-1}, n_k)$ est minimale.

Montrons pour établir le Théorème que toute partition minimale est nécessairement de cette forme, c'est-à-dire vérifie $n_1 = \dots = n_{k-2} = 1$.

Soit $p=(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$, il nous suffit de travailler avec la permutation minimale, c'est-à-dire à partir de

$$Q(p, \sigma_m) = Q(n_k, n_1, a_3, \dots, a_{k-1}, n_{k-1}).$$

Nous avons $n_1=1$ car en supposant $n_1 \geq 2$, comme $n_k + a_3 \geq 2$, alors :

$$\begin{aligned} Q(n_k, n_1, a_3, \dots, n_{k-1}) &> Q(n_k + n_1 - 1, 1, a_3, \dots, n_k) \\ &\Leftrightarrow n_k n_1 + n_1 a_3 > n_k + n_1 - 1 + a_3 \\ &\Leftrightarrow (n_1 - 1)(n_k + a_3 - 1) > 0. \end{aligned}$$

De même $a_i=1 \forall i \in [3, k-1]$ car en supposant $a_i \geq 2$, comme $a_{i-1} + a_{i+1} \geq 2$, alors :

$$\begin{aligned} Q(n_k, 1, a_3, \dots, a_i, \dots, n_{k-1}) &> Q(n_k + a_i - 1, 1, a_3, \dots, 1, \dots, n_{k-1}) \\ &\Leftrightarrow n_k + a_i(a_{i-1} + a_{i+1}) > n_k + a_i - 1 + a_{i-1} + a_{i+1} \\ &\Leftrightarrow (a_i - 1)(a_{i-1} + a_{i+1} - 1) > 0. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarquons que dès que $k \geq 3$, n_{k-1} et n_k peuvent prendre des valeurs quelconques, sous réserve que $n_{k-1} + n_k = n - k + 2$.

Le Théorème suivant donne la forme de toute partition maximale p_M quand $4 \leq k \leq n$ et le Corollaire II.1 les expressions de $Q(p_M, \sigma_M)$ en fonction de k et n .

Nous examinerons ensuite les cas particuliers $k=2$ et $k=3$.

THÉORÈME II.4. — *Lorsque k et n vérifient $4 \leq k \leq n$ toute partition maximale est de la forme*

$$P_M = (1, \dots, 1, n_{k-2}, n_{k-1}, n_k)$$

avec $n_{k-2} = 1$ si $k=4$.

Preuve. — Nous établissons ce résultat par majorations successives à partir d'une partition quelconque $p=(n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ en utilisant la permutation maximale.

Si $k \geq 5$, en notant $\{a, b\} = \{n_{k-2}, n_{k-1}\}$, nous avons :

$$\begin{aligned} Q(n_1, n_3, \dots, a, n_k, b, \dots, n_4, n_2) &\leq Q(1, n_3, \dots, a, n_k + n_1 + n_2 - 2, b, \dots, n_4, 1) \\ &\Leftrightarrow n_1 n_3 + n_k(a+b) + n_4 n_2 \leq n_3 + (a+b)n_k + (a+b)(n_1 + n_2 - 2) + n_4 \\ &\Leftrightarrow (a+b-n_3)(n_1-1) + (a+b-n_4)(n_2-1) \geq 0 \end{aligned}$$

car

$$\begin{cases} a \geq n_3 \\ b \geq n_4 \end{cases} \Rightarrow a+b > n_4 \geq n_3.$$

Ainsi p_M vérifie nécessairement $n_1 = n_2 = 1$.

Supposons avoir montré $n_1 = \dots = n_{i-1} = 1$ où i est impair et vérifie

$3 \leq i \leq k-5$ si k est pair et $3 \leq i \leq k-4$ si k est impair, alors $n_i = n_{i+1} = 1$.
 Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} Q(1, \dots, 1, n_i, \dots, a, n_k, b, \dots, n_{i+1}, 1, \dots, 1) \\ \leq Q(1, \dots, 1, 1, n_{i+2}, \dots, a, n_k + n_i + n_{i+1} - 2, b, \dots, n_{i+3}, 1, 1, \dots, 1) \\ \Leftrightarrow n_i + n_i n_{i+2} + (a+b)n_k + n_{i+3} n_{i+1} + n_{i+1} \\ \leq 1 + n_{i+2} + (a+b)n_k + (a+b)(n_i + n_{i+1} - 2) + n_{i+3} + 1 \\ \Leftrightarrow (a+b - n_{i+2} - 1)(n_i - 1) + (a+b - n_{i+3} - 1)(n_{i+1} - 1) \geq 0 \end{aligned}$$

car

$$\begin{cases} a \geq n_{i+2} \geq 1 \\ b \geq n_{i+3} \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+b - n_{i+2} - 1 \geq 0 \\ a+b - n_{i+3} - 1 \geq 0. \end{cases}$$

Nous obtenons ainsi pour $k \geq 5$:

$$\begin{aligned} Q(p_M, \sigma_M) &= Q(1, \dots, 1, n_{k-2}, n_k, n_{k-1}, 1, \dots, 1) \quad k \text{ impair} \\ Q(p_M, \sigma_M) &= Q(1, \dots, 1, n_{k-3}, n_{k-1}, n_k, n_{k-2}, 1, \dots, 1) \quad \text{sinon.} \end{aligned}$$

Si k est pair nous avons nécessairement $n_{k-3} = 1$ car :

$$\begin{aligned} Q(1, \dots, 1, n_{k-3}, n_{k-1}, n_k, n_{k-2}, 1, \dots, 1) \\ \leq Q(1, \dots, 1, 1, n_{k-1}, n_k + n_{k-3} - 1, n_{k-2}, 1, \dots, 1) \\ \Leftrightarrow (n_{k-3} - 1)(n_{k-2} - 1) \geq 0. \end{aligned}$$

Enfin, si $k=4$ alors $n_1 = n_2 = 1$ car

$$Q(n_1, n_3, n_1, n_2) \leq Q(1, n_3 + n_2 - 1, n_4 + n_1 - 1, 1).$$

En conclusion, comme

$$Q(p_M, \sigma_M) = (n_k + 1)(n_{k-2} + n_{k-1}) + k - 5 \quad \forall k \geq 4$$

il est clair que nous avons obtenu la forme définitive de p_M . ■

COROLLAIRE II.1. — Pour k et n tels que $4 \leq k \leq n$

$$Q(p_M, \sigma_M) = \begin{cases} \frac{1}{4}((n-k+2)^2 + 4n-8) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont de même parité} \\ \frac{1}{4}((n-k+1)(n-k+3) + 4n-8) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. — Nous avons démontré que

$$Q(p_M, \sigma_M) = (n_k + 1)(n_{k-2} + n_{k-1}) + k - 5.$$

Si nous posons $x = n_k$ et $y = n_{k-2} + n_{k-1}$ il s'agit alors de maximiser

$$Q(p_M, \sigma_M) = xy + y + k - 5$$

sous les contraintes

$$\begin{cases} x+y+k-3=n \\ x \geq 1 \\ y \geq 2 \end{cases}$$

Donc $Q(p_M, \sigma_M) = -x^2 + x(n-k+2) + n-2$:

Le maximum étant obtenu dans \mathbb{R} pour $\frac{1}{4}(n-k+2)$

— si n et k sont de même parité, $n-k$ est pair, donc $x = \frac{1}{2}(n-k+2)$ et $y = \frac{1}{2}(n-k+4)$

— sinon $n-k$ est impair donc $x=y = \frac{1}{2}(n-k+3)$.

D'où les expressions de $Q(p_M, \sigma_M)$. ■

La proposition suivante calcule $Q(p_M, \sigma_M)$ lorsque $k=2$ ou 3 .

PROPOSITION II. 1. — Si $k=2$ ou 3

$$Q(p_M, \sigma_M) = \begin{cases} \frac{1}{4}n^2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ \frac{1}{4}(n^2-1) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. — Si $k=2$ $Q(p, \sigma) = n_1 n_2 \forall p \in \mathcal{P}(n, 2), \forall \sigma \in \Sigma_2$.

Si $k=3$ $Q(p, \sigma_M) = Q(n_1, n_2, n_3) = n_3(n_1 + n_2) \forall p \in \mathcal{P}(n, 3)$.

De sorte qu'en posant $x = n_k$ nous avons dans les deux cas

$$Q(p, \sigma_M) = x(n-x) = -x^2 + nx.$$

Le maximum est donc obtenu pour $x = \frac{1}{2}n$ si n est pair et pour $x = \frac{1}{2}(n-1)$ ou $x = \frac{1}{2}(n+1)$ sinon, d'où les résultats annoncés. ■

III. EXTENSIONS

1. A une forme quadratique voisine

Considérons, pour $4 \leq k \leq n$, la forme quadratique

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(p, \sigma) &= \tilde{Q}(n_{\sigma(1)}, n_{\sigma(2)}, \dots, n_{\sigma(k)}, n_{\sigma(1)}) \\ &= Q(p, \sigma) + n_{\sigma(k)} n_{\sigma(1)} = \tilde{Q}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_1) \end{aligned}$$

où $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ et $\sigma \in \Sigma_k$.

Les méthodes développées précédemment vont nous permettre de résoudre (PB1) et (PB2) sur \tilde{Q} .

Si nous notons respectivement $\tilde{\sigma}_m, \tilde{\sigma}_M$ et \tilde{p}_m, \tilde{p}_M les permutations et partitions extrémales nous avons en effet

THÉORÈME III.1. — *Étant donné $p \in \mathcal{P}(n, k)$, alors :*

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(p, \tilde{\sigma}_m) &= \tilde{Q}(n_k, n_1, n_{k-1}, n_3, \dots, n_4, n_{k-2}, n_2, n_k) \\ \tilde{Q}(p, \tilde{\sigma}_M) &= \tilde{Q}(n_1, n_2, n_4, \dots, n_5, n_3, n_1). \end{aligned}$$

Preuve. — Comme pour tout $i \in [1, k]$

$$\tilde{Q}(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, \dots, a_k, a_1) = \tilde{Q}(a_i, a_{i+1}, \dots, a_k, a_1, \dots, a_{i-1}, a_i)$$

nous pouvons supposer $\tilde{\sigma}_m(1) = k$ et $\tilde{\sigma}_M(1) = 1$, autrement dit :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(p, \tilde{\sigma}_m) &= \tilde{Q}(n_k, a_2, \dots, a_k, n_k) \\ \tilde{Q}(p, \tilde{\sigma}_M) &= \tilde{Q}(n_1, a_2, \dots, a_k, n_1). \end{aligned}$$

Il suffit alors de reprendre les preuves des Théorèmes II.1 et II.2 sur ces expressions. ■

THÉORÈME III.2. — *Toute partition minimale est de la forme*

$$\tilde{p}_m = \left(1, \dots, 1, n \left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil + 1, \dots, n_k \right).$$

Preuve. — Nous avons $\tilde{Q}(p, \sigma) \geq 2n - k \forall p \in \mathcal{P}(n, k), \forall \sigma \in \Sigma_k$.

$$\tilde{Q}(p, \sigma) = \tilde{Q}(a_1, a_2, \dots, a_k, a_1) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i a_{i+1} + a_k a_1$$

donc

$$\tilde{Q}(p, \sigma) \geq \sum_{i=1}^{k-1} (a_i + a_{i+1} - 1) + a_k + a_1 - 1$$

d'où

$$\tilde{Q}(p, \sigma) \geq 2 \sum_{i=1}^k a_i - k = 2n - k \quad \text{car} \quad \sum_{i=1}^k a_i = \sum_{i=1}^k n_i = n.$$

L'égalité

$$\sum_{i=1}^k a_i a_{i+1} + a_k a_1 = \sum_{i=1}^{k-1} (a_i + a_{i+1} - 1) + a_k + a_1 - 1$$

n'a lieu que si pour chaque produit $a_i a_{i+1}, a_k a_1$ l'un des facteurs au moins est unitaire. De sorte que, compte tenu de la remarque faite au début de preuve du Théorème III.1, il faut au moins nécessairement $a_1 = a_3 = \dots = a_{k-1} = 1$ si k est pair et $a_1 = a_3 = \dots = a_k = 1$ sinon.

Ainsi, toute partition minimale \tilde{p}_m a au moins $\left\lceil \frac{k}{2} \right\rceil$ éléments unitaires, autrement dit, vérifie :

$$n_1 = n_2 = \dots = n_{\lceil \frac{k}{2} \rceil} = 1$$

et dans ce cas $\tilde{Q}(\tilde{p}_m, \sigma_m) = 2n - k$. ■

THÉORÈME III.3. — *Toute partition maximale est de la forme*

$$\tilde{P}_M = (1, \dots, 1, n_{k-2}, n_{k-1}, n_k).$$

Preuve. — Il suffit de reprendre la preuve du Théorème II.4 avec

$$\tilde{Q}(p, \tilde{\sigma}_M) = \tilde{Q}(n_1, n_2, n_4, \dots, n_5, n_3, n_1)$$

pour une partition quelconque $p = (n_1, n_2, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$.

Ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}(\tilde{p}_M, \tilde{\sigma}_M) &= \tilde{Q}(1, \dots, 1, n_{k-1}, n_k, n_{k-2}, 1, \dots, 1) \\ &= (n_k + 1)(n_{k-1} + n_{k-2}) + k - 4. \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Il nous est alors facile d'obtenir les valeurs exactes des entiers n_{k-2}, n_{k-1} et n_k , d'où

COROLLAIRE III.1. — *Pour k et n tels que $4 \leq k \leq n$*

$$\tilde{Q}(\tilde{p}_M, \tilde{\sigma}_M) = \begin{cases} \frac{1}{4}((n-k+2)^2 + 4n-4) & \text{si } k \text{ et } n \text{ sont de même parité} \\ \frac{1}{4}((n-k+1)(n-k+3) + 4n-4) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il est cependant intéressant de remarquer que lorsque $k=3$, les résultats précédents ne s'appliquent plus pour les partitions maximales.

Nous avons en effet, d'une part :

$$\tilde{Q}(p, \sigma) = \tilde{Q}(p, \sigma') \quad \forall \sigma, \sigma' \in \Sigma_3, \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, 3)$$

et d'autre part :

PROPOSITION III.1. — *Les partitions maximisant $\tilde{Q}(p, \sigma)$ sur $\mathcal{P}(n, 3)$ sont :*

$$\begin{aligned} \left(\frac{n}{3}, \frac{n}{3}, \frac{n}{3} \right) & \quad \text{si } n \in 3\mathbb{N}^* \\ \left(\frac{n-1}{3}, \frac{n-1}{3}, \frac{n+2}{3} \right) & \quad \text{si } n \in 3\mathbb{N}^* + 1 \\ \left(\frac{n-2}{3}, \frac{n+1}{3}, \frac{n+1}{3} \right) & \quad \text{si } n \in 3\mathbb{N}^* + 2. \end{aligned}$$

Preuve. — Soit $(x, y, z) \in \mathcal{P}(n, 3)$ alors

$$\forall \sigma \in \Sigma_3 \quad \tilde{Q}(p, \sigma) = \tilde{Q}(x, y, z, x) = xy + yz + zx = \frac{1}{2}(n^2 - (x^2 + y^2 + z^2))$$

car $x + y + z = n$.

Ainsi, maximiser $\tilde{Q}(p, \sigma)$ revient à minimiser $x^2 + y^2 + z^2$.

En remarquant que si a, b sont deux entiers non nuls

$$a - b \geq 2 \Rightarrow a^2 + b^2 > (a - 1)^2 + (b + 1)^2$$

toute partition maximale $\tilde{P}_M = (n_1, n_2, n_3) \in \mathcal{P}(n, 3)$ doit nécessairement vérifier

$$|n_i - n_j| \leq 1 \quad \forall i, j \in [1, 3].$$

D'où les 3 formes possibles des partitions maximales. ■

2. Au calcul du nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse

Lorsque l'on veut faire l'analyse en complexité d'algorithmes sur des graphes, il est naturel de chercher à calculer la taille des données, en l'occurrence le nombre d'arêtes des graphes considérés. La littérature concernant le dénombrement d'arêtes de graphes particuliers (i. e. vérifiant certaines propriétés) est importante. Pour notre propos, il convient de citer un théorème de P. Turan [8] donnant le nombre maximal d'arêtes d'un graphe d'ordre n ne contenant pas de sous-graphe complet d'ordre C .

Dans le domaine des ordres partiels finis on connaît des encadrements des nombres maximaux d'arcs de couverture d'un treillis quelconque, B. Bollobas, I. Rival [1], et distributifs, V. Koubek, R. Rodl [5].

Les problèmes abordés précédemment permettent de répondre à une question posée par M. Chein [2], motivée par des considérations algorithmiques, concernant le nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse (i. e. graphe de couverture d'un ordre partiel) d'ordre n .

Comme le remarquent B. Bollobas et I. Rival dans [1], le théorème de P. Turan fournit la borne $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ puisqu'un tel graphe ne contient pas de triangle.

Nous calculons ici une borne dépendant de plus de la longueur, ρ , d'un plus long chemin (rang ou hauteur d'un graphe) d'où découle la majoration par $\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, et montrons que ces résultats sont les meilleurs possibles.

A tout ordre partiel fini $P = (X, \leq)$ est associé un unique graphe simple orienté, sans boucle ni circuit et sans arc de transitivité $G = (X, U)$ le graphe de Hasse (ou de couverture) de P . On peut partitionner X en $\rho + 1$ stables X_0, X_1, \dots, X_ρ , $\rho \in [0, n - 1]$, où X_0 et X_i , $i \in [1, \rho]$, contiennent respecti-

vement les éléments minimaux de P et $P - (X_0 \cup \dots \cup X_{i-1})$; ρ , le rang de G , est aussi la longueur en nombre d'arcs, d'un plus long chemin (B. Roy [7]).

Nous noterons $G_M = (X, U_M)$, $G'_M = (X', U'_M)$ des graphes simples orientés sans circuit multipartis (non nécessairement complets) tels que tout arc xy vérifie

$$\exists i \in [0, \rho - 1] / x \in X_i, \quad y \in X_{i+1}$$

dans la décomposition X_0, X_1, \dots, X_ρ associée à ces graphes. Dans ce cas, le nombre d'arcs est majoré par

$$\sum_{i=0}^{\rho-1} |X_i| |X_{i+1}|$$

Enfin, $\Delta, \Delta_M \dots$ représenterons les degrés maximaux des graphes considérés.

PROPOSITION III.2. — Avec les notations précédentes, pour tout graphe de Hasse $G = (X, U)$, il existe un multiparti $G_M = (X, U_M)$ de même rang vérifiant :

$$\begin{cases} |U_M| \geq |U| \\ \Delta_M \geq \Delta \end{cases}$$

Preuve. — Raisonnons par induction sur $n = |X|$, ρ étant fixé. Le résultat est immédiat si $n = \rho + 1$. Supposons $n \geq \rho + 2$ et la proposition vraie pour $\rho + 1, \dots, n - 1$. Notons C les éléments x_0, x_1, \dots, x_ρ d'un plus long chemin de G .

S'il existe dans $X - C$ un élément x tel que $G' = (X - \{x\}, U')$, obtenu par suppression de x dans G , vérifie $\Delta' = \Delta$, alors l'hypothèse d'induction montre l'existence de $G'_M = (X - \{x\}, U'_M)$ de rang ρ tel que :

$$|U'_M| \geq |U'| = |U| - d(x), \quad \Delta'_M \geq \Delta' = \Delta$$

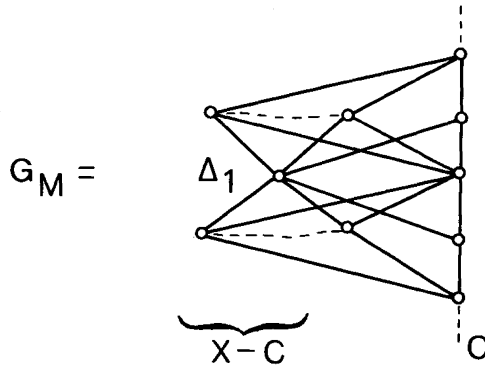
Alors $G_M = (X, U_M)$ est construit à partir de G'_M en considérant un sommet y de degré maximal Δ'_M et en ajoutant x à X'_i (où $y \in X'_i$) ainsi que tous les arcs joignant x à X'_{i-1} et X'_{i+1} . Il est clair que G_M est de rang ρ et $\Delta_M \geq \Delta$, de plus :

$$|U_M| = |U'_M| + |X'_{i-1}| + |X'_{i+1}| \geq |U| - d(x) + \Delta \geq |U|$$

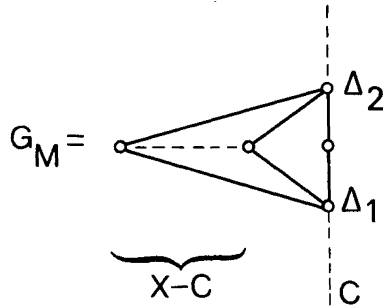
Supposons maintenant que pour tout $x \in X - C$, $\Delta' = \Delta - 1$, autrement dit tout sommet de $X - C$ est adjacent à tout sommet de degré maximal dans G .

Alors $X - C$ a au plus un sommet de degré maximal, Δ_1 . En effet, s'il y en a au moins trois ils doivent former une clique et s'il y en a deux alors $|X - C| = 2$ et $2 \leq \Delta \leq 3$, il est alors facile d'exhiber une contradiction.

Donc $X - C$ est une étoile de centre Δ_1 et en utilisant le fait que tout élément de $X - C$ est relié au plus deux fois à C nous obtenons directement :



Si $X - C$ n'a pas de sommet de degré maximal c'est un stable et C en possède au plus 2, Δ_1 et Δ_2 . Alors :



Cette proposition montre qu'il existe $p = (n_0, n_1, \dots, n_p) \in \mathcal{P}(n, \rho + 1)$ et $\sigma \in \Sigma_k$ tels que :

$$|U| \leq \sum_{i=0}^p x_i x_{i+1} = Q(p, \sigma)$$

L'application du corollaire II.1 avec $k = \rho + 1$ quand $\rho \geq 3$ donne la majoration annoncée de $|U|$ en fonction de n et ρ .

THÉORÈME III.4. — *Le nombre maximal d'arcs d'un graphe de Hasse d'ordre n et de rang ρ tels que $3 \leq \rho \leq n$ est égal à*

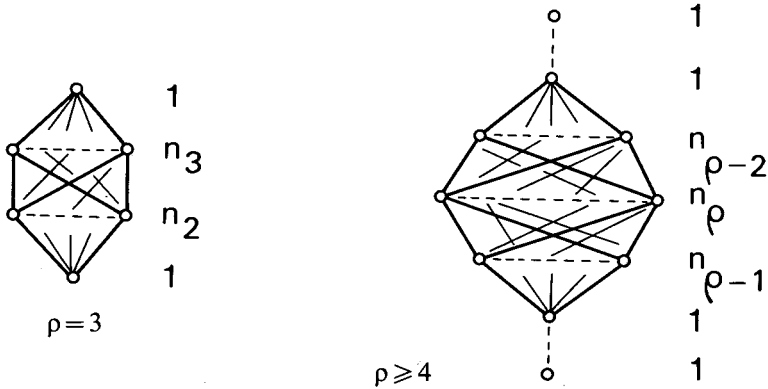
$$\frac{1}{4}((n - \rho + 1)^2 + 4n - 8) \quad \text{si } n \text{ et } \rho \text{ sont de parité distincte}$$

$$\frac{1}{4}((n - \rho + 2)(n - \rho) + 4n - 8) \quad \text{sinon.}$$

Ces bornes sont les meilleures en fonction de n et ρ . En effet, d'une part, nous connaissons les valeurs exactes des permutations et partitions maximales, σ_M et p_M , et d'autre part, à $p \in \mathcal{P}(n, \rho+1)$ et $\sigma \in \Sigma_k$ nous pouvons associer $G_M(p, \sigma) = (X, U_M(p, \sigma))$ où X est partitionné en X_0, X_1, \dots, X_ρ tel que $|X_i| = n_{\sigma(i)} \forall i \in [0, \rho]$ et :

$$U_M(p, \sigma) = \bigcup_{i=0}^{\rho-1} X_i \times X_{i+1}$$

D'où la forme des graphes de Hasse optimaux.



(les n_i correspondant aux éléments de p_M , donnent les nombres de sommets pour chaque niveau).

THÉORÈME III.5. — *Tout graphe de Hasse $G=(X, U)$ tel que $|X|=n$ vérifie*

$$|U| \leq \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

Preuve. — La proposition II.1 nous donne la majoration dans les cas $\rho = 1, 2$. Il est alors facile de vérifier que si $\rho \geq 3$, les bornes données dans le Théorème III.4 pour n fixé, sont toujours strictement inférieures à $\frac{1}{4}(n^2 - 1)$.

Nous retrouvons ainsi la borne résultant du Théorème de P. Turan [8]. Signalons d'autre part qu'elle peut être obtenue à partir de $|U| \leq Q(p, \sigma)$ car, d'après [6], toute suite de nombres réels positifs x_1, \dots, x_k tels que

$$\sum_{i=1}^k x_i = s \text{ vérifie :}$$

$$\sum_{i=1}^{k-1} x_i x_{i+1} \leq \frac{1}{4} s^2$$

Remarquons pour terminer que ces majorations sont les meilleures possibles en fonction de n uniquement et qu'elles sont atteintes par les graphes bipartis et tripartis complets suivants :

$$K\frac{n}{2}, \frac{n}{2} \text{ et } Kx_0, \frac{n}{2}, x_2 \text{ où } x_0 + x_2 = \frac{n}{2} \text{ si } n \text{ est pair}$$

$$K\frac{n-1}{2}, \frac{n+1}{2} \text{ et } Kx_0, \frac{n-1}{2}, x_2 \text{ où } x_0 + x_2 = \frac{n+1}{2}$$

$$\text{ou bien } Kx_0, \frac{n+1}{2}, x_2 \text{ où } x_0 + x_2 = \frac{n-1}{2} \text{ si } n \text{ est impair.}$$

3. Au calcul des nombres extrêmes d'arêtes d'un joint de k stables suivant un graphe donné et à la substitution des sommets d'un hypergraphe par k stables

Les résultats précédents s'inscrivent dans un cadre beaucoup plus général car ils permettent les calculs des nombres extrêmes d'arcs, pour une partition donnée de n en k sommants puis sur l'ensemble $\mathcal{P}(n, k)$ de ces partitions, du joint de k stables, dont la somme des ordres est n , suivant un cycle ou une chaîne élémentaire d'ordre k .

En effet, G et G' étant deux graphes simples quelconques, le joint de G' par rapport à x suivant G , notée $G_x^{G'}$ consiste à remplacer le sommet x de G par G' et à relier tout sommet de G' à tout voisin de x dans G .

Ainsi, étant donnés k, n deux entiers tels que $1 \leq k \leq n$, à toute partition $p=(n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$ nous pouvons associer une partition (S_1, \dots, S_k) de $[1, n]$ où $|S_i|=n_i \forall i \in [1, k]$.

De sorte que pour $\sigma \in \Sigma_k$

$$\sum_{i=1}^{k-1} n_{\sigma(i)} n_{\sigma(i+1)} \text{ et } \sum_{i=1}^{k-1} n_{\sigma(i)} n_{\sigma(i+1)} + n_{\sigma(k)} n_{\sigma(1)},$$

représentent respectivement les nombres d'arêtes du joint des k stables $G_i=(S_i, \emptyset), i \in [1, k]$, suivant une chaîne et un cycle élémentaire d'ordre k par rapport à σ .

Cette définition peut alors se généraliser à un graphe simple $G=([1, k], E)$ en considérant le graphe :

$$G(p, \sigma) = G_1^{G_{\sigma(1)}} G_2^{G_{\sigma(2)}} \dots G_k^{G_{\sigma(k)}} \quad \forall p \in \mathcal{P}(n, k), \quad \forall \sigma \in \Sigma_k$$

de sommets $[1, n]$ où, pour tout $i \in [1, k]$, on fait le joint du graphe $G_{\sigma(i)}$ d'ordre $n_{\sigma(i)}$ par rapport au sommet i .

Le nombre d'arêtes du graphe simple ainsi obtenu est

$$m_G(p, \sigma) = \sum_{\substack{(i,j) \in E \\ i < j}} n_{\sigma(i)} n_{\sigma(j)} \quad (I)$$

L'extension aux hypergraphes est basée sur l'opération classique de substitution.

Pour deux hypergraphes $H=(X, \mathcal{E})$ et $K=(Y, \mathcal{F})$ finis, ne possédant pas d'arête vide et tels que tout sommet est contenu dans au moins une arête et $X \cap Y = \emptyset$, la substitution dans H de $x \in X$ par K donne l'hypergraphe

$$H_x^K = ((X - \{x\}) \cup Y, \mathcal{E}')$$

où $\mathcal{E}' = \{ (E - \{x\}) \cup F \mid x \in E \in \mathcal{E}, F \in \mathcal{F} \} \cup \{ E \mid x \notin E \in \mathcal{E} \}$.

Notons H_1, \dots, H_k les k hypergraphes stables $H_i = (S_i, \mathcal{E}_i)$ où

$$\mathcal{E}_i = \{ \{x\} \mid x \in S_i \}, \quad |\mathcal{E}_i| = |S_i| = n_i \quad \forall i \in [1, k]$$

définis à partir de $p = (n_1, \dots, n_k) \in \mathcal{P}(n, k)$.

Si $H = ([1, k], \mathcal{E})$ est un hypergraphe quelconque où

$$\mathcal{E} = \{ (E_1, \dots, E_m) \mid |E_j| \geq 1 \quad \forall j \in [1, m] \}$$

pour $\sigma \in \Sigma_k$ considérons l'hypergraphe

$$H(p, \sigma) = H_1^{H_{\sigma(1)}} \dots H_k^{H_{\sigma(k)}}$$

obtenu par substitution des sommets $1, \dots, k$ par $H_{\sigma(1)}, \dots, H_{\sigma(k)}$ respectivement.

Nous avons donc $H(p, \sigma) = ([1, n], \mathcal{E}(p, \sigma))$ où

$$\mathcal{E}(p, \sigma) = \{ (E_j - \{i\}) \cup \{x\} \mid x \in S_{\sigma(i)}, i \in E_j, j \in [1, m] \}$$

de sorte que chaque arête $E \in H$ donne $\prod_{i \in E} n_{\sigma(i)}$ arêtes distinctes dans $H(p, \sigma)$.

Si bien qu'en notant $m_H(p, \sigma)$ le nombre d'arêtes de $H(p, \sigma)$

$$m_H(p, \sigma) = \sum_{E \in \mathcal{E}} \prod_{i \in E} n_{\sigma(i)} \quad (II)$$

Les problèmes (PB1) et (PB2) se généralisent naturellement aux expressions (I) et (II). Dans cette optique nous avons obtenu quelques résultats que nous développons dans [4].

REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Michel Habib dont les suggestions quant au fond et à la forme de ce travail ont été des plus enrichissantes, ainsi que le rapporteur pour ses judicieuses remarques.

Je tiens aussi à remercier Monsieur le Professeur Ivan Rival et Najib Zaguia, pour leur intérêt à ces résultats et l'aide apportée à la mise au point d'une preuve.

REFERENCES

1. B. BOLLOBAS, I. RIVAL, The maximal size of the covering graph of a lattice, *Algebra Universalis*, vol. 9, 1979, p. 371-373.
2. M. CHEIN, Communication personnelle.
3. L. COMTET, *Analyse combinatoire*, T.1., PUF, Paris, 1970.
4. R. JEGOU, *Quelques propriétés algorithmiques des ensembles ordonnés*, Thèse 3^e cycle, U.S.T.L., Montpellier, octobre 1984.
5. V. KOUBEK, V. RODL, On the number of covering arcs in ordering, *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, vol. 22, n^o 4, 1981, p. 721-733.
6. J. E. MACDONALD Jr., Problem E 1643, *Amer. Math. Monthly*, 70 (1963), p. 1099. *Solutions in Amer. Math. Monthly*, vol. 71, 1964, p. 914-915.
7. B. ROY, *Algèbre moderne et Théorie des graphes*, T.1, Dunod, Paris, 1969.
8. P. TURAN, On the theory of graphs, *Colloq. Math.*, vol. 3, 1954, p. 19-30.