RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

JACQUES CARLIER

Le problème de l’ordonnancement des paiements de dettes

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 18, nº 1 (1984), p. 43-57
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1984__18_1_43_0>

© AFCET, 1984, tous droits réservés.

L’accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l’accord avec les conditions générales d’utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d’une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 18, n° 1, février 1984, p. 43 à 57)

UNIVERSITE PAUL SABATIER
LABORATOIRE DE STATISTIQUE ET PROBABILITES
118, ROUTE DE NARBONNE
31062 TOULOUSE CEDEX

LE PROBLÈME DE L'ORDONNANCEMENT DES PAIEMENTS DE DETTES (*)

par Jacques CARLIER (1)

Résumé. — *Dans cet article, nous modélisons un problème de paiements de dettes entre personnes à l'aide d'un graphe dont les sommets sont associés aux personnes et les arcs aux dettes.*

Nous montrons d'abord que si l'on ajoute la contrainte imposant que chaque dette soit payée en une fois, le problème devient NP-difficile.

Nous énonçons ensuite une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution du problème initial, et, proposons un algorithme déterminant une solution. Cet algorithme qui est fondé sur la décomposition d'un flot dans un réseau de transport a pour complexité $O(n^3)$ *si n est le nombre de personnes.*

Nous montrons enfin que dans le cas où il n'existe pas de solution, le problème de la minimisation de la somme des impayés se ramène à un problème de flot à coût minimal alors que le problème de la minimisation du nombre de personnes en faillite est NP-difficile.

Abstract. — *In this paper, we modelize a problem of payments of debts between persons, by a graph the nodes of which are associated to the persons and the arcs to the debts.*

First, we show that, if we add the constrainst stating that every debt has to be paid in only one instalment, then the problem becomes NP-hard.

Then, we state a necessary and sufficient condition for the existence of a solution and propose an algorithm to determine one. This algorithm is based on the decomposition of a flow; its complexity is $O(n^3)$, *with n persons.*

At last, we show that, when some debts cannot be paid, the minimization of the unpaid debts is a problem of flow with minimum cost, and: the minimization of the number of bankrupts is a NP-hard problem.

Keywords: Scheduling, polynomial time algorithm, *NP* complete problem.

I. INTRODUCTION

Nous étudions dans cet article le problème de paiements de dettes entre personnes — physiques ou morales. Nous supposons que chaque personne dispose initialement d'un certain capital et a des dettes et des créances envers d'autres personnes.

Mots clés : Ordonnancement, algorithme polynomial, problème *NP*-complet.

(*) Reçu novembre 1982.

(1) Université Pierre-et-Marie-Curie, Paris-VI, U.E.R. 50, Institut de Programmation, Tour 55-65, 4, place Jussieu, 75230 Paris Cedex 05.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/1984/43/$ 5.00
© AFCET-Bordas-Dunod

Un paiement partiel d'une dette par un débiteur à un créancier est « admissible » si la somme payée par le débiteur est inférieure à son capital et à sa dette envers le créancier.

Chaque dette est donc une tâche morcelable utilisant une ressource consommable, l'argent [2, 4, 8]; nous devons déterminer un ordonnancement de ces tâches [7].

Nous modélisons ce problème à l'aide d'un graphe dont les sommets sont associés aux personnes et les arcs aux dettes et l'illustrons à l'aide d'un exemple.

Nous prouvons que le problème devient NP-complet si nous ajoutons la contrainte imposant que les dettes soient payées en une seule fois.

Pour les cas qui autorisent les paiements morcelés, nous énonçons une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution, puis présentons le schéma de la méthode de résolution et enfin l'algorithme. La complexité de cette méthode est $O(n^3)$ si n est le nombre de personnes.

Nous montrons enfin que lorsqu'il n'existe pas de solution, le problème de la minimisation de la somme des impayés se ramène à un problème de flot à coût minimal alors que le problème de la minimisation du nombre de personnes en faillite est NP-difficile.

II. MODÉLISATION

Graphe

L'état financier du système peut être modélisé à l'aide d'un graphe doublement valué $G=(X, U, a, s)$ où X est l'ensemble des personnes et U l'ensemble des couples (x_i, x_j) tels que x_i ait une dette envers x_j; le sommet x_i est valué par le capital initial a_i de x_i; l'arc (x_i, x_j) est valué par la dette s_{ij} de x_i envers x_j (*fig.* 1). a désigne donc l'ensemble des capitaux des différentes personnes et s, celui des dettes.

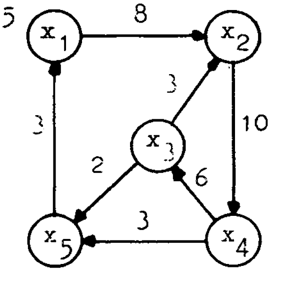

Figure 1. — Graphe.

Paiements de dettes

Le paiement partiel d'une dette est un triplet (x_i, x_j, g) tel que g soit inférieure à la dette s_{ij} de x_i envers x_j (x_i paye alors la somme g à x_j).

Une suite de paiements partiels $(x_{i_1}, x_{j_1}, g_1), (x_{i_2}, x_{j_2}, g_2), \ldots, (x_{i_r}, x_{j_r}, g_r)$ est admissible si :

– pour $1 \leqq p \leqq r$, le capital t_i^p de toute personne x_i après le p-ième paiement est positif; donc $t_i^0 = a_i$ et pour p strictement positif :
$t_i^p = t_i^{p-1}$ si i est différent de i_p et de j_p; $t_i^p = t_i^{p-1} + g_p$ si i est égal à j_p; $t_i^p = t_i^{p-1} - g_p$ si i est égal à i_p;

– la somme des paiements partiels de x_i à x_j est inférieure ou égale à la dette globale de x_i envers x_j.

Une suite de paiements partiels admissible est une solution si les dettes sont toutes payées exactement.

Exemple

La figure 2 (page suivante), rapporte les graphes associés à une suite de paiements admissible pour l'exemple de la figure 1. Initialement 5 est le capital de la personne x_1, les autres capitaux étant nuls; on effectue les paiements successifs : $(x_1, x_2, 5)$, $(x_2, x_4, 5)$, $(x_4, x_3, 5)$, $(x_3, x_2, 3)$, $(x_2, x_4, 3)$, $(x_4, x_5, 3)$, $(x_5, x_1, 3)$, $(x_1, x_2, 3)$, $(x_2, x_4, 2)$, $(x_4, x_3, 1)$, $(x_3, x_5, 2)$.

III. PROBLÈMES DE PAIEMENTS DE DETTES NON MORCELABLES

Dans ce paragraphe, nous ajoutons la contrainte imposant que les paiements de dettes entre deux personnes données se fassent en une seule fois.

***NP*-completude au sens faible**

Le problème de l'existence d'une solution est *NP*-complet au sens faible [5]. Pour le prouver, nous considérons le problème de la partition qui est connu comme *NP*-complet :
étant donné m nombres $a_1, a_2, \ldots, a_m$ dont la somme est égale à $2T$, est-il possible de séparer ces nombres en deux parties disjointes (les indices étant alors partitionnés en I_1 et I_2) de telle sorte que :

$$\sum_{i \in I_1} a_i = \sum_{i \in I_2} a_i = T ?$$

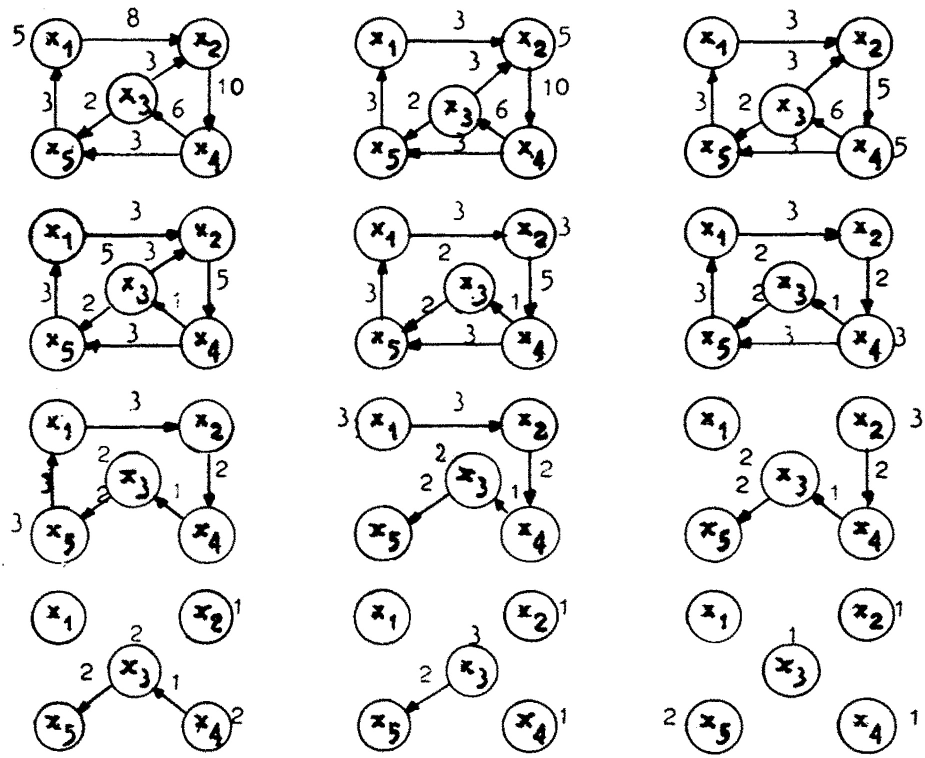

Figure 2. — Graphes associés à une solution.

Nous lui associons le problème de paiements de dettes décrit sur la figure 3 qui a une solution si et seulement si le problème de la partition en admet une.

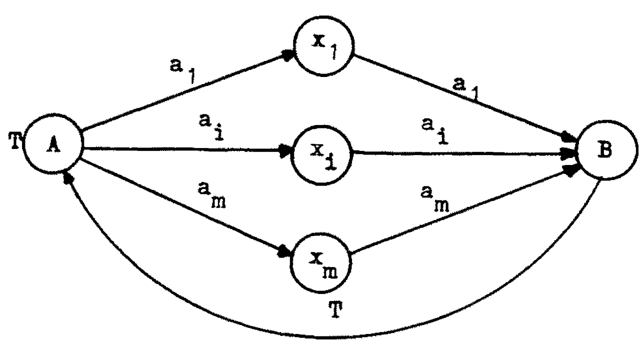

Figure 3. — Problème de paiements de dettes associé au problème de la partition.

En effet, si cette partition existe, on pourra d'abord effectuer les paiements de dettes (A, x_i, a_i) puis (x_i, B, a_i) pour $i \in I_1$, puis (B, A, T). Lors d'un « second tour » on effectuera les paiements (A, x_i, a_i) puis (x_i, B, a_i) pour $i \in I_2$: alors toutes les dettes sont éteintes et B possède la somme T.

Réciproquement, supposons qu'une suite de paiements admissible existe; la somme T part de A vers un sous-ensemble de sommets $\{x_i / i \in I_1\}$; puis nécessairement la somme reçue en chacun de ces sommets repart vers B qui possède alors T, lui permettant ensuite de régler sa dette envers A. On a donc

$$\sum_{i \in I_1} a_i = T.$$

NP-completude au sens fort

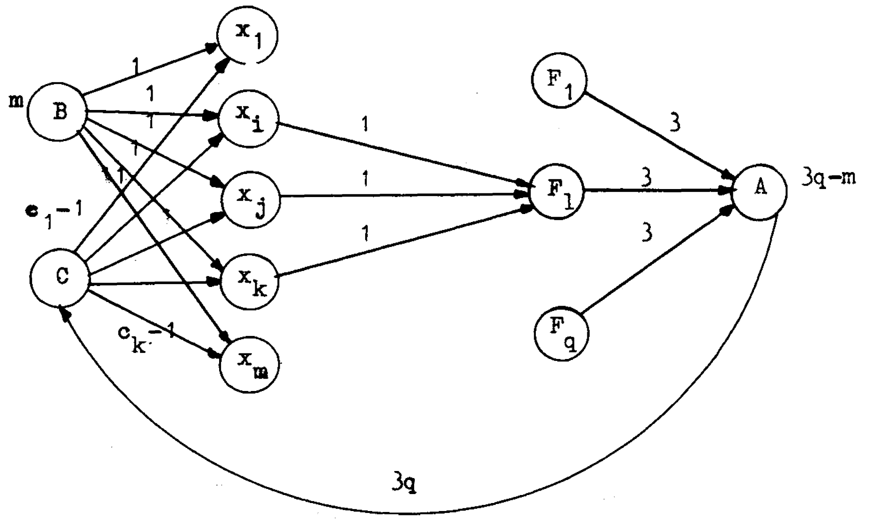

Figure 4. — Problème de paiements de dettes associé au problème du partitionnement.

Le problème de l'existence d'une solution est aussi *NP*-complet au sens fort. Pour le prouver, nous considérons le problème suivant : étant donné q sous-ensembles à trois éléments $F_1, F_2, \ldots, F_q$ de l'ensemble $E = \{1, 2, \ldots, m\}$, existe-t-il une partie I_1 de ces q sous-ensembles formant une partition de E ? Ce problème de partitionnement est *NP*-complet au sens fort [5]. Nous lui associons le problème de paiements de dettes décrit sur la figure 4 : dans le graphe correspondant, on a un arc entre x_i et F_l si i appartient à F_l; c_i est le nombre de sous-ensembles contenant i; initialement, le capital de A est $3q\text{-}m$, celui de B, m.

Le problème de paiement a une solution si et seulement si le problème de partitionnement en a une. En effet, si une partition I_1 existe, on peut d'abord effectuer les paiements $(B, x_i, 1)$ pour $1 \leqq i \leqq m$, puis les paiements $(x_i, F_l, 1)$ pour $l \in I_1$, puis $(F_l, A, 3)$ pour $l \in I_1$, ensuite $(A, C, 3q)$. Lors d'un « second tour », les autres paiements peuvent être effectués. Réciproquement, supposons qu'une suite de paiements admissible existe : la somme m qui part de B atteint A avant le paiement de la dette $(A, C, 3q)$; l'ensemble I_1 des l tels que la dette $(F_l, A, 3)$ soit payée antérieurement à $(A, C, 3q)$ est une partition de E.

IV. CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTED'EXISTENCE D'UNE SOLUTION

Nous revenons au cas où une dette peut être réglée en plusieurs fois. Nous notons D_i la somme des dettes initiales de x_i diminuée de la somme des créances initiales de x_i :

$$D_i = \sum_{x_j \in \Gamma^+(x_i)} s_{ij} - \sum_{x_k \in \Gamma^-(x_i)} s_{ki} \text{ (2)}.$$

D_i, s'il est positif, représente le « passif » de x_i; s'il est négatif, l'opposé de l'« actif »; il ne peut y avoir de solution au problème si ce passif est strictement supérieur au capital initial de x_i, a_i; nous supposons donc dans les paragraphes IV, V et VI que D_i est inférieur à a_i pour tout i.

Réseau de transport et flot

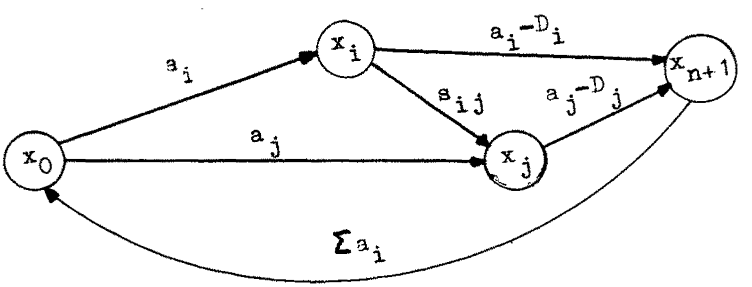

Figure 5. — Réseau de transport $H=(Y, V)$ et flot associé.

Nous associons au problème le réseau de transport $H=(Y, V)$ (*fig.* 5); Y est obtenu en adjoignant à X les sommets x_0 et x_{n+1}; V est défini par :

$$V = U \cup \{(x_0, x_i)/x_i \in X\} \cup \{(x_i, x_{n+1})/x_i \in X\} \cup \{(x_{n+1}, x_0)\};$$

les capacités des arcs sont infinies.

(2) $\Gamma^+(x_i)$ [resp. : $\Gamma^-(x_i)$] est l'ensemble des successeurs (resp. : prédécesseurs) de x_i dans le graphe $G=(X, U)$.

Nous définissons un flot f sur ce réseau par : $f_{0i}=a_i, f_{i,\,n+1}=a_i-D_i, f_{ij}=s_{ij}$,

$f_{0,\,n+1}=\sum_{x_i\in X} a_i$

f est un flot entier positif; la conservation du flux est satisfaite en chaque sommet :

— en x_0 : $\sum_{x_i\in X} a_i=\sum_{x_i\in X} a_i$;

— en x_i : $a_i+\sum_{x_k\in\Gamma^-(x_i)} s_{ki}=\sum_{x_j\in\Gamma^+(x_i)} s_{ij}+a_i-D_i$, du fait de la définition de D_i;

— en x_{n+1} : $\sum_{x_i\in X}(a_i-D_i)=\sum_{x_i\in X} a_i-\sum_{x_i\in X} D_i=\sum_{x_i\in X} a_i$,

car la somme des D_i est nulle.

Nous énonçons maintenant une condition nécessaire et suffisante d'existence d'une solution.

THÉORÈME : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution est que :*

(i) $D_i\leqq a_i$, *pour tout* x_i *de* X;

(ii) *aux sommets isolés près, le réseau de transport* H' *déduit de* H *en supprimant les arcs de flux nuls est connexe.*

Démonstration

Les conditions sont nécessaires

Nous avons remarqué au début du paragraphe que nécessairement $D_i\leqq a_i$.

Initialement, tout l'argent ($\sum_i a_i$ supposé positif strictement) est en x_0 (banque des capitaux initiaux); toute succession admissible de paiements correspond à un ensemble de chemins d'origine x_0 puisqu'une somme ne peut se trouver en un point que si elle s'y trouvait au départ ou si elle y a été acheminée par des points intermédiaires. Soit x_i un point non isolé dans H' : ou bien, il existe l'arc$(x_0,\ x_i)$; ou bien, il existe x_j tel que s_{ij} ou s_{ji} n'est pas nul et le paiement s_{ij} ou s_{ji} ainsi que les points x_i et x_j sont sur un chemin amenant l'argent depuis x_0; ou bien, il existe l'arc$(x_i,\ x_{n+1})$ qui complété par l'arc$(x_{n+1},\ x_0)$ de H' constitue un chemin de x_i à x_0. Tout point non isolé est relié à x_0 par un chemin; H' est donc connexe. H' est alors également fortement connexe (aux sommets isolés près) car f est un flot entier strictement positif sur H' [1], [6].

Les conditions sont suffisantes

La démonstration est assurée par la présentation d'un algorithme construisant une solution quand les conditions (i) et (ii) sont satisfaites ainsi que par la preuve de cet algorithme (paragraphes V et VI).

COROLLAIRE : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe une solution est que :*

(i) $D_i \leqq a_i$, *pour tout* x_i *de* X;

(ii) *pour chaque sommet* x_i *non isolé de* X, *il existe dans le graphe* $G=(X, U)$ *un ascendant* x_{i_0} *de* x_i *sont le capital initial* a_{i_0} *est strictement positif.*

V. SCHÉMA DE LA MÉTHODE DE RÉSOLUTION

Analyse de l'exemple

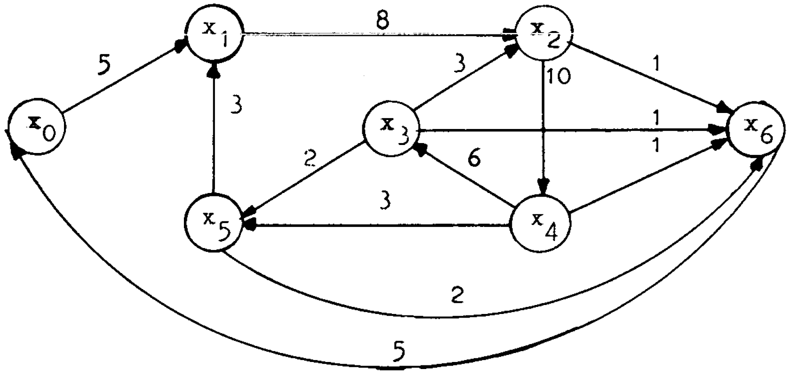

Figure 6. — Réseau de transport H' **et flot associés à l'exemple.**

Nous décomposons le flot associé à l'exemple (*fig.* 6) sur une base de circuits élémentaires :

$$f=\mu_1+\mu_2+2\,\mu_3+\mu_4+3\,\mu_5+3\,\mu_6=\sum c_l\,\mu_l,$$

avec :

$$\mu_1=[x_0, x_1, x_2, x_6, x_0], \qquad \mu_2=[x_0, x_1, x_2, x_4, x_6, x_0],$$

$$\mu_3=[x_0, x_1, x_2, x_4, x_3, x_5, x_6, x_0], \qquad \mu_4=[x_0, x_1, x_2, x_4, x_3, x_6, x_0],$$

$$\mu_5=[x_2, x_4, x_3, x_2], \qquad \mu_6=[x_2, x_4, x_5, x_1, x_2].$$

Le circuit μ_1 passe par l'arc (x_6, x_0); il lui correspond le paiement $(x_1, x_2, 1)$. Au circuit μ_3 correspond la suite de paiements de dettes : $(x_1, x_2, 2), (x_2, x_4, 2), (x_4, x_3, 2), (x_3, x_5, 2)$.

Généralement, à tout circuit $\mu_l=[x_{i_0}, \ldots, x_{i_{r+1}}, x_{i_0}]$ passant par l'arc (x_{n+1}, x_0) avec $x_{i_0}=x_0$ et $x_{i_{r+1}}=x_{n+1}$ correspond la suite de paiements de dettes : $(x_{i_1}, x_{i_2}, c_l), (x_{i_2}, x_{i_3}, c_l), \ldots, (x_{i_{r-1}}, x_{i_r}, c_l)$; cette suite de paiements de dettes est admissible car la somme c_l disponible initialement en x_{i_1}, peut être transféré en x_{i_2}, puis en $x_{i_3}, \ldots$, jusqu'à x_{i_r}.

Si tous les circuits μ_l passent par l'arc (x_{n+1}, x_0), alors : $f=\sum \mu'_l$ avec $\mu'_l=c_l\,\mu_l$; on associe à chaque μ'_l une suite de paiements admissible. On aura une solution du problème, car ces paiements peuvent se faire indépendamment les uns des autres.

Sur cet exemple, il n'en est pas ainsi; en effet, les circuits μ_5 et μ_6 ne passent pas par l'arc (x_{n+1}, x_0); dans ce cas, on va construire *un circuit non élémentaire valué que l'on nommera « circuit généralisé de paiement » en « greffant »*, par exemple, μ_5 et μ_6 sur μ_3 aux sommets x_2 et x_4 (*fig.* 7). A ce circuit généralisé correspond la suite de paiements de dettes :

$(x_1, x_2, 2), (x_2, x_4, 2), (x_4, x_3, 2), (x_3, x_2, 2), (x_2, x_4, 1), (x_4, x_3, 1), (x_3, x_2, 1), (x_2, x_4, 2), (x_4, x_5, 2), (x_5, x_1, 2), (x_1, x_2, 2), (x_2, x_4, 2), (x_4, x_5, 1), (x_5, x_1, 1), (x_1, x_2, 1), (x_2, x_4, 1), (x_4, x_3, 2), (x_3, x_5, 2)$,.

Dans le cas général, on greffera successivement, tous les circuits ne passant pas par l'arc (x_{n+1}, x_0); tous ces circuits pourront être greffés du fait de la connexité du graphe. On obtiendra une famille de circuits généralisés auquel correspondra des suites de paiements admissibles qui globalement formeront une solution.

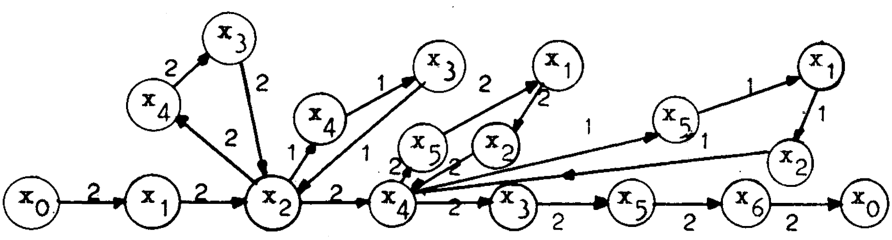

Figure 7. — Un circuit généralisé de paiement.

Circuit généralisé de paiement

Un circuit généralisé de paiement d'un réseau de transport h est un circuit $[x_{i_0}, \ldots, x_{i_{r+1}}, x_{i_0}]$ de H dont les arcs sont valués par $g_{01}, g_{12}, \ldots, g_{r,r+1}, g_{r+1,0}=g_{01}$ tel que :

(i) $x_{i_0}=x_0$, $x_{i_{r+1}}=x_{n+1}$, avec : $x_{i_k}\neq x_0, x_{n+1}$ pour $1\leqq k\leqq r$;

(ii) $t_i^p \geqq 0, 0 \leqq p \leqq r-1, 1 \leqq i \leqq n$, où t_i^p (capital en x_i après le p-ième paiement) est défini par :

$$t_{i_1}^0 = g_{01} \quad \text{et} \quad t_i^0 = 0 \quad \text{pour} \quad x_i \neq x_{i_1};$$

et pour p strictement positif :

$$t_i^p = t_i^{p-1} \quad \text{si} \quad x_i \neq x_{i_p} \quad \text{et} \quad x_i \neq x_{i_{p+1}}; \quad t_i^p = t_i^{p-1} + g_{p,\, p+1}$$
$$\text{si} \quad x_i = x_{i_{p+1}}; \quad t_i^p = t_i^{p-1} - g_{p,\, p+1} \quad \text{si} \quad x_i = x_{i_p};$$

(iii) $t_{i_r}^{r-1} = g_{01}$.

LEMME : *Si la somme d'argent g_{01} est disponible initialement en x_{i_1}, la suite de paiements $(x_{i_1}, x_{i_2}, g_{12}) \ldots (x_{i_{r-1}}, x_{i_r}, g_{r-1,\, r})$ est admissible; elle permet de transférer la somme d'argent g_{01} du sommet x_{i_1} au sommet x_{i_r}.*

Démonstration : On montre par récurrence sur p que t_i^p est la somme d'argent dont dispose x_i après le p-ième paiement.

La propriété est vraie pour $p=0$; initialement, le capital de x_{i_1} est g_{01} alors que les autres capitaux sont nuls : $t_{i_1}^0 = g_{01}$ et $t_i^0 = 0$ pour $x_i \neq x_{i_1}$.

Supposons la propriété vraie à l'ordre $p-1$; le p-ième paiement est $(x_{i_p}, x_{i_{p+1}}, g_{p,\, p+1})$. Alors, t_i^p est la somme d'argent disponible en x_i après le p-ième paiement : $t_i^p = t_i^{p-1}$ si $x_i \neq x_{i_p}$ et $x_i \neq x_{i_{p+1}}$; $t_i^p = t_i^{p-1} + g_{p,\, p+1}$ si $x_i = x_{i_{p+1}}$; $t_i^p = t_i^{p-1} - g_{p,\, p+1}$ si $x_i = x_{i_p}$. Le p-ième paiement est admissible car t_i^p reste positif pour tout i.

Après le dernier paiement, on a : $t_{i_r}^{r-1} = g_{01}$; la somme d'argent g_{01} est donc disponible en x_{i_r}. Les autres capitaux sont nuls car $\sum_i t_i^p$ est un invariant égal à g_{01}, et, parce que les autres capitaux sont positifs ou nuls.

Organisation de la greffe d'un circuit sur un circuit généralisé

Soient μ_1 un circuit généralisé, et, μ un circuit ne passant pas par l'arc (x_{n+1}, x_0) mais ayant un sommet commun x_i avec μ_1 : $\mu_1 = [x_{i_0}, \ldots, x_{i_{r+1}}, x_{i_0}]$ et il existe k tel que $x_{i_k} = x_i$, où x_i est un sommet du circuit μ; on note c le coefficient de μ sur la base de circuits et $h = t_i^{k-1}$ la somme disponible en x_i après le k-1-ième paiement associé au circuit généralisé μ_1.

Nous nous proposons de greffer le circuit μ sur le circuit généralisé μ_1 et écrivons dans ce but la division entière de c par h : $c = hq + v$ avec $0 < v \leqq h$ (le lecteur remarquera qu'il ne s'agit pas de la division euclidienne usuelle).

Le lecteur pourra vérifier que le circuit μ'_1 est encore un circuit généralisé :

$$\mu'_1=[x_{i_0}, x_{i_1}, \ldots, x_{i_{k-1}}, \underbrace{\mu, \mu, \ldots, \mu}_{q+1 \text{ fois le circuit}}, x_{i_{k+1}}, \ldots, x_{i_{r+1}}, x_{i_0}];$$

le circuit μ est répété $q+1$ fois, la valuation des q premiers circuits μ étant h, celle du dernier circuit μ, v; on remarquera que la plus grande de ces deux valuations de μ est $\min(c, h)$ (*fig.* 8).

REMARQUE : Le nombre q apparaissant lors de la greffe peut être un nombre très grand, ce qui risque de rendre la solution non polynomiale; toutefois l'algorithme restera polynomial car un circuit généralisé sera codé de façon implicite : on précisera pour un circuit μ ne passant pas par l'arc $(x_{n+1,} x_0)$ sur quel circuit μ_1 et en quel sommet x_i il est greffé.

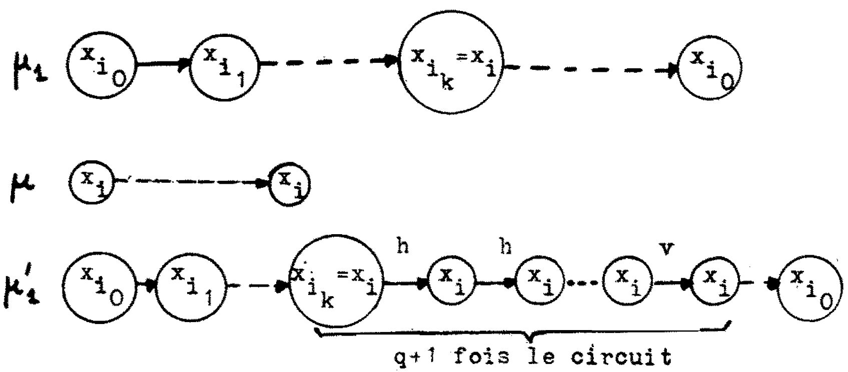

Figure 8. — Greffe de μ sur μ_1.

VI. ALGORITHME

Phase 1

Décomposer le flot f sur une base de circuits élémentaires : $f=\sum c_l \mu_l$.

Phase 2

Décomposer le flot f comme une somme de circuits généralisés : $f=\sum \mu'_l$.

Phase 1 : décomposition du flot sur une base de circuits :

(i) Soit (x_{i_0}, x_{i_1}) un arc ayant un flux non nul; poser $k=1$.

(ii) Soit $x_{i_{k+1}}$ un sommet tel qu'il passe un flux non nul par l'arc $(x_{i_k}, x_{i_{k+1}})$; poser $k=k+1$ et aller en (iii).

(iii) Si x_{i_k} est un sommet n'appartenant pas au chemin $[x_{i_0}, \ldots, x_{i_{k-1}}]$, retourner en (ii); sinon déterminer r tel que $x_{i_k} = x_{i_r}$.

(iv) $[x_{i_r}, \ldots, x_{i_k}]$ est un circuit μ du réseau de transport; déterminer le plus petit flux c des arcs de ce circuit; stocker c et μ; poser : $f := f - c\,\mu$; si f est nul, Fin; si $x_{i_r} \neq x_{i_0}$, poser $k = r$ et aller en (ii); sinon, aller en (i).

Proposition 1 : *La phase* 1 *décompose le flot sur une base de circuits en* $O(nm)$ *opérations.*

Démonstration : Quand on est en (i), il existe un arc (x_{i_0}, x_{i_1}) car le flot est non nul; quand on est en (ii), il existe un sommet $x_{i_{k+1}}$, car le chemin $[x_{i_0}, \ldots, x_{i_k}]$ est élémentaire, et, du fait de la conservation du flux appliquée au sommet x_{i_k} : le flux entrant en x_{i_k} étant non nul, il en est de même du flux sortant de x_{i_k}.

A chaque itération, on annule le flux sur au moins un arc de ce réseau; si m est le nombre d'arcs, il y aura au plus m itérations. La complexité de (ii) est $O(1)$ si le réseau est codé par la file des successeurs; (ii) est exécuté au plus n fois à chaque itération. La complexité de (iii) est $O(1)$; (iii) est exécuté au plus n fois lors de chaque itération. La complexité de (iv) est $O(n)$; (iv) est exécuté une fois lors de chaque itération, la complexité de cet algorithme est donc $O(nm)$ (s'il est codé avec soin...).

Phase 2 : greffe de circuits.

La phase 1 a permis de décomposer le flot sur une base de circuits : $f = \sum c_l \mu_l$; la phase 2 permet de calculer, pour chaque circuit μ de cette décomposition ne passant pas par l'arc (x_{n+1}, x_0), le sommet x_i et le circuit $\mu(x_i)$ sur lequel sera greffé le circuit μ; L_{x_i} désignera l'ensemble des circuits qui sont greffés en x_i; pour chaque sommet x_i, $\mu(x_i)$ est choisi de telle sorte que $h(x_i)$, somme d'argent disponible en x_i, soit maximale.

(i) Déterminer l'ensemble C des circuits de la décomposition passant par l'arc (x_{n+1}, x_0) et l'ensemble $\overline{C}$ des circuits ne passant pas par l'arc (x_{n+1}, x_0).

(ii) Déterminer l'ensemble Y des sommets empruntés par les circuits de C; choisir, pour chaque élément x_i de Y, un circuit $\mu(x_i)$ de C passant par x_i tel que $h(x_i)$, somme d'argent disponible en x_i, soit maximale ($h(x_i)$ est ici le coefficient de $\mu(x_i)$ dans la décomposition sur la base). Ordonner Y dans l'ordre des $h(x_i)$ décroissants (on parlera de la liste Y).

(iii) Pour chaque circuit μ de $\overline{C}$, calculer la fonction indicatrice de l'ensemble des sommets de μ : $1_\mu(x_i) = 1$ si x_i appartient à μ, $1_\mu(x_i) = 0$ sinon.

(iv) Déterminer le premier sommet x_i de Y (rappelons que Y est ordonné) appartenant à un circuit μ de $\overline{C}$; inclure le circuit μ dans l'ensemble L_{x_i} des circuits greffés en x_i et dans l'ensemble C; retirer μ de l'ensemble $\overline{C}$.

(v) *Mise à jour de la liste Y*

Déterminer l'ensemble Y' des sommets de μ (on peut greffer, lors d'une itération ultérieure, des circuits sur les sommets de μ) et v le minimum de $h(x_i)$ et du coefficient c de μ sur la base.

Réunir la liste Y et l'ensemble Y' en posant : $Y := Y \cup Y'$; pour $x_k \in \overline{Y} \cap Y'$, $h(x_k) := v$, $\mu(x_k) := \mu$; pour $x_k \in Y \cap Y'$ et si $v > h(x_k)$, $h(x_k) := v$, $\mu(x_k) := \mu$. Retourner en (iv) si $\overline{C}$ est non vide; Fin.

PROPOSITION 2 : *La complexité de la phase 2 est $O(nm)$.*

Démonstration : Il y a au plus m circuits dans la base; ces circuits étant élémentaires, leurs parcours dans (i) coûte $O(nm)$; (ii) et (iii) coûte $O(nm)$ pour la même raison.

La liste Y et le calcul des fonctions indicatrices permet de faire au plus une fois, pour chaque sommet x_i de X et pour chaque circuit μ de $\overline{C}$, le test portant sur l'appartenance de x_i à μ. Ce test coûtant $O(1)$, le coût global sera $O(nm)$.

La mise à jour dans v de la liste Y coûte $O(n)$. Globalement v coûte $O(nm)$.

REMARQUE : On peut montrer que, pour une décomposition fixée du flot $f = \sum c_l \mu_l$, il est préférable de choisir x_i tel que $h(x_i)$ soit maximal.

PROPOSITION 3 : *Lorsque le graphe est connexe, tous les circuits qui ne passent pas par l'arc (x_{n+1}, x_0), sont greffés à la fin de la phase 2.*

Démonstration : Soient μ un circuit ne passant pas par l'arc (x_{n+1}, x_0) et x_i un sommet de μ; le sommet x_i n'étant pas isolé est relié à x_0 par une chaîne $[x_{i_0} = x_0, \ldots, x_{i_r} = x_i]$ élémentaire; $[x_{i_0}, x_{i_1}], \ldots, [x_{i_{r-1}}, x_{i_r}]$ appartiennent à des circuits $\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_r}$ de la base; μ_{j_2} pourra être greffé sur $\mu_{j_1}, \ldots, \mu_{j_r}$ sur $\mu_{j_{r-1}}$, et μ sur μ_{j_r}. On aura donc greffé μ à la fin de la phase 2.

PROPOSITION 4 : *A la famille de circuits généralisés définie à la fin de la phase 2 correspond une solution.*

Démonstration : Cette proposition est une conséquence du lemme du paragraphe V. Il en résulte la validité de l'algorithme; de plus, comme il a été annoncé, la condition du théorème énoncé au paragraphe III est bien suffisante.

VII. MINIMISATION DES FAILLITES ET DES IMPAYÉS

Nous supposons dans ce paragraphe que tout sommet x_i a un antécédent x_{i_0} avec $a_{i_0} > 0$, mais que la condition $D_i \leq a_i$ n'est pas satisfaite pour tout i : certaines dettes ne pourront pas être payées.

Nous envisageons deux objectifs : minimiser le nombre de personnes en faillite et minimiser la somme des impayés (c'est-à-dire le montant global des faillites).

PROPOSITION 5 : *Le problème de la minimisation du nombre de faillites est un problème NP-difficile.*

Démonstration : Pour le prouver, nous considérons le problème du partitionnement de l'ensemble $E=\{1, 2, \ldots, m\}$ avec q sous-ensembles donnés à l'avance $F_1, F_2, \ldots, F_q$ et lui associons le problème de paiements de dettes décrit sur la figure 9 : il y a un arc entre x_k et F_l si x_k appartient à F_l. Il y a exactement q-$m/3$ faillites au minimum; ce minimum est atteint si et seulement si le problème du partitionnement a une solution.

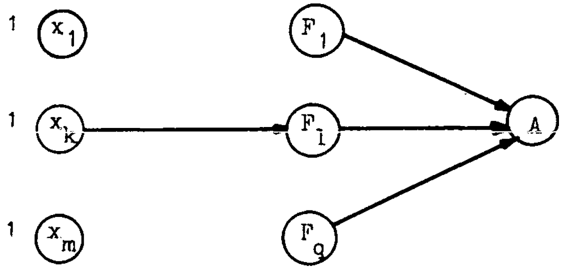

Figure 9. — Problème de paiements associé au problème du partitionnement.

PROPOSITION 6 : *Le problème de la minimisation de la somme des impayés se ramène à un problème de flot à coût minimal.*

Démonstration : Nous définissons un réseau de transport de la façon suivante : l'ensemble des sommets est X; l'ensemble des arcs est obtenu en ajoutant à U tous les arcs (x_j, x_i) si (x_i, x_j) est un arc de U; l'arc (x_i, x_j) a pour borne inférieure et capacité s_{ij} et un coût nul; l'arc (x_j, x_i) a pour borne inférieure 0 et pour capacité s_{ij} et un coût égal à 1.

Déterminer un flot de coût minimal sur ce réseau revient à minimiser la somme des impayés.

REMERCIEMENT

Je remercie le Professeur Bernard Lemaire pour l'aide qu'il m'a apportée lors de ce travail.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Berge, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. J. Carlier et A. H. G. Rinnooy Kan, *Financing and Scheduling*, Operations Research Letters, vol. 1, n° 2, avril 1982.
3. P. Chretienne, *Réseaux de Petri temporisés* (*Rapport de l'Institut de Programmation*, 1981).
4. M. Cramer et J. P. Ponssard, *Ordonnancements des mouvements de trésorerie*, *R.A.I.R.O.*, Recherche Opérationnelle, vol. 11, n° 4, novembre 1977, p. 393-404.
5. M. Garey et D. S. Johnson, *Computers and Intractability*, W. H. Freeman and Company, 1979.
6. M. Gondran et M. Minoux. *Graphes et algorithmes*, Dunod, Paris, 1980.
7. R. L. Graham, E. L. Lawler, J. K. Lenstra et A. H. G. Rinnooy Kan, *Optimization and Approximation in Deterministic Sequencing and Scheduling: a Survey*, Ann. Discrete. Math., 1979.
8. R. Slowinsky, *Multiobjective Network Scheduling with Efficient Use of Renewable and Non-Renewable Resources*, European Journal of Operational Research, vol. 5, 1980.