

M. LESK

Diamètre de graphes et qualité de service d'un réseau de données

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 18, n° 3 (1984),
p. 247-261

http://www.numdam.org/item?id=RO_1984__18_3_247_0

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DIAMÈTRE DE GRAPHS ET QUALITÉ DE SERVICE D'UN RÉSEAU DE DONNÉES (*)

par M. LESK ⁽¹⁾

Résumé. — *La notion de diamètre de graphes permet de modéliser certaines contraintes de qualité de service des réseaux de données. On met ainsi en évidence les propriétés de la théorie des graphes utiles à la configuration de ces réseaux, et l'on propose des algorithmes efficaces pour le calcul du diamètre d'un graphe.*

Mots clés : Graphes; diamètre de graphes; réseau de données.

Abstract. — *The notion of diameter of graphs can be used to model certain quality of service constraints in data networks. The useful graph theoretical properties for the design of these networks are pointed out, and efficient algorithms for calculating the diameter of a graph are proposed.*

Keywords: Graphs; diameter of graphs; data network.

INTRODUCTION

Un programme informatique baptisé CREDO a été développé au C.N.E.T. (Division « Architecture et Trafic dans les Réseaux »), dans le but, primitivement, d'aider la société TRANSPAC à configurer son réseau. On en trouvera une brève description au paragraphe 1, et une description détaillée dans [1]. Dans cet article, nous nous concentrons sur l'aspect « qualité de service » d'un réseau de données, telle qu'elle est prise en compte par CREDO, et sa modélisation en termes d'un problème de graphes.

On met ainsi en évidence les propriétés du diamètre d'un graphe utiles à la résolution du problème de la configuration optimale d'un réseau de données et l'on propose des algorithmes efficaces pour le calcul du diamètre d'un graphe.

(*) Reçu décembre 1982.

(1) Centre National d'Études des Télécommunications, 38/40, rue du Général-Leclerc, 92131 Issy-les-Moulineaux.

1. BRÈVE DESCRIPTION DE CREDO

CREDO (Configurateur de REseau de DONnées) est une chaîne de programmes informatiques dont la tâche peut être résumée comme suit :

A partir :

- d'un ensemble de nœuds de commutation localisés géographiquement, sources et destinations de trafics ;
- d'une matrice de trafic internœuds ;
- d'un ensemble de liaisons possibles ;
- de fonctions de coût associées aux liaisons et aux nœuds.

Définir la topologie du réseau et le dimensionner (ce qui implique le calcul des routages en régime normal et en cas de panne de liaison ou de nœud) ;

- de la façon la plus économique possible ;
- *en respectant les contraintes de qualité de service* (qui seront explicitées au paragraphe 2).

La méthode mise en œuvre est inspirée d'un algorithme de multiflots de coût minimal avec fonctions de coûts concaves, dont on trouvera une description détaillée dans [2]. En simplifiant, il s'agit d'un algorithme glouton qui, à partir d'un réseau maximal de départ, élimine à chaque itération la liaison dont la suppression apporte le plus grand gain. Pour être sûr que le réseau final satisfera bien les contraintes de qualité de service, la démarche suivante a été adoptée : à chaque itération de l'algorithme, il est effectué un test autorisant ou interdisant la suppression de la liaison examinée, selon que le réseau restant satisfait ou non ces contraintes.

Ce test, effectué de nombreuses fois, entre ainsi pour une part importante dans le temps d'exécution du programme. On a donc cherché à le rendre le plus performant possible. A cet effet, la modélisation du problème en termes de diamètre de graphe a été déterminante.

2. POSITION DU PROBLÈME

Les contraintes de qualité de service prises en compte par CREDO peuvent s'exprimer comme suit (dans le langage des Télécommunications) :

- *en régime normal*, entre tout couple de nœuds du réseau, il doit exister un chemin comportant au plus n_0 transits ;
- *en cas de panne* (d'un nœud ou d'une liaison) entre tout couple de nœuds du réseau (à l'exception du nœud en panne le cas échéant), il doit exister un chemin comportant au plus n_1 transits.

Dans un réseau de données à commutation par paquets, le nombre de transits entre deux nœuds est en effet un facteur important du délai de transmission entre ceux-ci. Avec la limitation de la charge du réseau, la limitation du nombre de transits permet ainsi de garantir un délai moyen maximal à tous les utilisateurs.

La notion théorique sous-jacente à ce problème est celle de *diamètre* d'un graphe simple non orienté. En terme de graphes, le problème s'énonce alors ainsi :

Problème 1 :

Étant donné un graphe simple $G=(X, E)$ et deux entiers d_0 et d_1 , vérifier que :

$$\text{diamètre}(G) \leq d_0;$$

$$\forall x \in X, \text{diamètre}(G-x) \leq d_1;$$

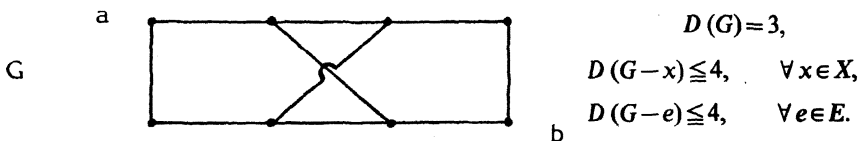
$$\forall e \in E, \text{diamètre}(G-e) \leq d_1;$$

(le diamètre d'un graphe est défini au paragraphe 3.)

REMARQUES. — Les notations non explicitées sont celles de [3]. En particulier, n est le nombre de sommets, m le nombre d'arêtes du graphe G .

— Par abus d'écriture, nous notons $G-x$ le sous-graphe $G[X - \{x\}]$, $G-xy$ le graphe partiel $G(X, E - \{xy\})$.

— Comme le montre l'exemple suivant, le problème posé ne se réduit pas à l'existence de deux chaînes disjointes de longueurs inférieures ou égales à d_0 et d_1 respectivement entre tout couple de points :



Entre a et b , il n'existe pas deux chaînes disjointes de longueurs respectivement égales ou inférieures à 3 et 4.

— Les conditions précédentes impliquent que G est nécessairement 2-connexe.

— Le diamètre des graphes fait l'objet de très nombreuses études depuis une vingtaine d'années.

On trouvera dans [4] l'essentiel des résultats connus sur le sujet, et une bibliographie exhaustive.

3. QUELQUES PROPRIÉTÉS DU DIAMÈTRE D'UN GRAPHE

Rappelons que la distance entre deux points d'un graphe est la longueur (i. e. le nombre d'arêtes) d'une plus courte chaîne entre ceux-ci. Nous noterons $d_G(x, y)$ la distance entre les sommets x et y du graphe G ; le diamètre de G est alors la valeur maximale sur tous les couples de sommets d'une telle distance. Nous le noterons $D(G)$ ou D s'il n'y a pas d'ambiguïté :

$$D(G) = \max_{x, y \in X} (d_G(x, y)) = \max_{x \in X} (\max_{y \in X} d_G(x, y)),$$

En particulier, si G n'est pas connexe, nous poserons $D(G) = +\infty$.

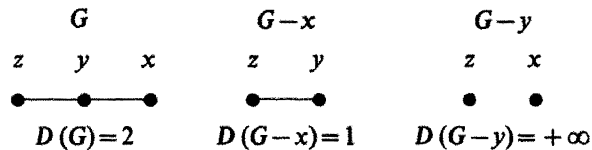
Nous étudierons d'abord le comportement du diamètre lorsque l'on retire des sommets ou des arêtes du graphe.

PROPOSITION 1 : *Le diamètre est fonction décroissante de l'ensemble des arêtes (ordonné par l'inclusion).*

Autrement dit, $\forall e \in E, D(G - e) \geq D(G)$.

En effet, la distance entre deux points ne peut qu'augmenter si l'on retire une arête du graphe. Il en est de même du diamètre. \square

Par contre, il n'existe pas de propriété analogue pour l'ensemble des sommets. Ainsi :



L'argument précédent ne peut plus s'appliquer au sommet retiré.

Si le graphe G est 2-connexe, on peut cependant établir les propositions suivantes :

PROPOSITION 2 : *Soit G un graphe 2-connexe.*

Pour tous sommets adjacents x et y , on a :

$$D(G - xy) \leq D(G - x) + 1.$$

Démonstration :

• pour tous sommets z et t distincts de x , on a :

$$d_{G-xy}(z, t) \leq d_{G-x}(z, t) \leq D(G - x),$$

- puisque G est 2-connexe, x admet un voisin $y' \neq y$, et :

$$d_{G-xy}(y, y') \leq D(G-x),$$

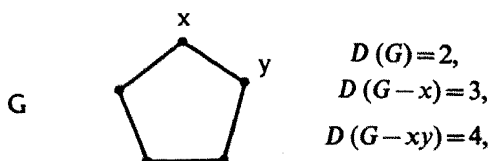
ce qui entraîne : $d_{G-xy}(x, y) \leq 1 + D(G-x).$

On a donc bien :

$$D(G-xy) = \max_{z, t \in X} d_{G-xy}(z, t) \leq 1 + D(G-x).$$

De plus, il n'y a égalité possible que si z ou t est égal à x . □

REMARQUE : Cette borne peut être effectivement atteinte comme on peut le voir sur l'exemple :



Cette proposition permet de simplifier considérablement notre problème. Elle nous indique en effet qu'il est inutile d'étudier les pannes d'arêtes, sauf si la valeur maximale d_1 est atteinte lors des pannes des deux extrémités.

Si tel est le cas, la seule distance critique (qui peut être égale à $d_1 + 1$) est alors la distance entre les extrémités de l'arête en panne.

La proposition suivante, due à Plesnik [5], donne une autre majoration du diamètre pour les pannes d'arête.

Nous en donnons une démonstration simple.

PROPOSITION 3 (Plesnik) : Pour toute arête d'un graphe $G=(X, E)$ 2-connexe, on a :

$$D(G-e) \leq 2D(G).$$

Démonstration : Soit C un cycle de longueur minimale contenant $e=xy$ (G est 2-connexe), et z le sommet du cycle défini comme suit :

- si le cycle est pair, z est l'unique sommet opposé à x sur C ;
- si le cycle est impair, z est l'unique sommet équidistant de x et y sur C .

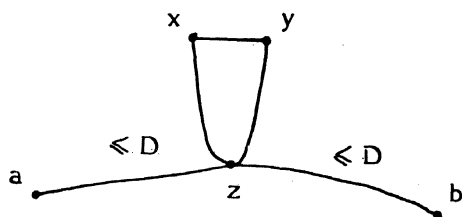
La chaîne $[x, z]$ (resp. $[y, z]$) contenue dans C et ne passant pas par y (resp. x) est de longueur minimale.



Pour tout a , il existe donc une chaîne $[a, z]$ de longueur minimale $[a, z] \leq D$, ne passant pas par l'arête xy (si elle passe par x , elle ne passe pas par y et inversement).

Pour tous points a et b , il existe donc une chaîne, concaténation des chaînes $[a, z]$ et $[b, z]$, ne passant pas par l'arête xy , et de longueur $\leq 2D$.

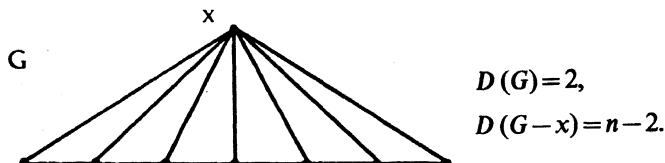
Le résultat s'ensuit directement.



□

REMARQUES : 1. La borne précédente est atteinte, si G est un cycle impair, pour toute arête e .

2. Il n'existe pas en revanche d'aussi sympathique majoration en cas de panne de nœud. L'exemple suivant montre que le diamètre peut augmenter jusqu'à $n-2$:



4. RÉOLUTION DU PROBLÈME

Le test de qualité de service, permettant de vérifier que le réseau satisfait bien les contraintes voulues, est réalisé comme suit :

1. Vérifier que $D(G) \leq d_0$;
2. Pour tout sommet x , vérifier que $D(G-x) \leq d_1$; préciser les sommets pour lesquels cette borne est atteinte;
3. Si $d_1 \geq 2d_0$, il est inutile de prendre en considération les pannes d'arête (proposition 3); sinon : pour toute arête xy telle que $D(G-x) = D(G-y) = d_1$, vérifier que :

$$d_{G-xy}(x, y) \leq d_1.$$

Une dernière remarque permet de simplifier encore ce dernier point : la recherche d'une chaîne de longueur inférieure ou égale à d_1 entre les sommets adjacents x et y permet de trouver un cycle de longueur au plus $d_1 + 1$.

Il est clair alors que pour tout couple de sommets adjacents z et t de ce cycle, il existe un chemin de secours de longueur au plus d_1 , et donc que :

$$d_{G-zt}(z, t) \leq d_1.$$

Cette approche suppose que l'on sache calculer rapidement le diamètre d'un graphe.

5. CALCUL DU DIAMÈTRE D'UN GRAPHE

Il n'est pas nécessaire de calculer toutes les distances entre tous les couples de sommets d'un graphe pour en déterminer le diamètre.

Dans ce paragraphe, nous proposons deux algorithmes de calcul du diamètre d'un graphe, qui donnent dans la pratique de bien meilleurs résultats que l'algorithme trivial, lequel consiste simplement à appliquer la définition du diamètre, c'est-à-dire à calculer toutes les distances entre nœuds et à prendre la valeur maximale (*algorithme 0*).

Nous rappelons d'abord quelques résultats classiques permettant de borner le diamètre d'un graphe.

5. 1. Rappel de quelques résultats classiques

- Si le degré maximal d'un sommet du graphe est égal à d ($d \geq 3$), on a :

$$D(G) \geq \log_{d-1} \left(1 + \frac{(d-2)(n-1)}{d} \right)$$

(cf. [4]).

- Si le degré minimal d'un sommet du graphe est supérieur ou égal à :

$$1 + \frac{n-1}{2}, \text{ alors } D(G) \leq 2$$

(deux sommets non adjacents ont alors toujours un voisin commun).

- Si le complémentaire (au sens des arêtes) de G est noté \bar{G} , alors :

$$D(\bar{G}) > 3 \Rightarrow D(G) < 3$$

(cf. [6], page 29).

Les seuls couples de valeurs pour les diamètres d'un graphe et de son complémentaire sont ainsi :

1; $+\infty$,

2; ≥ 2 ,

3; 3.

- Si le graphe est k -connexe, alors :

$$D(G) \leq 1 + \frac{n-2}{k}$$

(cf. [4], page 6).

Ces résultats permettent de connaître des bornes du diamètre, ce qui est parfois suffisant.

Le résultat suivant, fondamental, est à la base des algorithmes que nous proposons :

Pour tout sommet x , nous poserons :

$$D(x) = \max_{y \in X} (d(x, y)) \quad (D(x) \text{ est l'excentricité de } x).$$

On a alors : $D = \max_{x \in X} (D(x)).$

PROPOSITION 4 : Pour tout sommet x , on a :

$$D(x) \leq D \leq 2D(x)$$

(1) (2)

Démonstration : L'inégalité (1) est triviale.

L'inégalité (2) ne l'est guère moins : si G n'est pas connexe, toutes ces valeurs sont infinies; si G est connexe, entre deux sommets quelconques a et b , il existe en effet une chaîne, passant par x , de longueur $d(a, x) + d(x, b) \leq 2D(x)$. \square

A partir d'un sommet de base x_0 , on disposera donc d'un encadrement de D en calculant les distances de x_0 à tous les sommets du graphe.

On pourra alors resserrer cet encadrement en calculant les valeurs $D(y)$, en commençant par les sommets y les plus éloignés de x_0 .

C'est le principe de l'algorithme explicité ci-dessous :

5.2. Procédure de calcul du diamètre (algorithme 1)

- (1) Choisir un sommet de base x_0 , par exemple de degré maximal.
- (2) Calculer les distances de x_0 à tous les sommets du graphe.
 $k \leftarrow D(x_0)$.
- (3) $\inf \leftarrow k$;
 $\sup \leftarrow 2k$.
- (4) Pour tout sommet y tel que $d(x_0, y) = k$:
 - calculer $D(y)$;
 - si $D(y) > \inf$, alors : $\inf \leftarrow D(y)$,
si $\inf = \sup$ alors $D \leftarrow \inf$ et STOP.
- (5) Si $\inf \geq \sup - 2$, alors : $D \leftarrow \inf$ et STOP;
sinon : $\sup \leftarrow \sup - 2$,
 $k \leftarrow k - 1$,
aller en (4).

Démonstration : \inf et \sup sont respectivement les bornes inférieure et supérieure de D , et valent initialement $D(x_0)$ et $2D(x_0)$.

A l'étape (4), on calcule $D(y)$ pour les sommets y les plus éloignés de x_0 , ce qui permet le cas échéant d'augmenter \inf et de conclure si $\inf = \sup$.

Lorsque l'étape (4) est terminée, il reste à calculer les distances entre sommets à distance inférieure ou égale à $k - 1$ de x_0 ; elles sont toutes inférieures ou égales à $2(k - 1)$; donc, si la borne inférieure est supérieure ou

égale à $2k-2$, on ne pourra plus l'augmenter; on a donc bien : $D = \inf$ (étape 5). Si tel n'est pas le cas, la borne supérieure peut diminuer de deux unités car toutes les distances calculées ou restant à calculer sont inférieures ou égales à $2k-2$; on passe aux sommets distants de $k-1$ de x_0 . \square

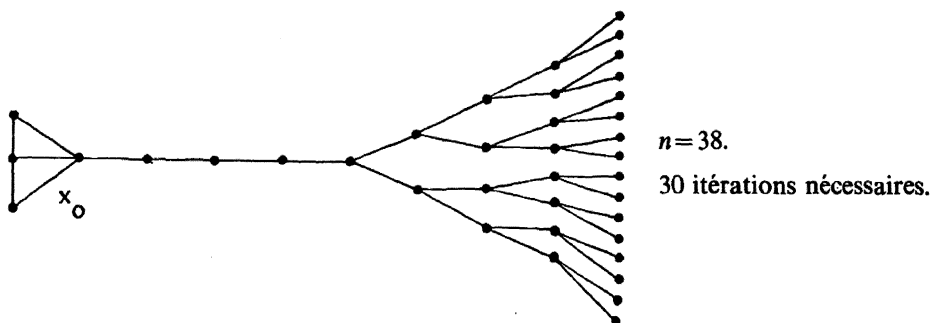
5.3. Complexité de l'algorithme 1

L'intérêt de l'algorithme 1 est double. Tout d'abord, son approche du résultat par encadrements successifs permet de conclure dès que la majoration ou minoration obtenue est satisfaisante. D'autre part, il évite le calcul des distances entre sommets « proches » du sommet de départ x_0 , plus précisément tels que :

$$d(x_0, x) \leq D(x_0)/2.$$

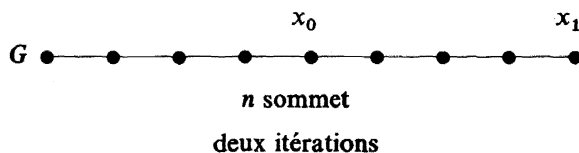
En pratique, il est ainsi beaucoup plus rapide que l'algorithme 0 décrit précédemment (cf. résultats expérimentaux ci-dessous). Cependant, il est clair que dans le plus mauvais cas près de $n = |X|$ itérations seront effectuées. Le calcul des $D(y)$ étant en $O(m)$, la complexité de l'algorithme 1 est donc $O(mn)$.

L'exemple suivant illustre cette situation :



En revanche, deux itérations peuvent suffire dans le meilleur cas : il suffit de trouver d'emblée un sommet x_1 , tel que : $D(x_1) = 2D(x_0)$.

Exemple :



A cet effet, on tiendra à jour un tableau MAJ des majorants des distances entre sommets; la borne supérieure du diamètre pourra ainsi décroître plus rapidement.

● inf désignant comme précédemment la borne inférieure du diamètre, en cours d'algorithme on aura :

$$\inf = \max_{x \in C} D(x),$$

où C est l'ensemble des sommets dont on a calculé l'excentricité.

● sup désignant la borne supérieure du diamètre, en cours d'algorithme, on aura :

$$\sup = \max_{x, y \in X} (\text{MAJ}(x, y)).$$

● L'algorithme consistera donc à répéter le calcul des distances d'un sommet à tous les autres, tant que les deux bornes ne seront pas égales. Cet algorithme s'applique également aux graphes valués.

Calcul du diamètre; algorithme 2

1. Initialisation :

- $\inf \leftarrow 0$;
- pour tous sommets x, y : $\text{MAJ}(x, y) \leftarrow +\infty$;
- $\sup \leftarrow +\infty$.

2. Tant que $\inf \neq \sup$:

- choisir le sommet s pour lequel la valeur \sup est atteinte le plus souvent dans MAJ;
- calculer les distances de s à tous les autres sommets;
- $\inf \leftarrow \max(\inf, D(s))$;
- mettre à jour MAJ :
pour tous x, y :
si $\text{MAJ}(x, y) > \inf$ alors :

$$\text{MAJ}(x, y) \leftarrow \min(\text{MAJ}(x, y), d(x, s) + d(s, y)),$$

- $\sup \leftarrow \max_{x, y \in X} \text{MAJ}(x, y)$.

3. $D \leftarrow \inf$; STOP.

Complexité de l'algorithme 2

Chaque itération de l'algorithme 2 nécessite :

- $O(m)$ opérations élémentaires pour le calcul des distances;
- $O(n^2)$ opérations pour la mise à jour de MAJ.

Comparaison des algorithmes 0, 1 et 2

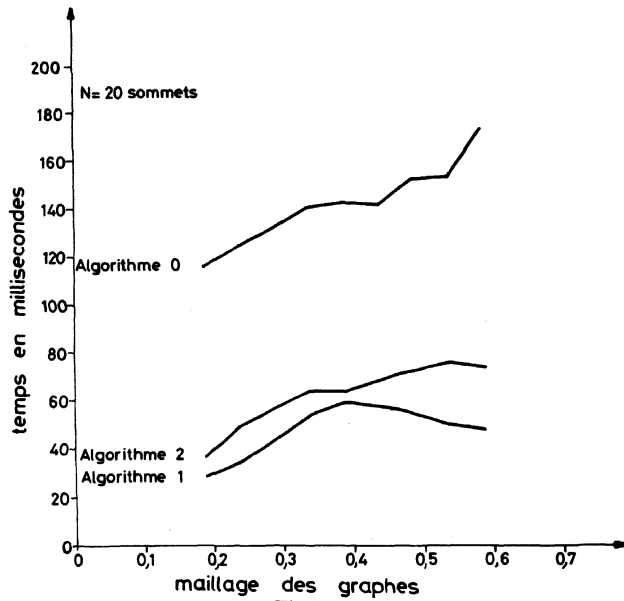


Fig. 1

Comparaison des algorithmes 1 et 2

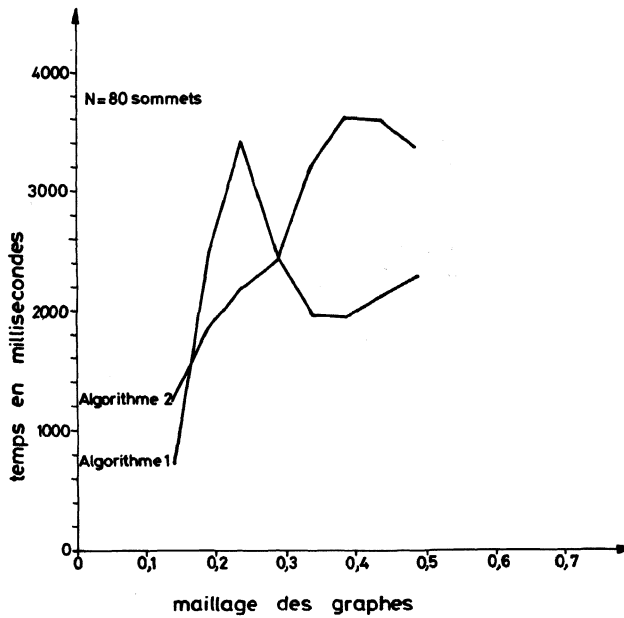


Fig. 2

Comme il peut y avoir jusqu'à $n-1$ itérations, l'algorithme 2 est en $O(n^3)$ dans le plus mauvais cas.

En fait, l'intérêt de l'algorithme 2 réside en ce qu'il peut permettre de réduire notablement le nombre d'itérations.

Ainsi, si G est un cycle, deux itérations de l'algorithme 2 seront suffisantes pour calculer sur diamètre, au lieu de $n/2$ avec l'algorithme 1 et n avec l'algorithme 0.

Comparaison des algorithmes proposés

Une étude théorique reste à faire portant sur la complexité moyenne des algorithmes 1 et 2. Quel est d'ailleurs le nombre maximal d'itérations de l'algorithme 2?

Une étude expérimentale, dont nous présentons maintenant les résultats, a été réalisée, au moyen d'un programme informatique DIAMETRES, qui permet de comparer les performances des algorithmes 0, 1 et 2.

On a considéré des graphes générés pseudo-aléatoirement (chaque arête ayant une même probabilité p d'exister) de quelques dizaines de sommets. Écrit en PASCAL, DIAMETRES a été exécuté sur l'IRIS 80 de l'E.N.S.T., et a permis de comparer les temps d'exécution des algorithmes 0, 1 et 2 pour des centaines de graphes.

Les résultats sont représentés sur les figures 1 et 2, qui correspondent respectivement à des graphes de 20 et 80 sommets.

On a fait varier le maillage p (probabilité d'existence de chaque arête) de 0,15 (resp. 0,10) à 0,6 (resp. 0,5); les temps d'exécution représentés sont les moyennes obtenues pour 100 essais (resp. 30) de graphes pseudo-aléatoires, parmi lesquels on a éliminé les graphes non connexes.

Ces résultats donnent un avantage très net à l'algorithme 1, dont les temps d'exécution sont couramment trois à quatre fois inférieurs à ceux de l'algorithme 0. L'algorithme 2 est en général un peu plus lent que l'algorithme 1. avec une exception, dès que le nombre de sommets est suffisant ($n > 40$) pour les graphes de maillage « moyen » (compris entre 0,20 et 0,30 pour $n = 80$ sommets par exemple, cf. fig. 2).

6. CONCLUSION

L'utilisation de la notion de diamètre de graphe et les résultats présentés ci-dessus ont permis d'améliorer très nettement les performances du programme CREDO.

Par ailleurs, l'évolution des réseaux de données, la prise en considération en particulier de classes de clients ayant des contraintes de qualité de service différentes, pose un problème nouveau : la modélisation en termes de diamètre devient insuffisante ; l'algorithme 2 peut néanmoins facilement s'adapter à ce nouveau problème.

REMERCIEMENTS

Je remercie Michel Habib, conseiller scientifique au C.N.E.T., et Jean-Michel Mepuis, pour les fructueuses discussions que nous avons eues tout au long de cette étude.

Je remercie également les élèves de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications, particulièrement Daniel Namias, pour leur participation à la réalisation du programme DIAMÈTRES.

Je remercie enfin le referee pour ses nombreuses remarques.

BIBLIOGRAPHIE

1. J. M. MEPUIS, *CREDO*, Configurateur de réseaux de données, L'Echo des Recherches, octobre 1982, p. 53-62.
2. M. MINOUX, *Multiflots de coût minimal avec fonctions de coûts concaves*, Annales des Télécommunications, n° 3-4, 1976, p. 77-92.
3. C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1973.
4. J. C. BERMOND et B. BOLLOBAS, *The Diameter of Graphs: a Survey*, Congressus Numerantium, vol. 32, 1981, p. 3-27.
5. J. PLESNIK, *Note on Diametrically Critical Graphs*, Recent Advances in Graph Theory, Proc. 2nd Czechoslovak Sympos., Prague, 1974, Academia Prague, p. 455-465.
6. M. N. S. SWAMY et K. THULASIMARAN, *Graphs, Networks, and Algorithms*, Wiley, 1981.