

MICHEL RIZZI

**Une nouvelle méthode d'aide à la décision
en avenir incertain**

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 16, n° 4 (1982),
p. 391-405

http://www.numdam.org/item?id=RO_1982__16_4_391_0

© AFCET, 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

UNE NOUVELLE MÉTHODE D'AIDE A LA DÉCISION EN AVENIR INCERTAIN (*)

par Michel RIZZI ⁽¹⁾

Résumé. — *Cet article présente une nouvelle méthode d'aide à la décision en avenir incertain. Cette méthode, qui s'inspire de travaux réalisés par Fourgeaud, Lenclud et Sentis, cherche à prendre en compte au mieux l'information sur l'avenir disponible auprès des experts. Une procédure de recueil de données a été élaborée dans ce but ; elle débouche sur la construction d'un domaine de plausibilité contenant toutes les mesures de probabilité (ou jeux de poids) admissibles à l'intérieur duquel on se place pour comparer les actions candidates.*

La méthode généralise ainsi les approches « objectiviste » et « subjectiviste » traditionnelles et permet de traiter des problèmes caractérisés par des niveaux d'incertitude très différents.

Mots clés : utilités conditionnelles ; mesures de probabilité admissibles ; domaine de plausibilité, utilités espérées multiples.

Abstract. — *This paper presents a new method for decision-making under uncertainty. This method, which derives from works of Fourgeaud, Lenclud, Sentis tries to take into account the whole information about the future available by experts. A data collection process has been elaborated to this end, leading to the construction of a plausibility area containing every allowable probability measure (or weighting) inside which the alternatives are compared.*

The method is thus a generalization of the traditional "objectivist" and "subjectivist" approaches and allows to deal with problems characterized by very different uncertainty levels.

Keywords: conditional utilities ; allowable probability measures ; plausibility area ; multiple expected utilities.

1. LES DÉCISIONS EN AVENIR INCERTAIN : CARACTÉRISTIQUES ET MISE EN FORME

1.1. Univers certain, aléatoire et incertain

Pour pouvoir comparer un ensemble A d'actions potentielles $a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_n$ en fonction d'un critère donné, il faut connaître pour chacune de ces actions son évaluation sur ce critère.

Lorsque les conséquences d'une action ne dépendent que de facteurs bien définis, cette procédure d'évaluation ne présente pas de difficulté. On est dans

(*) Reçu octobre 1981.

(1) Université de Paris IX-Dauphine, LAMSADE, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris Cedex 16.

ce cas en situation d'*univers certain*. Des décisions comme l'achat d'une voiture ou l'acceptation ou le refus d'un étudiant à un examen se rattachent à cette situation : les performances des modèles de véhicule en concurrence, les notes obtenues par l'étudiant sont connues avec certitude.

Dans d'autres cas, les paramètres intervenant dans le calcul des évaluations sont au contraire incertains mais leurs fluctuations peuvent être prévues dans une large mesure en faisant par exemple appel à des techniques d'échantillonnage. On parlera alors de décision en *univers aléatoire*. Un problème-type relevant de ce cas est la détermination du niveau optimal des stocks dans une entreprise : le caractère répétitif des opérations de déstockage fournit une base de données suffisante pour permettre d'évaluer chaque politique de gestion possible au moyen d'une distribution de probabilité.

Enfin, il existe des cas où la procédure d'évaluation met en jeu des paramètres incertains mais qu'il n'est plus possible cette fois de considérer comme des variables aléatoires en raison du manque d'information de nature statistique sur leurs fluctuations. On est ici en situation d'*univers (ou d'avenir) incertain*. D'une manière très générale, on peut dire que la plupart des décisions de caractère non répétitif et dont les effets se mesurent sur une longue période sont des décisions en avenir incertain : décisions d'investissement à long terme, choix de conditions d'exploitation, lancement de nouveaux produits, etc.

1.2. Formalisation d'un problème de décision en avenir incertain

Dans ce type de décision, comparer plusieurs actions oblige à considérer l'ensemble des *états de la nature* réalisables et à étudier leur comportement sur chacun de ces états. Un état de la nature est caractérisé par la description d'une situation future et par le cheminement des événements qui conduisent à cette situation. Or, la multiplicité des événements et de leurs combinaisons dans le temps fait que le nombre d'états de la nature envisageables est souvent très grand et parfois infini ; il est alors nécessaire de réduire cet ensemble à un petit nombre de *scénarios contrastés*, c'est-à-dire d'hypothèses générales d'évolution mutuellement exclusives que l'on notera $s_1, s_2, \dots, s_k, \dots, s_K$. On peut ensuite calculer les *utilités conditionnelles* $u_1(a_i), u_2(a_i), \dots, u_k(a_i), \dots, u_K(a_i)$ attachées à l'action a_i .

Exemple : Un industriel qui fabrique et commercialise un produit très spécialisé envisage d'étendre ses capacités de production afin de mieux répondre à la demande. Les décisions possibles sont au nombre de trois :

a_1 : ne rien faire ;

a_2 : accroître la capacité existante de 15 %;

a_3 : accroître la capacité existante de 50 %.

L'incertitude porte sur l'évolution des débouchés pour le produit en question : si leur progression est importante, l'industriel aura intérêt à procéder à des investissements massifs afin d'augmenter ses bénéfices et de conserver sa part de marché mais, dans le cas contraire, une telle décision peut le conduire à supporter des charges excessives sans contrepartie. On a identifié trois scénarios caractérisant l'évolution du marché :

s_1 : progression de la demande nulle;

s_2 : progression égale à 10 %;

s_3 : progression égale à 40 %.

Les actions ont été évaluées dans chacune de ces trois situations en fonction d'un bénéfice actualisé :

TABLEAU I
Évaluations conditionnelles (en millions de francs français)

		Scénarios		
		s_1	s_2	s_3
Actions	a_1	20	10	5
	a_2	4	12	18
	a_3	-5	14	19

Ces valeurs nominales sont ensuite transformées en utilités ⁽²⁾; cette transformation peut se faire en construisant des loteries « 50-50 » et en demandant au décideur un équivalent certain de chacune de ces loteries (cette procédure est décrite dans [1]).

1.3. Approche objectiviste, approche subjectiviste et méthode proposée

Comment prendre une décision au vu de ce tableau ? Deux écoles s'opposent sur la réponse à apporter à cette question : les *objectivistes* et les *subjectivistes*.

⁽²⁾ Cette transformation est nécessaire si l'on veut tenir compte du comportement du décideur vis-à-vis du risque.

Ainsi, si une perte de 5 millions est susceptible de conduire l'industriel à la faillite, l'écart entre -5 et 0 n'est pas pour lui équivalent à l'écart entre 0 et 5 millions.

TABLEAU II
Utilités conditionnelles $u_k(a_i)$

		Scénarios		
		s_1	s_2	s_3
Actions	a_1	1	0,679	0,500
	a_2	0,458	0,750	0,938
	a_3	0	0,813	0,969

Les objectivistes n'admettent que les probabilités fondées sur l'observation d'un échantillon et la notion de fréquence relative. En situation d'avenir incertain où l'échantillonnage n'est pas possible, ils refusent donc d'affecter aux différents scénarios des probabilités *a priori* fondées sur de simples suppositions. Les critères de choix se rattachant à cette conception sont :

- le critère du *maximin* :

$$\max_i [\min_k u_k(a_i)];$$

- le critère du *minimax regret* :

$$\min_i [\max_k (\max_i u_k(a_i) - u_k(a_i))];$$

- le critère du *maximax* :

$$\max_i [\max_k u_k(a_i)];$$

- les critères *mixtes* du type :

$$\max_i [\alpha \min_k u_k(a_i) + (1 - \alpha) \max_k u_k(a_i)] \quad \text{avec } 0 < \alpha < 1.$$

Ces règles de décision sont très criticables dans la mesure où elles ne prennent pas en compte les connaissances intuitives dont on dispose sur le futur. Ainsi, dans l'exemple évoqué, si l'on estime que l'hypothèse s_1 de non-progression de la demande a une chance infime de se vérifier, il peut paraître absurde de laisser les capacités de production en état comme le commande ce type de critère.

La démarche adoptée par les subjectivistes permet d'éviter ce genre d'incohérences. Elle consiste à affecter à chacun des scénarios retenus une

probabilité subjective p_k qui mesure le degré de confiance qu'on attache à celui-ci et à comparer les actions en fonction de leur *utilité espérée* :

$$U(a_i) = \sum_{k=1}^K p_k u_k(a_i).$$

Dans l'exemple de l'industriel, en choisissant :

$$p_1 = 0,2, \quad p_2 = 0,4 \quad \text{et} \quad p_3 = 0,4,$$

on obtient de la sorte :

$$U(a_1) = 0,650, \quad U(a_2) = 0,759 \quad \text{et} \quad U(a_3) = 0,713,$$

ce qui place l'action a_2 en tête.

On sait que l'axiomatique qui est à la base de cette théorie de l'utilité espérée est très contraignante (cf. [8]); et, de fait, chercher à représenter l'avenir au moyen d'une mesure de probabilité unique peut sembler tout aussi irréaliste que l'attitude qui consiste à ne pas introduire d'information de nature subjective dans la modélisation. Lorsqu'on analyse les problèmes concrets de décision en avenir incertain, on s'aperçoit en effet que l'on se trouve dans l'immense majorité des cas en situation d'*information incomplète*, c'est-à-dire dans une situation caractérisée à la fois par l'absence de base de données et par une masse plus ou moins confuse d'impressions subjectives dérivées de l'expérience accumulée et de la connaissance que les experts ont pu acquérir de l'environnement. Il s'agit par conséquent de s'orienter vers des modèles qui permettent de mieux prendre en compte la qualité et la quantité de l'information disponible sur le futur. Les travaux de Fourgeaud, Lenclud et Sentis [2], repris par Roy [6], Schwartz [9] et Vedder [10] témoignent d'un progrès dans ce sens : à partir de *relations de plausibilité* sur les scénarios, ils définissent non plus une mesure de probabilité unique mais un ensemble \mathcal{P} de mesures « admissibles » et appliquent ensuite à cet ensemble des critères de choix « objectivistes » du type maximin :

$$\text{Max}_i \left[\text{Min}_{(p_1, \dots, p_K) \in \mathcal{P}} \sum_{k=1}^K p_k u_k(a_i) \right] \quad (\text{critère de Fourgeaud}).$$

Nous nous proposons, dans cet article, d'apporter quelques améliorations à ce modèle, notamment par la mise au point d'une procédure de recueil de

données multi-experts débouchant sur la construction d'un *domaine de plausibilité* et la définition d'un nouveau critère de choix fondé sur une exploration de ce domaine.

2. RECUEIL DE DONNÉES ET CONSTRUCTION DU DOMAINE DE PLAUSIBILITÉ

La procédure de recueil de données comprend deux étapes :

- la collecte initiale de données au moyen de relations de plausibilité sur les scénarios permettant de définir un polyèdre « de départ » \mathcal{P} ;
- la réduction progressive de ce polyèdre par adjonction de nouvelles contraintes sur les probabilités $p_1, \dots, p_k, \dots, p_K$ associées aux scénarios.

2.1. La collecte initiale de données

Dans cette première étape, on demande aux experts de comparer les scénarios au moyen des relations (I), (P), (R) suivantes :

- s_1 (I) s_2 si et seulement si on juge que s_1 et s_2 ont même plausibilité ;
- s_1 (P) s_2 si et seulement si s_1 est jugé plus plausible que s_2 ;
- s_1 (R) s_2 si et seulement si s_1 et s_2 sont incomparables.

Comme on peut également souhaiter faire comparer aux experts des regroupements de scénarios (par exemple s_1 et s_2 ensemble par rapport à s_3), il est normal d'étendre ces trois relations à l'algèbre \mathcal{A} engendrée par l'ensemble \mathcal{S} des scénarios. Une fois la collecte terminée, on peut transformer de la façon suivante ces relations en contraintes en associant à chaque scénario une variable p_k ($k = 1, \dots, K$) possédant les propriétés d'une probabilité.

Propriétés de compatibilité des p_k avec l'opinion des experts :

- s_1 (I) $s_2 \Rightarrow |p_1 - p_2| \leq \delta$;
- s_1 (P) $s_2 \Rightarrow p_1 - p_2 \geq \delta^+$;
- $(s_1 \cup s_2)$ (I) $(s_3 \cup s_4) \Rightarrow |p_1 + p_2 - p_3 - p_4| \leq \delta$;
- $(s_1 \cup s_2)$ (P) $(s_3 \cup s_4) \Rightarrow p_1 + p_2 - p_3 - p_4 \geq \delta^+$.

Propriétés de probabilité des p_k :

- $p_k \geq \delta^+, \forall k = 1, \dots, K^{(3)}$,
- $\sum_{k=1}^K p_k = 1$,

(3) Afin qu'aucun scénario ne se voie associer un poids nul.

δ et $\delta^+ = \delta + \varepsilon$ (avec ε petit) étant deux seuils introduits pour rendre compte du caractère approximatif de la notion d'équiplausibilité ⁽⁴⁾. Ces contraintes définissent l'ensemble \mathcal{P} des jeux de poids « admissibles » appelé encore domaine de plausibilité qui est un polyèdre convexe inclus dans le simplexe de l'espace R^K .

Dans le cas où l'on est confronté à plusieurs experts, il arrive que ceux-ci aient des avis contradictoires sur les chances de réalisation des différents scénarios et que la collecte effectuée auprès de chaque expert séparément aboutisse à des ensembles de contraintes incompatibles entre eux. Pour remédier à cet obstacle, on peut commencer par présenter à chaque expert les conclusions des autres experts; il modifie alors éventuellement quelques relations sur les scénarios et présente un nouvel ensemble de contraintes. Cette phase peut être répétée plusieurs fois; elle permet de rapprocher les points de vue et de préparer la phase de discussion entre experts marquée par la recherche d'un compromis sur les contraintes ⁽⁵⁾.

2.2. Réduction progressive du domaine de plausibilité

Dans cette première étape de la procédure de recueil des données, on s'est limité à déterminer un domaine de plausibilité par le biais de relations (I), (P), (R). Cette pratique présente un grand avantage : elle permet de recueillir des informations auprès des experts sans faire appel aux probabilités dans la collecte; cependant, il est clair que le polyèdre ainsi défini peut contenir des jeux de poids incohérents ou irréalistes. Il est donc bon de se ménager la possibilité d'adjoindre aux contraintes initiales de nouvelles contraintes de type cardinal afin d'affiner le modèle de représentation de l'incertitude (cf. Roy [6]). Cette adjonction ne peut se faire *ex nihilo* dans la mesure où les

⁽⁴⁾ On peut montrer que si (I), (P), (R) définissent sur \mathcal{A} un *quasi-ordre partiel* et si $\forall A \in \mathcal{A}$ et $A \neq \emptyset$, $A(P) \neq \emptyset$, alors il existe au moins une fonction Π de \mathcal{A} dans \mathbb{R} et deux nombres réels δ et δ^+ vérifiant $0 < \delta < \delta^+$ tels que l'on ait :

- $\forall A \in \mathcal{A}$ et $A \neq \emptyset$, $\Pi(A) \geq \delta^+$;
- $\Pi(\emptyset) = 1$;
- $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1(I) A_2 \Rightarrow |\Pi(A_1) - \Pi(A_2)| \leq \delta$;
- $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $A_1(P) A_2 \Rightarrow \Pi(A_1) - \Pi(A_2) \geq \delta^+$ (cf. [4]).

Pour que Π soit une mesure de probabilité, il faut de plus que l'on ait $\forall A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, disjoints, $\Pi(A_1 \cup A_2) = \Pi(A_1) + \Pi(A_2)$; trouver les conditions sur (I), (P), (R) pour qu'il existe une telle fonction additive reste un problème ouvert.

⁽⁵⁾ Pour orienter efficacement cette discussion, il est intéressant de savoir ordonner les relations en fonction de leur *niveau d'incohérence* afin d'être en mesure de dire laquelle ou lesquelles il convient de modifier ou de supprimer en priorité si l'on veut aboutir à un ensemble de contraintes non contradictoires : les techniques de goal-programming permettent de répondre utilement à cette question (cf. [5, 11]).

experts sont ici tenus de manipuler directement des probabilités. Il s'agit donc de les faire réagir de la manière suivante sur quelques jeux de poids « limites » exhibés à partir de l'exploration des frontières de \mathcal{P} :

- Jugez-vous ce jeu de poids cohérent et réaliste ?
- S'il ne l'est pas, quelle est la contrainte sur les p_k qui n'est pas satisfaite par ce jeu de poids ?

Cette phase de réduction systématique du polyèdre est par conséquent bien distincte de la collecte initiale des données où il s'agit davantage de cerner dans ses grandes lignes la nature de l'incertitude et de fournir une base de départ au processus interactif décrit ci-dessus.

Application à l'exemple de l'industriel : La collecte initiale a permis de dégager trois relations : s_2 (I) s_3 , s_2 (P) s_1 , s_3 (P) s_1 . En choisissant $\delta = 0,04$ et $\delta^+ = 0,05$, on obtient les contraintes correspondantes :

- $|p_2 - p_3| \leq 0,04$;
- $p_2 - p_1 \geq 0,05$;
- $p_3 - p_1 \geq 0,05$,

auxquelles on ajoute :

- $p_1 + p_2 + p_3 = 1$;
- $p_1 \geq 0,05$;
- $p_2 \geq 0,05$;
- $p_3 \geq 0,05$,

ce qui définit le polyèdre de départ \mathcal{P} .

TABLEAU III

Réduction de \mathcal{P} . 1^o itération : on génère quelques points extrémaux de \mathcal{P} en faisant $\text{Min}_{\mathcal{P}} p_k$ et $\text{Max}_{\mathcal{P}} p_k$ pour $k = 1, \dots, K$

Objectif	Jeu de poids généré			Ce jeu de poids est-il jugé cohérent ?	Quelle(s) contrainte(s) faut-il ajouter ?
	p_1	p_2	p_3		
Min p_1	0,05	0,46	0,49	Oui	—
Max p_1	0,30	0,35	0,35	Non	$p_1 \leq 0,20$
Min p_2	0,29	0,34	0,37	Non	$p_1 \leq 0,20$
Max p_2	0,05	0,49	0,46	Oui	—
Min p_3	0,29	0,37	0,34	Non	$p_1 \leq 0,20$
Max p_3	0,05	0,46	0,49	Oui	—

TABLEAU IV

Réduction de \mathcal{P} . 2^e itération : on recommence avec le nouvel ensemble de contraintes

Objectif	Jeu de poids généré			Ce jeu de poids est-il jugé cohérent ?	Quelle(s) contrainte(s) faut-il ajouter ?
	p_1	p_2	p_3		
Max p_1	0,20	0,38	0,42	Oui	—
Min p_2	0,20	0,38	0,42	Oui	—
Min p_3	0,20	0,42	0,38	Oui	—

L'ensemble définitif des contraintes s'établit donc ainsi :

— $ p_2 - p_3 \leq 0,04$	— $p_2 - p_1 \geq 0,05$
— $p_3 - p_1 \geq 0,05$	— $p_1 + p_2 + p_3 = 1$
— $p_1 \geq 0,05$	— $p_2 \geq 0,05$
— $p_3 \geq 0,05$	— $p_1 \leq 0,20$

3. COMPARAISON DES ACTIONS

3.1. Discrétisation de \mathcal{P} et utilités espérées multiples

Le polyèdre \mathcal{P} ainsi construit regroupe donc toutes les mesures de probabilité « admissibles » compte tenu de l'information disponible sur les plausibilités respectives des scénarios retenus. Pour une action donnée, on peut faire correspondre à chacune de ces mesures (ou jeux de poids) une utilité espérée particulière. Afin de rendre plus aisée la comparaison entre actions, il est commode d'associer à chacune d'elles un nombre fini d'utilités espérées et par conséquent de discrétiser le domaine de plausibilité ⁽⁶⁾. On aboutit alors à J jeux de poids

$$P^1 = (p_1^1, \dots, p_k^1, \dots, p_K^1), \dots, P^j = (p_1^j, \dots, p_k^j, \dots, p_K^j), \dots, P^J \\ = (p_1^J, \dots, p_k^J, \dots, p_K^J)$$

(6) Plusieurs algorithmes peuvent être utilisés, l'important étant de choisir un *pas de discrétisation* qui permette à la fois de générer un nombre de points qui ne soit pas trop élevé et d'assurer une bonne représentation du polyèdre.

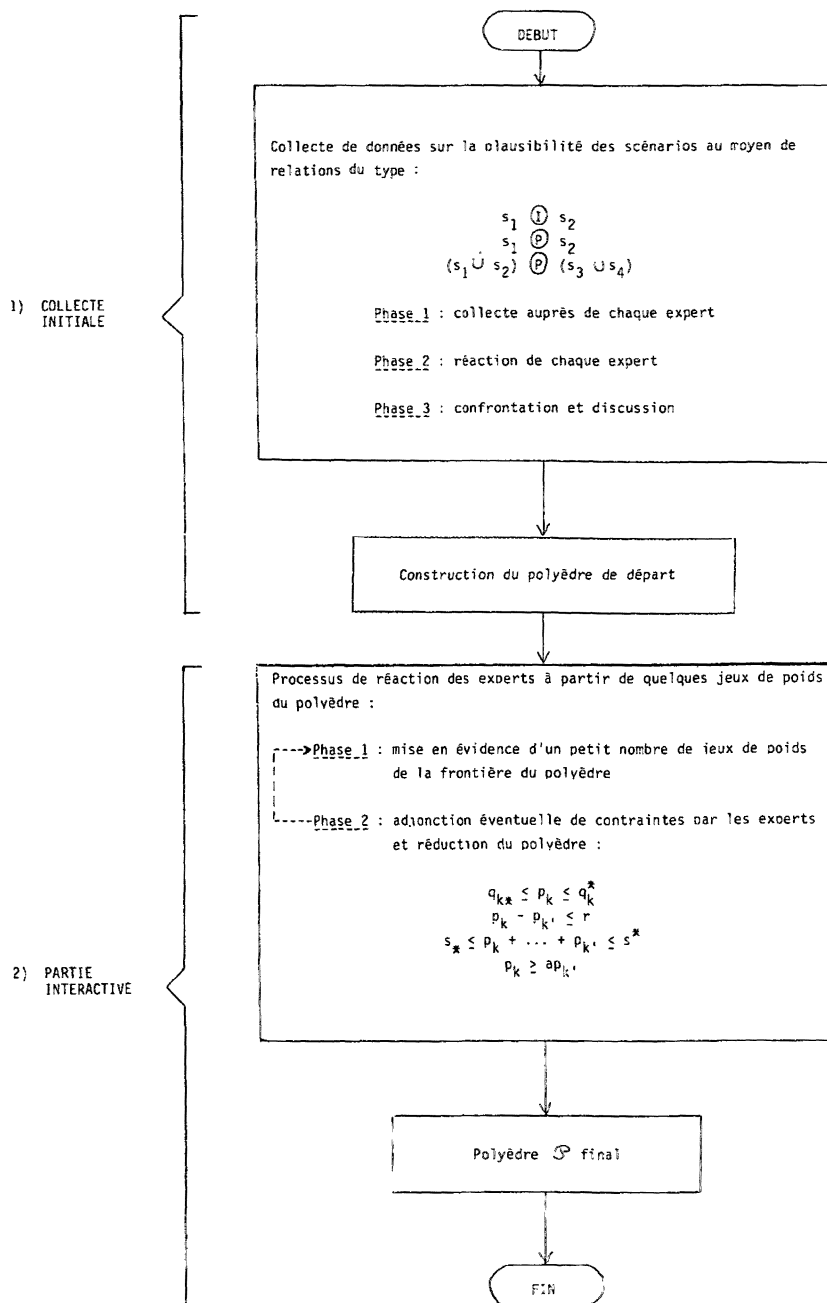


Figure 1. — Schéma général de la procédure de recueil de données.

et aux utilités correspondantes.

$$U^1(a_i) = \sum_{k=1}^K p_k^1 u_k(a_i), \dots, U^j(a_i) = \sum_{k=1}^K p_k^j u_k(a_i), \dots,$$

$$U^J(a_i) = \sum_{k=1}^K p_k^J u_k(a_i).$$

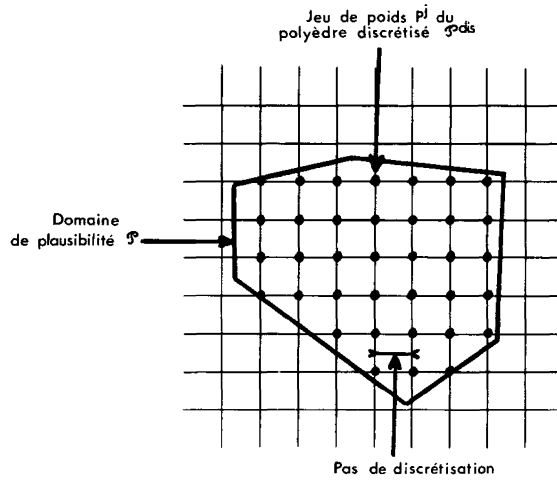


Figure 2. — Discretisation du domaine de plausibilité \mathcal{P} .

TABLEAU V

Application à l'exemple de l'industriel
(pas de discrétisation employé : 0,025)

Indice	Jeu de poids de \mathcal{P}^{dis}			Utilités espérées		
	p_1^j	p_2^j	p_3^j	$U^j(a_1)$	$U^j(a_2)$	$U^j(a_3)$
1.....	0,050	0,475	0,475	0,610	0,825	0,846
2.	0,075	0,450	0,475	0,618	0,817	0,826
3.	0,075	0,475	0,450	0,623	0,813	0,822
4.	0,100	0,450	0,450	0,631	0,805	0,802
5.	0,125	0,425	0,450	0,639	0,798	0,782
6.	0,125	0,450	0,425	0,644	0,793	0,778
7.	0,150	0,425	0,425	0,652	0,786	0,757
8.	0,175	0,400	0,425	0,660	0,779	0,737
9.	0,175	0,425	0,400	0,664	0,774	0,733
10.	0,200	0,400	0,400	0,672	0,767	0,713

3.2. Recherche du sous-ensemble flou des actions non dominées

Ces utilités espérées multiples $U^1, \dots, U^j, \dots, U^J$ peuvent être considérées comme autant de *dimensions* intervenant dans la comparaison des actions. Si l'on applique dans l'exemple le concept classique de *dominance* à ces dimensions, on voit que l'on peut écarter l'action a_1 mais que l'on ne sait pas choisir entre a_2 et a_3 . On va donc plus modestement rechercher l'action « la moins dominée ».

Dans ce but, on commence par définir sur l'ensemble $A \times A$ des couples d'actions une *relation de surclassement* S (cf. [7]). Cette relation est une relation floue dont la fonction d'appartenance μ_s , mesurant la valeur de vérité de l'assertion « a_i est jugée au moins aussi bonne que a_h », est donnée par :

$$\mu_s(a_i, a_h) = \frac{|\{j; U^j(a_i) \geq U^j(a_h)\}|}{J},$$

si $\exists j^0$ tel que $U^{j^0}(a_i) + v < U^{j^0}(a_h)$ où v est un *seuil de veto* (par exemple égal à 0,200);

$$\mu_s(a_i, a_h) = 0, \quad \text{sinon.}$$

μ_s est par conséquent égale à la proportion d'utilités espérées pour lesquelles a_h n'est pas préférée à a_i ; cependant, si pour une des mesures de probabilité P^{j^0} , l'écart entre $U^{j^0}(a_i)$ et $U^{j^0}(a_h)$ est par trop défavorable à a_i , on refuse toute crédibilité au surclassement de a_h par a_i quelles que soient les performances de ces deux actions pour les autres jeux de poids. La relation S permet ainsi de modéliser des situations de préférence stricte :

$$\mu_s(a_i, a_h) = 1 \quad \text{et} \quad \mu_s(a_h, a_i) = 0,$$

d'indifférence :

$$\mu_s(a_i, a_h) = \mu_s(a_h, a_i) = 1$$

et d'incomparabilité :

$$\mu_s(a_i, a_h) = \mu_s(a_h, a_i) = 0,$$

ainsi que toutes les situations intermédiaires où une action n'est meilleure qu'une autre que sur une partie du domaine de plausibilité. Dans l'exemple, on a :

	a_1	a_2	a_3
a_1	1	0	0
$\mu_s(a_i, a_h) = a_2$	1	1	0,7
a_3	1	0,3	1

A partir de cette relation de surclassement, on peut construire le *sous-ensemble flou des actions non dominées* (cf. [3]). A cet effet, on définit sur $A \times A$ la relation floue de dominance (ou de préférence) D ; celle-ci est égale à $S \setminus (S \cap S^{-1}) = S \setminus S^{-1}$ d'où on tire μ_D par application des formules du calcul ensembliste flou :

$$\begin{cases} \mu_D(a_i, a_h) = \mu_s(a_i, a_h) - \mu_s(a_h, a_i) & \text{si } \mu_s(a_i, a_h) > \mu_s(a_h, a_i); \\ \mu_D(a_i, a_h) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour a_h fixée, $\mu_D(a_h, a_i)$ représente le sous-ensemble flou des actions a_i dominées par a_h . Donc son complémentaire, défini par la fonction d'appartenance $1 - \mu_D(a_h, a_i)$, est le sous-ensemble flou des actions non dominées par a_h . L'intersection de tous ces sous-ensembles pour a_h parcourant A donne par conséquent le sous-ensemble flou des actions qui ne sont dominées par aucune autre; sa fonction d'appartenance μ^{ND} se déduit aisément :

$$\mu^{ND}(a_i) = \inf_{a_h \in A} [1 - \mu_D(a_h, a_i)] = 1 - \sup_{a_h \in A} \mu_D(a_h, a_i)$$

(d'après la définition de l'intersection de sous-ensembles flous).

Comme :

$$\sup_{a_h \in A} \mu_D(a_h, a_i) = \sup_{a_h \in A} [\mu_s(a_h, a_i) - \mu_s(a_i, a_h)],$$

on obtient :

$$\mu^{ND}(a_i) = 1 - \sup_{a_h \in A} [\mu_s(a_h, a_i) - \mu_s(a_i, a_h)].$$

$\mu^{ND}(a_i)$ peut être interprétée comme le degré de vérité de l'assertion « a_i n'est dominée par aucune action de A ». Lorsque l'on recherche la meilleure ou les meilleures actions (problématique d'optimisation), il est donc logique de choisir celle(s) dont la valeur de μ^{ND} est la plus proche de 1, soit a_2 dans l'exemple de l'industriel où l'on a :

$$\mu^{ND}(a_1) = 0, \quad \mu^{ND}(a_2) = 1 \quad \text{et} \quad \mu^{ND}(a_3) = 0,6.$$

Si l'on souhaite aller plus loin et obtenir un classement complet des actions, il est nécessaire de procéder par étapes successives en éliminant les actions déjà classées et en recalculant μ^{ND} à chaque fois.

3. 3. Comparaison avec d'autres critères

L'exemple de l'industriel fournit une base intéressante de comparaison entre d'une part ce critère de « non-dominance floue » et le critère proposé par Fourgeaud, Lenclud, Sentis et, d'autre part, les critères « objectivistes » traditionnels :

TABLEAU VI

Critère de classement	Rang de a_1	Rang de a_2	Rang de a_3
Maximin	1°	2°	3°
Minimax regret	1°	2°	3°
Maximax	1°	3°	2°
Critère de Fourgeaud	3°	1°	2°
Non-dominance floue	3°	1°	2°

Comme on peut le constater, les résultats sont très différents selon que l'on introduit ou non de l'information de nature subjective dans la modélisation. Les deux derniers critères, relatifs à un domaine de plausibilité restreint, permettent en effet de ne pas pénaliser des actions qui, comme a_2 ou a_3 , sont mal évaluées sur des scénarios de faible plausibilité. Les inconvénients habituels des critères classiques sont de la sorte évités, les scénarios les moins vraisemblables ne jouant un rôle significatif que si les utilités conditionnelles qui leur correspondent sont notablement différentes de celles relatives aux autres scénarios.

4. CONCLUSIONS

La méthode exposée s'articule donc autour de quatre points forts :

- (a) la construction des scénarios;
- (b) le calcul des utilités conditionnelles;
- (c) la construction du domaine de plausibilité;
- (d) la discrétisation de ce domaine, le calcul des utilités espérées et la recherche du sous-ensemble flou des actions non dominées.

Son avantage principal réside dans sa capacité à traiter des problèmes caractérisés par des niveaux d'incertitude très différents. On peut d'ailleurs la percevoir comme une généralisation des approches objectiviste et subjectiviste, la taille du polyèdre des mesures de probabilité admissibles oscillant en fonction de la quantité d'information disponible sur l'avenir :

	Nombre de mesures de probabilité admissibles
Approche objectiviste	Toutes les mesures
Approche subjectiviste	Une seule mesure
Méthode proposée	Variable

La méthode permet ainsi, à travers le recueil de données d'experts, de représenter une réalité donnée de la façon la plus adéquate, ce qui lui confère un caractère opérationnel indéniablement plus marqué que dans les approches traditionnelles ⁽⁷⁾.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. M. DE GROOT, *Optimal statistical decisions*, McGraw Hill, 1970.
2. C. FOURGEAUD, B. LENCLUD et P. SENTIS, *Critère de choix en avenir partiellement incertain*, R.I.R.O., n° 14, 1968, p. 9-20.
3. S. A. ORLOVSKY, *Decision-Making with a Fuzzy Preference Relation*, Fuzzy Sets and Systems, n° 1, 1978, p. 157-167.
4. M. RIZZI, *Sélection et classement d'actions en avenir incertain*, Université de Paris-Dauphine, Document du LAMSADE, n° 14, 1981.
5. G. M. ROODMAN, *Post-Infeasibility Analysis in Linear Programming*, Management Science, vol. 25, n° 1, 1979, p. 916-922.
6. B. ROY, *Décisions avec critères multiples : problèmes et méthodes*, Revue METRA, vol. 11, n° 1, 1972, p. 121-152.
7. B. ROY, *Critères multiples et modélisation des préférences : l'apport des relations de surclassement*, Revue d'Economie Politique, n° 1, 1974, p. 1-44.
8. L. J. SAVAGE, *The Foundations of Statistics*, John Wiley and Sons, 1954.
9. L. E. SCHWARTZ, *Uncertainty Reduction Over Time in the Theory of Multi-Attributed Utility*, dans *Multiple Criteria Decision-Making*, University of South-Carolina Press, J. L. COCHRANE et M. ZELENY, ed., 1972, p. 108-123.
10. J. N. VEDDER, *Multiattribute Decision-Making under Uncertainty Using Bounded Intervals*, dans *Multiple Criteria Decision-Making*, University of South-Carolina Press, J. L. COCHRANE et M. ZELENY, ed., 1972, p. 93-107.
11. H. M. WINKELS, *Complete Efficiency Analysis for Linear Vector Maximum Systems: Theoretical background and An Algorithm*, Arbeitsberichte zur Okonomathematik, n° 8002, 1980.

(7) Un programme informatique écrit en FORTRAN est disponible au LAMSADE, Université de Paris-Dauphine, place du Maréchal-de-Lattre-de-Tassigny, 75775 Paris Cedex 16.