RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

B. PEROCHE

Complexité de l'arboricité linéaire d'un graphe

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 16, n° 2 (1982), p. 125-129

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1982__16_2_125_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 16, n° 2 mai 1982, p. 125 à 129)

COMPLEXITÉ DE L'ARBORICITÉ LINÉAIRE D'UN GRAPHE (*)

par B. PEROCHE (1)

Résumé. — *$la(G)$ étant le nombre minimal de forêts de chaînes partitionnant les arêtes d'un graphe G, on montre que déterminer $la(G)$ est un problème N. P. complet, y compris dans le cas où G est de degré maximal 4.*

Mots clés : graphe, arboricité linéaire, problème N. P. complet.

Abstract. — *We prove that the determination of the linear arboricity of a graph is a N. P.-complete problem, even when the graph has maximum degree four.*

Keywords: graph, linear arboricity, N. P.-complexity.

1. INTRODUCTION

Soit $G=(X, E)$ un graphe. On appellera arboricité linéaire de G, et on notera $la(G)$, le nombre minimal de forêts de chaînes (i. e. de sous-graphes partiels de G dont les composantes connexes sont des chaînes) qui partitionnent les arêtes de G. Dans [3], le résultat suivant concernant $la(G)$ a été obtenu : si G a pour degré maximal 4, $2 \leqq la(G) \leqq 3$.

Un tel résultat conduit à se demander si on ne pourrait pas trouver un « bon » algorithme permettant de fournir la réponse au problème suivant, noté LA : G étant de degré maximal 4, a-t-on $la(G)=2$? On va montrer, dans ce qui suit, que LA est $N.P.$ complet et donc qu'on a toutes les raisons de penser qu'il n'est pas possible de trouver un algorithme polynomial pour le résoudre.

Dans ce qui suit, la terminologie utilisée concernant la complexité sera celle de [1].

Pour montrer que LA est $N.P.$ complet; on va utiliser le problème de la 3-satisfiabilité : soient $x_1, x_2, \ldots, x_t$ des variables booléennes et soit $C=C_1 . C_2 . \ldots . C_p$ une fonction booléenne sous forme canonique conjonctive

(*) Reçu septembre 1981.
(1) I.U.T. Villetaneuse, Université Paris-Nord, rue J. B.-Clément, 93430 Villetaneuse, France.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Reseach, 0399-0559/1982/125/$ 5.00

des variables x_i, telle que $\forall j$, $C_j = \tilde{x}_{j_1} + \tilde{x}_{j_2} + \tilde{x}_{j_3}$. Le problème : « l'équation $C = 1$ admet-elle une solution ? » sera noté 3-SAT. On sait qu'il est $N.P.$ complet [1].

Il est facile de voir que LA est dans la classe $N.P.$ Pour obtenir le résultat annoncé, on va exhiber une réduction polynomiale de 3-SAT à LA.

Pour terminer, signalons que certaines des idées utilisées ici sont inspirées de [2].

2. DESCRIPTION DES GRAPHES UTILISÉS

Étant donnée une fonction booléenne C du problème 3-SAT, on va lui associer un graphe $G = (X, E)$ de degré maximal 4 qui aura la propriété suivante : on pourra partitionner E en deux forêts de chaînes si et seulement si C est satisfiable, c'est-à-dire si l'équation $C = 1$ admet au moins une solution. Pour construire G, on va utiliser un certain nombre de graphes que l'on va définir ci-dessous, et dont on donnera les propriétés qui nous seront utiles.

2.1. Le graphe G_1 (voir *fig.* 1)

Ce graphe est de degré maximal 4 et deux paires d'arêtes en sortent : $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$. Il est facile de voir que $la(G_1) = 2$, et on peut vérifier :

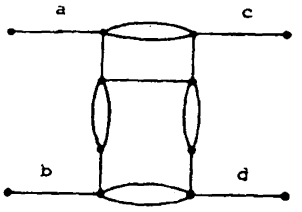

Fig. 1.

LEMME 1 : *Il n'existe qu'une seule partition des arêtes de G_1 par deux forêts de chaînes f_1 et f_2 si on impose à a et à b d'appartenir à la même forêt f_1 (resp. si on impose à a d'appartenir à f_1 et à b d'appartenir à f_2). De plus, dans cette partition, $c \in f_1$ et $d \in f_2$ (resp. c et d appartiennent à f_1).*

Pour ce graphe G_1, chaque paire $\{a, b\}$ et $\{c, d\}$ sera considérée comme une « entrée-sortie ». De plus, et dans toute la suite, on adoptera la convention suivante : si les deux arêtes d'une entrée-sortie appartiennent à une même forêt de chaînes, on dira que l'entrée-sortie représente la valeur « fausse »; sinon,

c'est-à-dire si les deux arêtes d'une entrée-sortie n'appartiennent pas à la même forêt de chaînes, elle représentera la valeur « vraie ». On peut donc dire que G_1 est un graphe qui permet d'échanger « vrai » et « faux ».

2.2. Le graphe G_2. A partir de G_1, on construit un graphe G_2 comme indiqué figure 2

G_2 est de degré maximal 4, a trois entrées-sorties $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ et $\{e, f\}$, et vérifie $la(G_2)=2$. De plus, on a :

LEMME 2 : *Il n'existe qu'une seule partition des arêtes de G_2 en deux forêts de chaînes f_1 et f_2, si on impose à une des entrées-sorties d'être « fausse » (resp. « vraie »). De plus, dans cette partition, les trois entrées-sorties sont alors toutes « fausses » (resp. toutes « vraies »).*

2.3. Le graphe G_3 (voir *fig.* 3)

G_3 est de degré maximal 4 et vérifie $la(G_3)=2$. Il a trois entrées-sorties : $\{a, b\}$, $\{c, d\}$ et $\{e, f\}$ et vérifie la propriété suivante :

LEMME 3 : *Dans toute partition des arêtes de G_3 en deux forêts de chaînes, on a soit une, soit deux, soit trois entrées-sorties « vraies ».*

3. RÉSULTAT PRINCIPAL

On peut maintenant démontrer le résultat annoncé :

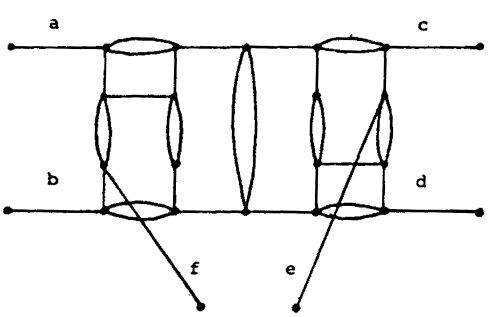

Fig. 2.

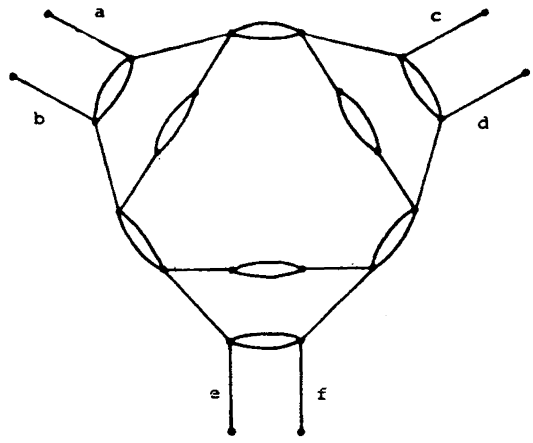

Fig. 3.

THÉORÈME 4 : *Déterminer si* $la(G)=2$ *pour un graphe* G *de degré maximal* 4 *est un problème* $N.P.$ *complet.*

Preuve : Il est facile de voir que LA est dans la classe $N.P.$ On va obtenir maintenant une réduction polynomiale de 3-SAT à LA.

Soit C une fonction booléenne des variables x_i, $1 \leqq i \leqq t$, $C = C_1 . C_2 . \ldots C_p$ associée à un problème 3-SAT.

1^{re} *étape :* A chaque variable x_i, on associe un graphe $G(i)$ de la manière suivante : on définit $q(i)$ comme étant le nombre d'apparitions de x_i ou de $\bar{x}_i$ parmi les clauses $C_1, C_2, \ldots, C_p$:

(1) si $q(i)=1$, on prend $G(i)=G_1-\{c, d\}$;

(2) si $q(i) \geqq 2$, on construit $G(i)$ à partir de $q(i)$ graphes G_2 que l'on raccorde de la manière suivante : si on note s_i, s_i' et σ_i les trois entrées-sorties du i-ième graphe G_2^i, on raccorde s_i' et σ_{i+1} pour $1 \leqq i \leqq q$ (les indices étant pris modulo q).

2^e *étape :* A chaque clause C_j, on associe un graphe H_j du type G_3.

Ensuite, pour tout k, $1 \leqq k \leqq 3$, si la variable $\tilde{x}_{j_k}$ de C_j est x_i, on identifie une sortie quelconque de H_j non encore utilisée avec une sortie quelconque non encore utilisée de $G(i)$; si la variable $\tilde{x}_{jk}$ de C_j est $\bar{x}_i$ on place un graphe G_1 entre une sortie quelconque non encore utilisée de H_j et une sortie quelconque non encore utilisée de $G(i)$.

On fait cela pour toutes les variables et toutes les clauses C_j, et on obtient ainsi un graphe G de degré maximal 4, qui peut être construit à partir de C en utilisant un algorithme polynomial.

Du lemme 2, on peut déduire que les arêtes de $G(i)$ sont partitionnées en deux forêts de chaînes si et seulement si toutes les entrées-sorties sont soit « vraies », soit « fausses ».

Supposons que $C=1$ ait une solution. On peut partitionner les arêtes de chaque $G(i)$, $1 \leqq i \leqq p$, par deux forêts de chaînes de telle sorte que les sorties soient « vraies » si $x_i=1$ et « fausses » sinon. Comme $C=1$ est satisfiable, les entrées de chaque H_j ne sont pas toutes « fausses » donc, d'après le lemme 3, on peut partitionner chaque H_j par deux forêts de chaînes. Donc, si C est satisfiable, on peut partitionner les arêtes de G avec deux forêts de chaînes.

Réciproquement, supposons que $C=1$ n'ait pas de solution. Pour une valeur des variables, il y a donc au moins une clause C_j qui vaut 0. Donc les entrées du graphe correspondant H_j seront toutes « fausses », donc il faudra trois forêts de chaînes pour partitionner les arêtes de H_j, d'après le lemme 3, donc pour partitionner les arêtes de G.

On a donc prouvé que $la(G)=2$ si et seulement si C est satisfiable, ce qui prouve que LA est $N.P.$ complet.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. CHEIN, *Cours de D.E.A. : Graphes et Informatique*, 1974-1975, Institut de Programmation, Paris-VI.
2. J. HOLYER, *The N.P. Completness of Edge-Colouring*, S.I.A.M. J. of Computing, vol. 10, 1981, p. 718-720.
3. B. PEROCHE, *On Partitions of Graphs into Linear Forests and Dissections*, Rapport de Recherche, n° 2 du G.R. 22 du C.N.R.S., Paris-VI, 1980.