

PATRICE MARCOTTE

Quelques notes et résultats nouveaux sur le problème d'équilibre d'un oligopole

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 18, n° 2 (1984), p. 147-171

http://www.numdam.org/item?id=RO_1984__18_2_147_0

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

QUELQUES NOTES ET RÉSULTATS NOUVEAUX SUR LE PROBLÈME D'ÉQUILIBRE D'UN OLIGOPOLE (*)

par Patrice MARCOTTE (¹)

Résumé. — La caractérisation de l'état d'équilibre d'un nombre restreint de firmes en concurrence sur un même marché est un problème classique de la théorie économique posé initialement par Cournot. La recherche de la solution numérique des problèmes d'équilibre pose cependant de considérables défis. Récemment Murphy, Sherali et Soyster ont développé un algorithme convergent de résolution. Dans cet article, nous proposons une nouvelle formulation du problème ainsi que plusieurs algorithmes de résolution efficaces adaptés à des cas particuliers.

Mots clés : Oligopole; Équilibre; Inégalités Variationnelles; P.ogrammmation Mathématique.

Abstract. — The problem of the equilibrium of a small number of noncooperative firms selling a good on the same market was first formulated by Cournot. Until recently, no satisfactory mathematical programming methods for finding the equilibrium solution had been proposed. In this paper we give a new formulation of the problem, as well as efficient algorithms adapted to particular situations.

Keywords: Oligopoly; Equilibrium; Variational Inequalities; Mathematical Programming.

1. INTRODUCTION

La recherche du point d'équilibre d'un oligopole peut s'effectuer à l'aide d'algorithmes de recherche du point fixe d'une fonction de R^N dans R^N . Cette approche a été utilisée par Scarf [6] dans le cas général, et Lemke et Howson [3] dans le cas où les courbes d'offre et de demande sont linéaires. Ces algorithmes sont cependant difficiles à appliquer lorsque N devient grand.

Dans cet article, nous proposons une approche basée sur la représentation des équations d'équilibre par une inéquation variationnelle. Sous certaines hypothèses concernant les courbes d'offre et de demande, le problème variationnel est monotone; nous pouvons alors utiliser pour le résoudre des algorithmes de projection (Auslender [1]) ou des heuristiques basées sur des

(*) Reçu en mars 1983.

Cette recherche a été rendue possible grâce à une subvention du C.R.S.H. du Canada (410-81-0722R1) et à une subvention d'équipe F.C.A.C. (AS#26). Je tiens à remercier Alain Haurie pour sa lecture attentive de texte, ainsi que ses remarques constructives.

(¹) GERAD (Groupe d'Études et de Recherche en Analyse des Décisions), École des Hautes Études Commerciales, 5255, avenue Decelles, Montréal, Québec, Canada H3T 1V6.

pseudo-directions de descente (Marcotte [4]). Lorsque la courbe de demande est concave (ceci comprend donc le cas où elle est linéaire), un algorithme très simple d'application permet d'en trouver le point d'équilibre.

Cet article comporte quatre sections : d'abord une formulation mathématique du problème à partir des hypothèses de comportement concurrentiel de Nash-Cournot ainsi que la solution proposée par Murphy *et al.* [5], puis une présentation sous forme d'un problème de complémentarité non linéaire et son équivalent variationnel, des algorithmes de résolution du problème variationnel et finalement, sous certaines hypothèses favorables, la description d'un algorithme efficace de résolution. Les algorithmes proposés seront évalués suivant les trois critères suivants : convergence théorique, performance espérée et facilité d'implantation.

2. DÉFINITION DU PROBLÈME

Suivant la terminologie de Murphy *et al.* [5], nous définissons une structure de marché oligopolistique constituée de N firmes en concurrence pour la production d'un bien. Chaque firme possède une fonction de coût de production $f_i(q_i)$, où q_i représente la quantité produite.

La courbe de demande (en fait, son inverse) est notée $p(Q)$ et représente le prix que les consommateurs sont disposés à payer lorsqu'une quantité totale $Q = \sum_{i=1}^N q_i$ du bien est mise sur le marché par l'ensemble des producteurs.

DÉFINITION : Un ensemble de niveaux de production $q^* = (q_1^*, \dots, q_N^*)$ constitue un *équilibre de Cournot-Nash*, si pour tout j , la production q_j^* maximise le profit de la firme j , étant donné que les niveaux de production des autres firmes restent constants et égaux à q_i^* , $i \neq j$.

Cette définition correspond à la notion intuitive d'équilibre local : chaque firme maximise son profit en ne tenant compte que des *niveaux de production* actuels de ses concurrents et ne considère pas les réactions subséquentes de ceux-ci à ses propres décisions. Pour chaque firme i , ce comportement peut être décrit à l'aide du problème d'optimisation suivant :

$$\max_{q_i \geq 0} q_i p \left(q_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N q_j^* \right) - f_i(q_i), \quad (1)$$

dont q_i^* constitue l'optimum.

Dorénavant, nous désignerons par Q la quantité globale produite par les N firmes. Nous avons donc $Q = \sum_{j=1}^N q_j$ et $Qp(Q)$ représente le revenu global des N firmes.

3. L'ALGORITHME DE MURPHY, SHERALI ET SOYSTER

L'algorithme proposé par Murphy *et al.* [5] consiste à résoudre itérativement une suite de problèmes de maximisation concaves dont la suite de solutions optimales converge vers la solution d'équilibre. La preuve de convergence repose sur les hypothèses suivantes concernant les courbes d'offre et de demande :

H 1. Les fonctions $p(\cdot)$ et $f_i(\cdot)$ sont continûment différentiables sur l'axe réel non négatif.

H 2. $p(\cdot)$ est une fonction décroissante de la quantité produite.

H 3. Le revenu global $Qp(Q)$ est une fonction concave de Q .

H 4. Les fonctions de coût $f_i(\cdot)$ sont convexes, non négatives et croissantes.

H 5. $\lim_{Q \rightarrow \infty} p(Q) < 0$.

Les conditions H 4 et H 5 nous assurent que les q_i sont bornés si les coûts de production ne sont pas identiquement nuls et donc que la solution ne peut se trouver à l'infini. En effet, il existe un seuil Q_1 tels que $[Qp(Q)]' = p(Q) + Qp'(Q) \leq 0$ pour tout $Q \geq Q_1$; au-delà de ce seuil, le revenu de chaque firme décroît pour éventuellement devenir négatif. L'équilibre ne peut donc se situer dans cette région.

Algorithme A 1

Soient Q_L et Q_U des bornes (inférieure et supérieure, respectivement) sur la production d'équilibre $Q^* = \sum_{i=1}^N q_i^*$.

Q_L s'obtient en résolvant le problème :

$$\max_{q \geq 0} \left(\sum_{i=1}^N q_i \right) p \left(\sum_{i=1}^N q_i \right) - \sum_{i=1}^N f_i(q_i), \quad (2)$$

dont la solution est un vecteur de production maximisant le profit global des N firmes, et correspond donc à une situation monopolistique ou de collusion.

Q_U s'obtient en résolvant le problème :

$$\max_{q \geq 0} \int_0^{\sum_{i=1}^N q_i} p(x) dx - \sum_{i=1}^N f_i(q_i). \quad (3)$$

A l'optimum de (3), chaque firme a un coût marginal de production égal au prix de vente.

Étape 1

$$\bar{Q} \leftarrow \frac{1}{2}(Q_L + Q_U).$$

Étape 2

Résoudre le problème de maximisation concave :

$$\max_{q \geq 0} p(\bar{Q}) \sum_{i=1}^N q_i + \frac{1}{2} p'(\bar{Q}) \sum_{i=1}^N q_i^2 - \sum_{i=1}^N f_i(q_i), \quad (4)$$

sujet à $\sum_{i=1}^N q_i = \bar{Q}$.

Étape 3

Les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité de Kuhn et Tucker pour le problème précédent s'écrivent :

$$p(\bar{Q}) + q_i p'(\bar{Q}) - f'_i(q_i) - \lambda(\bar{Q}) + u_i = 0, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$\sum_{i=1}^N q_i = \bar{Q}, \quad (6)$$

$$u_i q_i = 0, \quad (7)$$

$$u_i, q_i \geq 0, \quad (8)$$

si $\lambda(\bar{Q}) = 0$ alors l'équilibre est obtenu : $q_i^* = q_i, \forall i$; STOP,

si $\lambda(\bar{Q}) > 0$ alors $Q_L \leftarrow \bar{Q}$; aller à l'étape 1.

si $\lambda(\bar{Q}) < 0$ alors $Q_U \leftarrow \bar{Q}$; aller à l'étape 1. $\triangle$

En pratique à l'étape 3, nous arrêtons l'algorithme lorsque $|\lambda(\bar{Q})| < \varepsilon$ où ε est un seuil de tolérance prédéfini. Le problème (4) peut être résolu efficacement à l'aide d'un algorithme de gradient réduit.

3. REFORMULATION DU PROBLÈME A L'AIDE D'UNE INÉQUATION VARIATIONNELLE

Pour une firme i , le maximum de (1) est obtenu lorsque $q_i=0$ ou en annulant la dérivée de la fonction objectif de (1). Posons :

$$g_i(q) = p \left(\sum_{j=1}^N q_j \right) + q_i p' \left(\sum_{j=1}^N q_j \right) - f'_i(q_i). \quad (9)$$

Le point d'équilibre est alors caractérisé par le problème de complémentarité non linéaire suivant (voir Shapiro [7]) :

$$g(q^*) \leq 0, \quad (10a)$$

$$q^{*T} g(q^*) = 0, \quad (10b)$$

$$q^* \geq 0. \quad (10c)$$

Cette formulation est elle-même équivalente à l'inéquation variationnelle (Auslender [1]) :

$$q^* \geq 0, \quad (11a)$$

$$(q^* - q)^T g(q^*) \geq 0, \quad \forall q \geq 0. \quad (11b)$$

PROPOSITION 1 : Les formulations (10) et (11) sont équivalentes.

Preuve : Soit q^* la solution de (10), nous avons :

$$(q^* - q)^T g(q^*) = -q^T g(q^*) \geq 0 \quad \text{si } q \geq 0, \quad \text{car } g(q^*) \leq 0.$$

Réciproquement soit q^* la solution de (11), nous considérons deux cas.

1. Supposons que (10a) ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire :

$$g(q^*) \geq 0,$$

$$g(q^*) \neq 0.$$

1 a. Supposons $q^{*T} g(q^*) = 0$, alors :

$$(q^* - q)^T g(q^*) = -q^T g(q^*) < 0 \quad \text{si nous prenons } q = g(q^*).$$

q^* ne peut donc être la solution de (11) (contradiction).

1 b. Supposons $q^{*T} g(q^*) \neq 0$. L'inégalité (11b) pour $q=0$ implique donc que $q^{*T} g(q^*) \geq 0 (\neq 0)$. Soit $q = 2q^*$, nous obtenons :

$$(q^* - q)^T g(q^*) = -q^{*T} g(q^*) \leq 0 (\neq 0),$$

qui est une contradiction. Nous en déduisons pour chacun des cas : $g(q^*) \leq 0$.

2. Supposons que (10b) ne soit pas vérifiée, c'est-à-dire que $q^{*T} g(q^*) \neq 0$. Puisque nous avons nécessairement $g(q^*) \leq 0$ et $q^* \geq 0$, ceci implique que :

$$q^{*T} g(q^*) \leq 0 (\neq 0).$$

Si nous posons $q=0$, alors :

$$(q^* - q)^T g(q^*) = q^{*T} g(q^*) \leq 0 (\neq 0),$$

en contradiction avec l'hypothèse (11b).

Nous en concluons donc l'implication (11) $\Rightarrow$ (10). ●

4. ALGORITHMES DE RÉOLUTION

Les algorithmes de résolution des inéquations variationnelles requièrent généralement la condition suivante sur la transformation $g(\cdot)$.

DÉFINITION : Une fonction $g(\cdot)$ est isotone (respectivement antitone) sur un sous-ensemble D de R^n si nous avons :

$$\forall x, y \in D : (x - y)^T [g(x) - g(y)] \geq 0 \quad (\text{resp.} \leq 0).$$

Si pour tout x différent de y , l'inégalité est stricte, nous parlerons d'isotonie (respectivement antitonie) stricte.

Lorsque le contexte le permettra, nous parlerons plus simplement d'une fonction monotone. La proposition suivante caractérise les solutions de l'inéquation variationnelle (11).

PROPOSITION 2 : 1. Si la fonction $g(\cdot)$ est antitone et bornée pour tout q positif ou nul, il existe alors au moins une solution à l'inéquation variationnelle (11).

2. Si la fonction $g(\cdot)$ est strictement antitone, la solution est unique.

Preuve : L'existence d'une solution s'obtient à l'aide du théorème du point fixe de Schauder (Simmons [8]) alors que l'unicité s'obtient aisément en remarquant que si q_1 et q_2 satisfont (11), alors :

$$(q_1 - q_2)^T g(q_1) \leq 0 \quad \text{et} \quad (q_2 - q_1)^T g(q_2) \leq 0$$

impliquent

$$(q_2 - q_1)^T [g(q_1) - g(q_2)] \leq 0$$

$$\Rightarrow (q_2 - q_1)^T [g(q_1) - g(q_2)] = 0 \Rightarrow q_1 = q_2. \quad \bullet$$

Lorsque $g(\cdot)$ est différentiable, nous obtenons la caractérisation suivante :

PROPOSITION 3 : Une fonction $g(x)$ est isotone (respectivement antitone) sur R^+ si la matrice jacobienne $\nabla g(x)$ est semi-définie positive (respectivement négative) pour tout x dans R^+ . ●

Soit $g = (g_1, \dots, g_N)$ où g_i est donnée par l'équation (9). La matrice jacobienne $J = \nabla g(q)$ est donnée par :

$$\begin{aligned} J_{ij} &= p'(Q) + q_i p(Q) \quad \text{si } i \neq j, \\ J_{ii} &= 2p'(Q) + q_i p(Q) - f_i''(q_i), \end{aligned} \quad (12)$$

que nous pouvons écrire :

$$J = p'(Q)(I + U) + p(Q)qu^T - \text{diag}[f_i''(q_i)], \quad (13)$$

où :

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & 1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & \cdot & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \text{diag}[f(q)] = \begin{bmatrix} f_1''(q_1) & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ & & & \cdot \\ 0 & & & f_N''(q_N) \end{bmatrix}.$$

PROPOSITION 4 : Si la fonction $p(\cdot)$ est deux fois continûment différentiable et convexe, si de plus, $p(\cdot)$ satisfait H 1, H 2 et H 3, alors la fonction $g(\cdot)$ est antitone. Si de plus, $Qp(Q)$ est fortement concave ou si les f_i sont strictement convexes alors $g(\cdot)$ est strictement antitone.

Preuve : Posons :

$$H = p'(Q)(I + U) + p(Q)qu^T. \quad (14)$$

Pour prouver la première assertion de la proposition, nous montrerons que la matrice $-H$ est semi-définie positive.

Considérons la forme quadratique, $\mu = -x^T Hx$. Nous avons :

$$\mu = - \left\{ p' \left(\sum_{j=1}^N q_j \right) \left[\|x\|^2 + \left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^2 \right] + p \left(\sum_{j=1}^N q_j \right) \left(\sum_{j=1}^N x_j \right) \left(\sum_{j=1}^N q_j x_j \right) \right\}.$$

Nous posons $Q = \sum_{j=1}^N q_j$. La fonction $Qp(Q)$ étant concave par hypothèse, nous obtenons l'inégalité $2p'(Q) + Qp(Q) \leq 0$. D'où :

$$-2p'(Q) \geq Qp(Q) :$$

$$\Rightarrow 2\mu \geq Q p(Q) \left[\|x\|^2 + \left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^2 \right] - 2p(Q) \left(\sum_{j=1}^N x_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N q_j x_j \right).$$

Si $p(Q)=0$, nous avons immédiatement $\mu \geq 0$; sinon, $p(Q) > 0$ et :

$$v = \frac{2\mu}{p(Q)} \geq Q \left[\|x\|^2 + \left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^2 \right] - 2 \left(\sum_{j=1}^N x_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N q_j x_j \right). \quad (15)$$

Montrons alors que le second membre de (15) est positif ou nul. Si $\sum_{j=1}^N x_j \geq 0$, nous obtenons :

$$\left(\sum_{j=1}^N x_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N q_j x_j \right) \leq x_j^{\max} \left(\sum_{j=1}^N x_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N q_j \right) \leq Q x_j^{\max} \sum_{j=1}^N x_j,$$

où $x_j^{\max} = \max(x_1, \dots, x_N) \geq 0$ puisque $\sum_{j=1}^N x_j \geq 0$.

Sans perte de généralité, nous posons $j_{\max} = N$. Ainsi :

$$v \geq Q \left[\|x\|^2 + \left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^2 \right] - 2Q x_N \sum_{j=1}^N x_j \quad (16)$$

$$= Q \left(2 \sum_{j=1}^{N-1} x_j^2 + 2 \sum_{\substack{j>i \\ j \leq N-1}} x_i x_j \right) = Q \left(2 \sum_{j=1}^{N-1} x_j^2 + \sum_{\substack{j \neq i \\ j \leq N-1 \\ i \leq N-1}} x_i x_j \right)$$

$$= Q \left[2 \sum_{j=1}^{N-1} x_j^2 + \sum_{i=1}^{N-1} x_i \left(\sum_{j=1}^{N-1} x_j - x_i \right) \right]$$

$$= Q \left[2 \sum_{j=1}^{N-1} x_j^2 + \left(\sum_{j=1}^{N-1} x_j \right)^2 - \sum_{j=1}^{N-1} x_j^2 \right] \geq 0.$$

Si $\sum_{j=1}^N x_j \leq 0$, nous avons :

$$\left(\sum_{j=1}^N x_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^N q_j x_j \right) \leq Q \left(\sum_{j=1}^N x_j \right) x_{j_{\min}} \leq 0,$$

où $x_{j_{\min}} = \min(x_1, \dots, x_N) \leq 0$.

Comme précédemment, posons sans perte de généralité : $j_{\min} = N$.

$$v \geq Q \left[\|x\|^2 + \left(\sum_{j=1}^N x_j \right)^2 \right] - 2Qx_N \sum_{j=1}^N x_j$$

et le raisonnement se poursuit comme auparavant après l'inéquation (16); or, $v \geq 0 \Rightarrow \mu \geq 0 \Rightarrow -H$ semi-définie négative $\Rightarrow g(\cdot)$ antitone.

Si $Qp(Q)$ est fortement concave, alors l'inégalité (15) est stricte, ce qui implique que $g(\cdot)$ est strictement antitone.

Si les fonctions $f_i(\cdot)$ sont strictement convexes alors g s'exprime comme différence d'une fonction antitone et d'une fonction strictement isotone. ●

Remarque : Si $p(\cdot)$ est concave, H n'est pas nécessairement semi-définie négative. En effet pour $N=2$, nous prenons :

Remarque : Si $p(\cdot)$ est concave, H n'est pas nécessairement semi-définie négative. En effet pour $N=2$, nous prenons :

$$p'(Q) = -1,$$

$$p(Q) = -20,$$

$$q_1 = 1,$$

$$q_2 = 2,$$

$$H + H^T = -2 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - 20 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -44 & -62 \\ -62 & -84 \end{bmatrix}$$

et $\det(H + H^T) = -148 < 0 \Rightarrow$ une valeur propre de $H + H^T$ est négative $\Rightarrow H$ n'est pas semi-définie négative.

Nous présentons maintenant trois algorithmes de résolution du problème variationnel (11).

4.1. Algorithme de projection

Cette méthode consiste à résoudre itérativement une suite de problèmes de minimisation convexes. Réécrivons (11) sous la forme plus générale :

$$\begin{aligned} (x^* - x)^T F(x^*) &\leq 0, \\ x^*, x &\in \Phi, \end{aligned} \tag{17}$$

où $\Phi \subseteq \mathbb{R}^n$ est un ensemble compact et convexe.

Dans notre cas, $\Phi = R_n^+ = \{x \in R_n^* \mid x \geq 0\}$ n'est pas compact, cependant

nous pouvons mettre des bornes supérieures sur les x_i (voir condition H 4).

A la i -ième itération, nous résolvons le problème :

$$\text{Proj}_{\Phi}^B [x^{i-1} - \omega B^{-1} F(x^{i-1})], \quad (18)$$

où Proj_{Φ}^B est l'opérateur de projection sur l'ensemble Φ selon la norme induite par une matrice définie positive B :

$$\text{Proj}_{\Phi}^B(x) = \arg \min_{y \in \Phi} (y-x)^T B (y-x). \quad (19)$$

Soit $\{x_i\}$ la suite des solutions du problème (18). Alors si $\sup_{x \in \Phi} \|I - \omega B^{-1} \nabla F(x)\| < 1$, la suite $\{x_i\}$ converge géométriquement vers la solution d'équilibre x^* .

Dans notre situation, la projection (18) prend la forme plus sympathique d'un problème de programmation quadratique avec contraintes de non-négativité :

$$\min_{x \geq 0} \frac{1}{2} x^T A x - c^T x. \quad (20)$$

Un désavantage de cet algorithme consiste dans la difficulté du choix de la constante ω et de la matrice B . ω doit être assez petit pour garantir la convergence de la suite $\{x_i\}$, par contre, une valeur trop faible nuira au taux de convergence. La convergence sera d'autant plus rapide que la matrice B « ressemble » au jacobien de $F(\cdot)$. En revanche, il peut être souhaitable de choisir une forme simple (par exemple, diagonale) pour B afin de simplifier la résolution du problème (20).

4.2. Méthode de Jacobi

Cette méthode consiste à approximer la transformation $F(\cdot)$ par la transformation diagonale et donc inversible :

$$D(x) = (D_1(x), \dots, D_N(x))^T,$$

où :

$$D_i(x) = F_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_N). \quad (21)$$

A chaque itération, x_i est solution de l'inéquation variationnelle :

$$\begin{aligned} (x^i - x)^T D(x) &\leq 0, \\ x^i, x &\in \Phi, \end{aligned} \quad (22)$$

qui est équivalente au problème de minimisation séparable :

$$\min_{x \in \Phi} \sum_{i=1}^N \int_0^x D_i(t) dt. \quad (23)$$

Nous pouvons aussi obtenir des conditions nécessaires de convergence locale et globale difficiles à vérifier en pratique.

4.3. Pseudo-directions de descente

Il s'agit ici d'établir un parallèle entre la fonction $F(\cdot)$ et le gradient d'une hypothétique fonction objectif. Soit d une direction admissible satisfaisant la relation $d^T F(x_{i-1}) < 0$; le point x_i est alors égal à $x_{i-1} + \lambda d$ où $\lambda = \min \{ \lambda_{\max}, \lambda^* \}$ et λ^* est solution de l'équation $d^T F(x_{i-1} + \lambda d) = 0$. $\lambda_{\max}$ constitue une borne supérieure sur le pas destinée à maintenir x_i dans le domaine admissible Φ .

5. CAS PARTICULIERS

5.1. Coûts de production quadratiques et courbes de demande linéaires

Nous avons :

$$\begin{aligned} p(Q) &= \alpha - \beta Q, & \alpha, \beta &\geq 0, \\ f_i(q_i) &= q_i(a_i + b_i q_i), & a_i, b_i &\geq 0. \end{aligned}$$

Sous ces hypothèses restrictives, le problème (1) devient :

$$\max_{q_i \geq 0} q_i \left(\alpha - \beta q_i - \beta \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N q_j^* \right) - q_i(a_i + b_i q_i). \quad (24)$$

Nous présenterons d'abord un algorithme de résolution puis nous montrerons qu'il procure effectivement la solution d'équilibre.

Algorithme 2

Étape 0

Soit I un ensemble d'indices (firmes) :

$$I \leftarrow \{1, 2, \dots, N\}.$$

Étape 1

Résoudre le problème (24) pour les firmes appartenant à l'ensemble I , en

relaxant les contraintes $q_i \geq 0$.

Soit $\{\bar{q}_i\}_{i \in I}$ la solution ainsi obtenue par résolution du système linéaire :

$$2(\beta + b_i)q_i + \beta \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} q_j = \alpha - a_i, \quad \forall i \in I. \quad (25)$$

Si les contraintes de non-négativité sont satisfaites alors la solution d'équilibre est :

$$\begin{aligned} q_i^* &= \bar{q}_i, & i \in I, \\ q_i^* &= 0, & i \notin I; \end{aligned}$$

sinon aller à l'étape 2.

Étape 2

Soient $i_1, i_2, \dots, i_k$, les indices tels que :

$$q_{i_1} < 0, \quad q_{i_2} < 0, \quad \dots, \quad q_{i_k} < 0.$$

Nous effectuons $I \leftarrow I - \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$ et nous retournons à l'étape 1. $\triangle$

L'algorithme A 2 converge puisque le nombre d'indices dans l'ensemble I décroît strictement à chaque itération. Lorsque le critère d'arrêt est satisfait, un équilibre est atteint pour les firmes faisant partie de l'ensemble I . Il s'agit alors de montrer que pour ces niveaux de production donnés, les firmes ne faisant pas partie de l'ensemble I maximisent leur profit en ne produisant rien. Nous prouvons d'abord le lemme suivant.

LEMME 5 : *A chaque itération t de l'algorithme A 2, le niveau de production global $Q(t) = \sum_{i=1}^N q_i^{(t)}$ augmente.*

Preuve : Supposons qu'il existe une itération t telle que $Q^{(t)} < Q^{(t-1)}$. D'après (25), nous avons :

$$q_i^{(t)} = \frac{\alpha - a_i - \beta Q^{(t)}}{2(\beta + b_i)} > \frac{\alpha - a_i - \beta Q^{(t-1)}}{2(\beta + b_i)} = q_i^{(t-1)} \quad \text{si } i \in I^{(t)}.$$

Donc :

$$\begin{aligned} q_i^{(t)} &> q_i^{(t-1)} & \text{si } i \in I^{(t)}, \\ 0 &= q_i^{(t)} \geq q_i^{(t-1)} & \text{si } i \notin I^{(t)}, \end{aligned}$$

puisque $q_i^{(t-1)} < 0$ si $i \in I^{(t-1)}$ mais $i \notin I^{(t)}$.

$$\text{D'où } Q^{(t)} = \sum_{i=1}^N q_i^{(t)} > \sum_{i=1}^N q_i^{(t-1)} = Q^{(t-1)} \text{ (contradiction). } \bullet$$

COROLLAIRE 6 : *L'équilibre obtenu par l'algorithme A 2 est un équilibre pour le problème original.*

Preuve : Soit T l'itération finale et $k \notin I^{(T)}$. Le niveau de production global est $Q^{(t)} = \sum_{i \in I^{(t)}} q_i^{(T)}$. Soit t_k l'itération à laquelle la variable q_k a été éliminée.

Le problème de maximisation de la firme k possède comme solution :

$$q_k = \max \left\{ 0, \frac{\alpha - a_i - \beta Q^{(T)}}{2(\beta + b_1)} \right\} \leq \max \left\{ 0, \frac{\alpha - a_i - \beta Q^{(t_k)}}{2(\beta + b_i)} \right\} = 0$$

puisque $Q^{(T)} \geq Q^{(t_k)}$.

Le vecteur de production $q^{(T)}$ constitue donc bien l'équilibre recherché :

$$q^{(T)} = q^*. \bullet$$

Exemple numérique : $\alpha = 10$, $\beta = 1$,

$$N = 3, \quad a_1 = 4, \quad a_2 = 5, \quad a_3 = 9, \\ b_1 = 6, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 1.$$

1^{re} itération :

$$I \leftarrow \{1, 2, 3\} \quad \begin{bmatrix} 14 & 1 & 1 \\ 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = .3758 \\ q_2 = .7771 \\ q_3 = -.0382, \end{cases} \\ Q^{(1)} = q_1 + q_2 + q_3 = 1.1147, \\ I \leftarrow \{1, 2\}.$$

2^e itération :

$$\begin{bmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} q_1 = .3735, \\ q_2 = .7711, \end{cases} \quad q_3 = 0, \\ Q^{(2)} = 1.1446 > Q^{(1)}.$$

Solution :

$$q_1^* = .3735, \\ q_2^* = .7711, \\ q_3^* = 0.$$

Remarques. — 1. Le système linéaire (25) admet une solution unique. Pour voir que la matrice associée est inversible, nous écrivons (25) :

$$2(1+b_i)q_i + \sum_{j \neq i} q_j = \frac{\alpha - a_i}{\beta}, \quad i=1, \dots, N$$

et la matrice correspondante :

$$M = \begin{bmatrix} 2 + \frac{2b_1}{\beta} & & & 1 \\ & \frac{2+2b_2}{\beta} & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & \frac{2+2b_N}{\beta} \end{bmatrix}$$

La forme quadratique :

$$x^T M x = \sum_{j=1}^N \left(1 + \frac{2b_j}{\beta_j}\right) x_j^2 + \left(\sum_{j=1}^N x_j\right)^2$$

est définie positive, donc M est non singulière.

2. Sous certaines hypothèses, nous pouvons étendre l'application de l'algorithme à des situations où les fonctions impliquées sont non linéaires. Pour cela il faut :

- que les fonctions de demande et de production soient définies sur R et non pas sur R^+ ;
- que le système d'équations non linéaires correspondant à (26) possède une solution unique;
- pouvoir résoudre efficacement le sous-problème à chaque itération.

5.2. Courbe de demande concave

Dans cette section, nous faisons les deux hypothèses suivantes :

H 6. Les $f_i(\cdot)$ sont croissantes, continues et convexes sur l'axe réel non-négatif. La différentiabilité des $f_i(\cdot)$ n'est pas requise.

H 7. L'inverse de la loi de demande est décroissante, concave et continûment différentiable sur l'axe réel non négatif.

Cette dernière condition permet de se passer de H 5; $p(\cdot)$ étant décroissante et concave, nous en déduisons l'existence d'un point $\bar{Q}$ tel que : $p(Q) < 0$

si $Q > \bar{Q}$. Au-delà de ce point, le profit des firmes devient négatif; la condition H 5 est donc satisfaite implicitement.

Sous ces hypothèses et l'existence de la dérivée seconde des fonctions $f_i(\cdot)$, Szidarovsky et Yakowitz [9] ont prouvé l'existence et l'unicité de l'équilibre. La proposition ci-dessous est similaire mais ne suppose pas l'existence des dérivées secondes.

PROPOSITION 7 : Soit $q_i(Q)$, la solution du problème d'optimisation :

$$\max_{q_i \geq 0} g_Q(q_i) = q_i p(Q) + \frac{1}{2} q_i^2 p'(Q) - f_i(q_i). \quad (27)$$

Alors, $\forall i$: $q_i(Q)$ est une fonction décroissante de Q .

Preuve : Dans la suite des calculs, nous omettrons l'indice i .

Soit $q_a = q(Q_a) \geq 0$ et $q_b(Q_b) > q_a$ avec $Q_b > Q_a$. Soit également $h < q_b - q_a$.

Par la concavité de la fonction g_{Q_b} (voir fig.), nous avons :

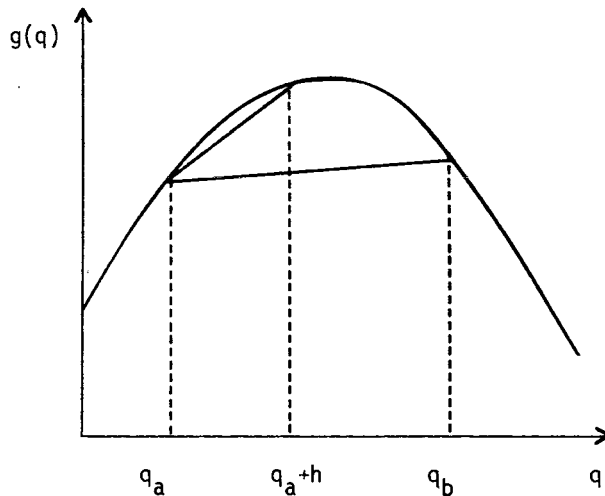
$$\begin{aligned} \frac{g_{Q_b}(q_b) - g_{Q_b}(q_a)}{q_b - q_a} &\leq \frac{g_{Q_b}(q_a + h) - g_{Q_b}(q_a)}{h} \\ &= p(Q_b) \frac{q_a + h - q_a}{h} + \frac{1}{2h} [(q_a + h)^2 - q_a^2] p'(Q_b) - \frac{f(q_a + h) - f(q_a)}{h} \\ &= p(Q_b) + \left(q_a + \frac{h}{2}\right) p'(Q_b) - \frac{f(q_a + h) - f(q_a)}{h}. \end{aligned} \quad (28)$$

Donc :

$$\begin{aligned} g_{Q_b}(q_b) - g_{Q_b}(q_a) &\leq [q_b - q_a] \cdot \left[p(Q_b) + \left(q_a + \frac{h}{2}\right) p'(Q_b) - \frac{f(q_a + h) - f(q_a)}{h} \right] \\ &= (q_b - q_a) \frac{g_{Q_a}(q_a + h) - g_{Q_a}(q_a)}{h} \leq 0, \end{aligned}$$

puisque $g_{Q_a}(q_a)$ est maximal.

D'où $g_{Q_b}(q_b) \leq g_{Q_b}(q_a)$; il existe donc toujours un point q_b tel que $q_b \leq q_a$ si q_b maximise $g_{Q_b}(\cdot)$ et q_a maximise $g_{Q_a}(\cdot)$ avec $Q_a < Q_b$. Si $g_Q(\cdot)$ est strictement concave [$p(\cdot)$ ou $f(\cdot)$ est strictement concave] alors l'inégalité (28) est stricte et $q(Q)$ est une fonction strictement décroissante de la quantité totale Q . ●



COROLLAIRE 8 : La fonction $\gamma(\cdot)$ définie par $\gamma(Q) = Q - \sum_{j=1}^N q_j(Q)$ est croissante.

Preuve : La preuve est évidente puisque $\sum_{j=1}^N q_j(Q)$ est décroissante par le lemme précédent. ●

COROLLAIRE 9 : Il existe un équilibre unique si les $f_i(\cdot)$ sont strictement convexes ou $p(\cdot)$ strictement concave.

Preuve : Si l'une de ces conditions est réalisée alors $q(\cdot)$ est strictement croissante; or, $\gamma(0) = - \sum_{j=1}^N q_j(0) \leq 0 \Rightarrow q(\cdot)$ possède un seul zéro. ●

Le lemme suivant constitue le pendant du lemme 6 de l'article de Murphy et al. [5].

LEMME 10 : Soient Q^c la quantité globale produite par des firmes opérant en concurrence parfaite ⁽²⁾ et Q^m l'output résultant d'une collusion des N firmes

⁽²⁾ En état de concurrence parfaite, le coût marginal de production est égal au prix du marché. Dans le cas différentiable, nous avons :

$$p(Q^c) - f'_i(q_i) = 0 \quad \text{si } q_i > 0.$$

Dans le cas non différentiable, nous avons plutôt :

$$p(Q^c) - f'_i(q_i) \geq 0 \quad \text{si } q_i > 0, \quad (29)$$

où $f'_i(\cdot)$ représente la dérivée à gauche de la fonction $f_i(\cdot)$.

(monopole) ⁽³⁾. Nous obtenons $Q^m \leq Q^* \leq Q^c$.

Preuve : Soit I^m , l'ensemble des firmes ayant une production positive en situation monopolistique.

Les conditions d'optimalité du problème (30) sont données par :

$$p(Q^m) + Q^m p'(Q^m) - f_i^-(q_i^m) \geq 0, \quad (31 a)$$

$$p(Q^m) + Q^m p'(Q^m) - f_i^+(q_i^m) \leq 0. \quad (31 b)$$

Nous avons :

$$0 \leq p(Q^m) + Q^m p'(Q^m) - f_i^-(q_i^m) \leq p(Q^m) + q_i^m p'(Q^m) - f_i^-(q_i^m),$$

puisque :

$$q_i^m \leq Q^m \text{ et } p'(Q^m) \leq 0 \text{ donc } q_i(Q^m) \geq q_i^m, \quad \forall i \in I^m.$$

Or :

$$\gamma(Q^m) = Q^m - \sum_{j=1}^N q_j(Q^m) \leq Q^m - \sum_{j \in I^m} q_j(Q^m) \leq 0.$$

La fonction $\gamma(\cdot)$ étant croissante, nous obtenons $Q^* \geq Q^m$. Sous diverses conditions ⁽⁴⁾, l'inégalité est stricte.

Soit maintenant I^* , l'ensemble des firmes ayant un output positif en situation d'oligopole. Nous obtenons :

$$\begin{aligned} p(Q^*) - f_i^-(Q^*) &= p(Q^*) - f_i^-(q_i^*) + q_i^* p'(Q^*) - q_i^* p'(Q^*) \geq 0 \\ &\Rightarrow q_i^* \geq q_i^*, \quad \forall i \in I^* \Rightarrow Q^c \geq Q^* \quad \bullet \end{aligned}$$

Les résultats qui précèdent, conduisent à l'algorithme suivant basé sur la recherche binaire.

Algorithme A 3

Étape 1

Soient $Q_{\min}$ et $Q_{\max}$ tels que $Q_{\min} \leq Q^* \leq Q_{\max}$, pour tout équilibre oligopolistique Q^* . Nous pouvons prendre $Q_{\min} = Q^m$ et $Q_{\max} = Q^c$ ou par défaut, $Q_{\min} = 0$ et $Q_{\max}$ une constante « très grande ».

⁽³⁾ En situation de monopole, les firmes s'associent afin de maximiser le profit global :

$$\max_{q \geq 0} \sum_{i=1}^N \left[q_i p \left(\sum_{j=1}^N q_j \right) - f_i(q_i) \right]. \quad (30)$$

⁽⁴⁾ Stricte convexité des $f_i(\cdot)$, ou stricte concavité de $Qp(Q)$, ou stricte monotonie de $p(\cdot)$ et cardinalité de I^m supérieure à 1.

Étape 2

$$Q \leftarrow \frac{Q_{\min} + Q_{\max}}{2},$$

si $|\gamma(Q)| \leq \varepsilon$ faire $Q^* = Q$.

Nous obtenons les q_i^* en résolvant pour tout i :

$$\max_{q_i \geq 0} q_i p(Q) + \frac{1}{2} q_i^2 p'(Q) - f_i(q_i).$$

FIN.

si $\gamma(Q) < -\varepsilon$ faire $Q_{\min} \leftarrow Q$; aller à l'étape 2.

si $\gamma(Q) > \varepsilon$ faire $Q_{\max} \leftarrow Q$; aller à l'étape 2. $\triangle$

Cet algorithme peut être aisément amélioré en utilisant dans les dernières itérations une technique d'interpolation linéaire.

5.3. Coûts de production linéaires

Dans cette section, nous montrerons que lorsque les coûts de production sont linéaires (coûts marginaux de production constants), nous pouvons obtenir directement le niveau global de production à l'équilibre Q^* comme solution d'un problème d'optimisation unidimensionnel. Dans ce qui suit, la fonction $p(\cdot)$ n'est pas nécessairement dérivable. Cependant nous faisons l'hypothèse que $Qp(Q)$ est strictement concave. Cette hypothèse implique d'une part que Q^* est unique (voir le lemme suivant) et d'autre part, que la fonction $Qp(Q)$ ainsi que la fonction $p(\cdot)$ possèdent une dérivée à gauche $p(Q) + Qp^-(Q)$ et une dérivée à droite $p(Q) + Qp^+(Q)$ sur tout intervalle ouvert de R (voir par exemple, Choquet [2]).

LEMME 11 : Soit $f_i(q_i) = \alpha_i q_i$, la fonction de coût de production de la firme i et $\alpha^* = \sum_{i \in I^*} \alpha_i$, où I^* représente l'ensemble des firmes ayant un niveau de production strictement positif à l'équilibre ($q_i^* > 0$). Le niveau de production global à l'équilibre Q^* est l'unique solution du problème de maximisation :

$$\max_{Q \geq 0} Qp(Q) + (N^* - 1) \int_0^Q p(t) dt - \alpha^* Q, \quad \text{où } N^* = |I^*|. \quad (32)$$

Preuve : L'unicité découle de la stricte concavité de l'objectif de (32).

$$\forall i \in I^* : q_i^* p^+(Q^*) + p(Q^*) - \alpha_i \leq 0$$

$$\Rightarrow \sum_{i \in I^*} [q_i^* p^+(Q^*) + p(Q^*) - \alpha_i] \leq 0$$

$$\Rightarrow Q^* p^+(Q^*) + N^* p(Q^*) - \alpha^* \leq 0. \quad (33)$$

Symétriquement, nous obtenons :

$$Q^* p^-(Q^*) + N^* p(Q^*) - \alpha^* \geq 0. \quad (34)$$

Or (33) et (34) constituent des conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité pour (32) puisque la stricte concavité de $Qp(Q)$ implique la stricte concavité de $Qp(Q) + (N^* - 1) \int_0^Q p(t) dt - \alpha^* Q$. ●

LEMME 12 : Soit $I \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ et

$$Q(I) = \arg \max Qp(Q) + (|I| - 1) \int_0^Q p(t) dt - \sum_{i \in I} \alpha_i.$$

Soit $j \in I$ tel que : $\alpha_j \geq p(Q(I))$, et : $\bar{I} = I - \{j\}$.

On a alors que $Q(\bar{I}) \leq Q(I)$.

Preuve :

$$\begin{aligned} p^-(Q(I)) + (|I| - 1)p(Q(I)) - \sum_{i \in \bar{I}} \alpha_i \\ = p^-(Q(I)) + |I|p(Q(I)) - \sum_{i \in I} \alpha_i + \alpha_j - p(Q(I)) \leq 0. \end{aligned}$$

On en déduit : $Q(\bar{I}) \leq Q(I)$. ●

Ces deux lemmes permettent d'établir la validité de l'algorithme suivant.

Algorithme A 4

Étape 0 :

Soit I , un ensemble de firmes :

$$I^{(0)} \leftarrow \{1, 2, \dots, N\}, \quad I \leftarrow I^{(0)}.$$

Étape 1 :

$$\alpha \leftarrow \sum_{i \in I} \alpha_i.$$

Résoudre le problème :

$$\max_{Q \geq 0} Qp(Q) + (N - 1) \int_0^Q p(t) dt - \alpha Q, \quad (35)$$

dont la solution optimale est $Q(\alpha)$.

Étape 2 :

Soit $\bar{I} = \{i_1, \dots, i_k\} \subseteq I$, l'ensemble des firmes pour lesquelles $\alpha_i \geq p(Q(\alpha))$.

Si $\bar{I} = \emptyset$, nous posons :

$$\begin{aligned} Q^* &\leftarrow Q(\alpha), \\ I^* &\leftarrow I, \quad N^* \leftarrow |I^*| \\ \alpha^* &\leftarrow \alpha \end{aligned}$$

et nous retournons à l'étape 3. Sinon $I \leftarrow I - \bar{I}$, $N \leftarrow I$ et retourner à 2.

Étape 3

Pour toute firme $i \in I^*$ et tout $y_i \geq 0$, considérons le problème :

$$\max_{q_i \geq 0} q_i p(q_i + y_i) - \alpha_i q_i, \quad (36)$$

dont la solution sera notée $q_i(y_i)$. Nous posons :

$$S_1^i = \{q_i \geq 0 \mid \text{il existe } y_i \geq 0 \mid q_i = q_i(y_i) \text{ et } y_i + q_i(y_i) = Q^*\}$$

si $i \in I^*$,

$$S_1^i = \{0\} \quad \text{si } i \notin I^*,$$

$$S_1 = S_1^1 \times S_1^2 \times \dots \times S_1^N = \prod_{i=1}^N S_1^i,$$

$$S_2 = \left\{ q \geq 0 \mid \sum_{i=1}^N q_i = Q^* \right\}.$$

Nous avons alors $S = S_1 \cap S_2$ qui constitue l'ensemble des solutions d'équilibre. $\triangle$

LEMME 13 : $S \neq \emptyset$.

Preuve : Considérons la fonction $\psi(y_i) = y_i + q_i(y_i) - Q^*$ pour $i \in I^*$, qui est bien définie [le problème (36) est strictement concave] et continue.

Si $y_i = 0$, $q_i(y_i) \leq Q^*$, sinon nous aurions :

$$p(Q^*) + Q^* p^+(Q^*) > \alpha_i,$$

or :

$$p(Q^*) > \alpha_j, \quad \forall j \in I^*, \quad j \neq i,$$

qui implique que $N^* p(Q^*) + Q^* p^+(Q^*) > \alpha^*$ est en contradiction avec (33).

Donc, $\psi(0) \leq 0$.

De même $\psi(Q^*) = q_i(Q^*) > 0$ puisque $p(Q^*) > \alpha_i$ pour tout $i \in I^*$. La fonction $\psi(\cdot)$ possède donc au moins une valeur y_i satisfaisant $\psi(y_i) = 0$, c'est-à-dire que $y_i + q_i(y_i) = Q^*$ $\bullet$

Nous allons maintenant caractériser les ensembles S_1^i pour $i \in I^*$.

LEMME 14 : Les S_1^i sont des intervalles fermés de R^+ .

Preuve : Par le lemme précédent, il existe $q_i \in S_1^i \Rightarrow$ il existe y_i tel que :

$$p(q_i + y_i) + q_i p^-(q_i + y_i) \geq \alpha_i,$$

$$p(q_i + y_i) + q_i p^+(q_i + y_i) \leq \alpha_i$$

et

$$q_i + y_i = Q^*.$$

Nous avons alors forcément $p^-(q_i + y_i) > p^+(q_i + y_i)$ sinon les inégalités ci-haut mentionnées seraient en contradiction l'une avec l'autre.

$$q_i + y_i = Q^* \Rightarrow \begin{cases} p(Q^*) + q_i p^-(Q^*) \geq \alpha_i, \\ p(Q^*) + q_i p^+(Q^*) \leq \alpha_i, \end{cases} \quad (37)$$

$$\Rightarrow S_1^i = [q_i^{\min}, q_i^{\max}], \quad (38)$$

où :

$$q_i^{\min} = \min_{q_i \geq 0} \{ q_i \mid p(Q^*) + q_i p^+(Q^*) \leq \alpha_i \} = \frac{\alpha_i - p(Q^*)}{p^+(Q^*)} > 0,$$

par construction puisque $i \in I^* \Rightarrow \alpha_i < p(Q^*)$.

Similairement :

$$q_i^{\max} = \frac{\alpha_i - p(Q^*)}{p^-(Q^*)} \geq q_i^{\min} \quad \bullet$$

LEMME 15 : Lorsque $\bar{I} = \emptyset$ à l'étape 2 de l'algorithme A 4, nous avons donc $I = I^*$.

Preuve : Il suffit de voir que nous ne pouvons avoir $I^* \subset I$ lorsque $\bar{I} = \emptyset$.

Supposons donc le contraire et soit $j \in I - I^*$. Par le lemme 11, $Q^* = Q(\alpha^*)$ doit être solution du problème strictement concave :

$$\max_{Q \geq 0} Qp(Q) + (N^* - 1) \int_0^Q p(t) dt - \alpha^* Q.$$

Il est aisé de voir que :

$$\alpha^* < \alpha \Rightarrow Q^* < Q(\alpha) \Rightarrow p(Q^*) > p(Q(\alpha)),$$

or :

$$\begin{aligned} \bar{I} = \emptyset &\Rightarrow p(Q(\alpha)) > \alpha_i, \quad \forall i \in I, \\ &\Rightarrow p(Q^*) > \alpha_i, \quad \forall i \in I. \end{aligned}$$

En particulier, $p(Q^*) > \alpha_j$, donc Q^* n'est pas la production totale à l'équilibre. $\bullet$

THÉOREME 16 : S constitue l'ensemble des solutions d'équilibre.

Preuve : Les lemmes 11 et 15 permettent d'affirmer que lorsque $I = I^*$ constitue l'ensemble des firmes ayant une production positive à l'équilibre, nous obtenons la production globale d'équilibre en résolvant le problème (35).

L'existence d'une solution du problème à l'étape 3 est fournie par le lemme 13. Il reste donc à vérifier les deux points techniques suivants.

Point 1

Toute firme $i \in \bar{I}$ à l'étape 2 d'une itération quelconque de l'algorithme a une production nulle à l'équilibre.

Nous procéderons par induction. Soit $I^{(t)}$ l'ensemble des firmes non éliminées à l'étape t , $I^{(t+1)}$ l'ensemble des firmes non éliminées à l'étape $t+1$ et $\bar{I} = I^{(t+1)} - I^{(t)}$.

Hypothèse d'induction

Les firmes faisant partie de l'ensemble $I^{(0)} - I^{(t)}$ ont un niveau de production nul à l'équilibre.

D'après l'hypothèse d'induction, il suffit donc de considérer les firmes faisant partie de $I^{(t)}$. Nous démontrerons que les firmes appartenant à l'ensemble $\bar{I}$ ont alors une production nulle à l'équilibre.

Soit $i \in \bar{I}$. Par définition de $\bar{I}$, nous avons :

$$\alpha_i \geq p(Q(\alpha^{(t)})) \quad \text{où} \quad \alpha^{(t)} = \sum_{j \in I^{(t)}} \alpha_j.$$

Puisque $I^* \subseteq I^{(t)}$, nous avons $\alpha^* \leq \alpha^{(t)}$. Par le lemme 12, nous en concluons que $Q^* \geq Q(\alpha^{(t)})$ qui implique que :

$$\begin{aligned} p(Q^*) &\leq p(Q(\alpha^{(t)})), \\ &\Rightarrow \alpha_i \geq p(Q^*), \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ la production de la firme i est nulle à l'équilibre.

Point 2

Soit $q^* \in S$. Les conditions (37) et (38) sont alors nécessaires et suffisantes pour que q_i^* soit solution du problème de maximisation concave ⁽⁵⁾ (36) avec :

$$y_i = Q^* - q_i^* = \sum_{\substack{j \in I \\ j \neq i}} q_j^*.$$

⁽⁵⁾ La concavité de la fonction $q_i p(q_i + y_i)$ pour y_i fixé, fait l'objet du lemme 1 de l'article de Murphy et al. [5].

Le vecteur q^* constitue donc une solution d'équilibre et S constitue l'ensemble des solutions d'équilibre. ●

Lorsque la fonction $p(\cdot)$ est dérivable, les preuves et l'algorithme se simplifient considérablement. Nous avons en effet :

$$\begin{aligned} \forall i \in I^*, \quad q_i^* p'(Q^*) + p(Q^*) &= \alpha_i, \\ \Rightarrow \sum_{i \in I^*} q_i^* p'(Q^*) + N^* p(Q^*) &= \alpha^*, \\ \Rightarrow \frac{d}{dQ} Qp(Q) + (N^* - 1) \int_0^Q p(t) dt - \alpha^* Q \Big|_{Q=Q^*} &= 0, \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 11.

A l'étape 3 de l'algorithme A 4, q_i^* est donné par la formule :

$$q_i^* = \frac{\alpha_i^* - p(Q^*)}{p'(Q^*)} \quad \text{si } i \in I^*$$

et $q_i^* = 0$ sinon.

Exemple numérique :

$$N=4, \quad \alpha_1=1, \quad \alpha_2=3, \quad \alpha_3=3, \quad \alpha_4=5,$$

$$p(Q) = \begin{cases} 6 - \frac{Q}{2}, & 0 \leq Q \leq 4, \\ 12 - 2Q, & 4 \leq Q. \end{cases}$$

1^{re} itération :

$I = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha = 12$, $Q(\alpha)$ est obtenu en résolvant :

$$\begin{aligned} Np(Q) + Qp^-(Q) &\geq \alpha, \\ Np(Q) + Qp^+(Q) &\leq \alpha. \end{aligned}$$

Or :

$$\left. \begin{aligned} 4p(4) + 4p^-(4) &= 14 \geq 12 \\ 4p(4) + 4p^+(4) &= 8 \leq 12 \end{aligned} \right\} \Rightarrow Q(12) = 4 \quad \text{et} \quad p(4) = 4,$$

$$\alpha_4 \geq p(4) \Rightarrow \bar{I} = \{4\},$$

$$I \leftarrow \{1, 2, 3\}.$$

2^e itération :

$$\begin{aligned} \alpha &= 7, \quad Q(7) = 4, \quad p(4) = 4, \quad \bar{I} = \emptyset, \\ Q^* &\leftarrow 4, \quad \alpha^* \leftarrow 7. \end{aligned}$$

Nous devons donc résoudre $p(4) + q_i p^-(4) \geq \alpha_i$, $p(4) + q_i p^+(4) \leq \alpha_i$.

$$\Rightarrow q_i \in \left[\frac{3}{2}, 6 \right] = J_1,$$

$$q_2 \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right] = J_2,$$

$$q_3 \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right] = J_3,$$

$$q_4 \in \{0\} = J_4.$$

Toute solution est donnée par un quadruplet (q_1, q_2, q_3, q_4) où $q_i \in J_i$, $i = 1, 2, 3, 4$ et $\sum_{i=1}^4 q_i = 4$. Par exemple :

$$q_1 = 2, \quad q_2 = 3/2, \quad q_3 = 1/2, \quad q_4 = 0.$$

En dépit de leurs fonctions de coûts identiques, les firmes 2 et 3 possèdent des niveaux de production distincts ce qui ne pourrait se produire si les fonctions étaient différentiables.

6. CONCLUSIONS. EXTENSIONS DU MODÈLE

Dans cet article, nous avons étendu et obtenu de nouveaux résultats concernant la recherche de l'état d'équilibre d'un marché de producteurs en état de concurrence imparfaite (oligopole). Dépendant des formes des fonctions d'offre et de demande, différents algorithmes ont été obtenus. Nous pouvons donc résumer la situation à l'aide du tableau suivant.

CONDITIONS	ALGORITHME
$p(\cdot)$ décroissante, $Qp(Q)$ concave, $f_i(\cdot)$ convexes.	Murphy <i>et al.</i>
$p(\cdot)$ convexe, $Qp(Q)$ concave, f_i convexes.	Problème variationnel : Algorithmes de projection, heuristique (pseudo-directions de descente), Jacobi.
$p(\cdot)$ décroissante, $p(\cdot)$ concave, $f_i(\cdot)$ croissantes.	Élimination progressive des variables négatives ou résolution de l'équation unidimensionnelle $\gamma(Q) = 0$.
$p(\cdot)$ linéaire, $f_i(\cdot)$ linéaires.	Élimination progressive des variables négatives (cas particulier du cas précédent).
$p(\cdot)$ non-différentiable, $f_i(\cdot)$ linéaires.	Algorithme A 4.

Les différents algorithmes seront testés numériquement dans un proche avenir. Nous pouvons cependant affirmer dès maintenant que les algorithmes adaptés à des cas particuliers (algorithme A 2, par exemple) sont plus efficaces qu'un algorithme général tel que l'algorithme A 3.

Les extensions suivantes du modèle seront également étudiées. Dans un ordre croissant de complexité, nous pouvons indiquer :

1. Une demande étalée sur plusieurs marchés (pour un seul produit).
2. Plusieurs produits et plusieurs marchés de demande.
3. Intégration d'un réseau de transport (possiblement avec congestion) entre les producteurs et les consommateurs.

BIBLIOGRAPHIE

1. A. AUSLENDER, *Optimisation, méthodes numériques*, Masson, 1976.
2. G. CHOQUET, *Cours d'analyse*, tome II, topologie, Masson, 1969.
3. C. E. LEMKE et J. T. HOWSON, *Equilibrium Points of Bimatrix Games*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 12, 1964, p. 413-423.
4. P. MARCOTTE, *Design optimal d'un réseau de transport en présence d'effets de congestion*. Thèse de Ph. D. en informatique, département d'informatique et de recherche opérationnelle, Université de Montréal, 1981.
5. F. H. MURPHY, H. D. SHERALI et A. L. SOYSTER, *A Mathematical Programming Approach for Determining Oligopolistic Market Equilibrium*, Mathematical Programming, vol. 24, 1982, p. 92-106.
6. H. SCARF, *The Computation of Economic Equilibria*, Coles Foundation Monograph, vol. 24, 1973.
7. J. F. SHAPIRO, *Mathematical Programming: Structures and Algorithms*, John Wiley and Sons, 1979.
8. G. F. SIMMONS, *Introduction to Topology and Modern Analysis*, McGraw-Hill, 1963.
9. F. SZIDAROVSKY et S. YAKOWITZ, *A New Proof of the Existence and Uniqueness of the Cournot Equilibrium*, International Economic Review, vol. 18, 1977, p. 787-789.