RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

ALAIN BILLIONNET

Réductions et conditions d'optimalité dans le problème de l'ensemble stable de poids maximal

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 15, n° 3 (1981), p. 213-231

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1981__15_3_213_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 15, n° 3, août 1981, p. 213 à 231)

RÉDUCTIONS ET CONDITIONS D'OPTIMALITÉ DANS LE PROBLÈME DE L'ENSEMBLE STABLE DE POIDS MAXIMAL (*)

par Alain BILLIONNET ([1])

Résumé. — *Cet article présente, dans une première partie, une condition suffisante pour qu'un ensemble stable soit un ensemble stable de poids maximal. Cette condition repose sur la considération d'un flot dans un graphe biparti construit simplement. Lorsqu'elle ne permet pas de démontrer qu'un ensemble stable S est optimal, elle permet de déduire une propriété importante que doit vérifier tout ensemble stable de poids supérieur à celui de S.*

Nous présentons, dans une deuxième partie, quelques propriétés du problème de l'ensemble stable de poids maximal qui permettent de mener sa recherche dans un graphe réduit. Ces réductions sont simples à mettre en œuvre et, souvent, très efficaces.

Mots clés : Graphe-ensemble stable-optimisation-réductions-flot.

Abstract. — *This paper introduces in its first part a sufficient condition for a stable set to be a maximum weighted stable set. This condition relies upon the consideration of a flow in a bipartite graph that can be easily constructed. In case it is not sufficient to prove that a stable set S is optimal it provides an important property that must be verified by all the stable sets of weight greater than the weight of S.*

We introduce, in a second part, some properties of the problem of the maximum weighted stable set that enable its search in a reduced graph. These reductions are very simple to operate and, often very efficient.

Key-words: Graph-stable set-optimization-reductions-flow.

1. INTRODUCTION

1.1. Définitions

Considérons un graphe non orienté sans boucle ni arête multiple, $G=(X, V)$. Un ensemble S inclus dans X est stable si et seulement si deux sommets distincts et quelconques de S ne sont pas adjacents; autrement dit si $\Gamma_G(S) \cap S = \emptyset$ ([2]). Un ensemble stable de G est maximal si et seulement si il n'est strictement contenu dans aucun autre ensemble stable de G. Désignons par $\mathcal{S}_G$ la famille des ensembles stables (e.s.) du graphe G; le nombre de stabilité de G est : $\alpha(G) = \max_{S \in \mathcal{S}_G} |S|$. Le problème de l'ensemble stable de cardinal maximal consiste

(*) Reçu mai 1980.

([1]) Institut d'Informatique d'Entreprise-C.N.A.M., 292, rue Saint-Martin, 75141 Paris Cedex 03.

([2]) $\Gamma_G(x)$ désigne l'ensemble des sommets adjacents au sommet x dans le graphe G et pour un sous-ensemble A de sommets $\Gamma_G(A) = \bigcup_{a \in A} \Gamma_G(a)$.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/1981/213/$ 5.00

à déterminer, dans G, un ensemble stable de cardinal $\alpha(G)$. Si l'on associe à chaque sommet x de X un poids positif ou nul noté $p(x)$ on définira le poids d'un ensemble de sommets A par $P(A)=\sum_{x \in A} p(x)$. Le problème de l'ensemble stable de poids maximal (e. s. p. m.) consiste à déterminer dans G un ensemble stable S_0 tel que : $P(S_0)=\max_{S \in \mathcal{S}_G} P(S)$.

Nous nous intéressons ici au problème de la détermination d'un ensemble stable de poids maximal. Remarquons qu'un ensemble stable de cardinal maximal est aussi un ensemble stable de poids maximal dans le cas où tous les sommets du graphe sont de même poids.

1.2. Complexité des problèmes de stabilité

Dans les études de complexité (au sens de R. M. Karp) les problèmes sont exprimés sous forme de questions dont la réponse est oui ou non. Ainsi le problème de l'ensemble stable de cardinal maximal s'énoncera : étant donné un graphe $G=(X, V)$ et un entier k, existe-t-il dans G un ensemble stable de cardinal supérieur ou égal à k?

THÉORÈME 1 (R. M. Karp [14]) : *Le problème de l'ensemble stable de cardinal maximal est* NP-*complet.*

REMARQUE : On peut imposer diverses restrictions à G qui ne modifient pas la complexité du problème de l'ensemble stable de cardinal maximal. En particulier, si G est planaire et cubique (3) le problème demeure NP-complet [9]. En revanche le problème peut être résolu par un algorithme en temps polynomial dans les cas suivants : G est biparti, G est un graphe cordé (4) ou G est un graphe de comparabilité (5) [8]. Récemment G. Minty [15] et N. Sbihi [18] ont proposé des algorithmes en temps polynomial pour la détermination d'un ensemble stable de cardinal maximal dans un graphe sans étoile (6). Enfin, à partir de l'algorithme de Khachian, M. Grotschel, L. Lovasz et A. Schrijver [10] ont proposé un algorithme en temps polynomial pour déterminer un ensemble stable de cardinal maximal dans un graphe parfait (7).

D'après le théorème 1, le problème de l'ensemble stable de poids maximal, contenant celui de l'ensemble stable de cardinal maximal, est NP-complet.

---

(3) Graphe dont tous les sommets sont de degré 3.
(4) Graphe dont tout cycle de plus de trois sommets contient une corde.
(5) Graphe $G=(X, V)$ dont il est possible, en orientant les arêtes, d'en faire le graphe $G=(X, U)$ d'une relation d'ordre.
(6) Graphe dont aucun sommet n'est adjacent à trois sommets formant un stable; on dit aussi sans griffe.
(7) Graphe $G=(X, V)$ vérifiant : $\forall A \subseteq X$, le nombre de stabilité du sous-graphe de G engendré par A est égal au nombre minimal de cliques de ce sous-graphe qui partitionnent A.

Ces deux problèmes sont difficiles et les algorithmes publiés à ce jour permettent rarement de traiter des graphes de plus de 50 sommets sauf si ceux-ci ont une densité très faible ([8]). On peut essayer, pour ces problèmes NP-complets, de construire des algorithmes approchés. Cependant le théorème suivant montre leurs limites.

THÉORÈME 2 (M. Garey et D. S. Johnson [8]) : *Si P est différent de* NP, *aucun algorithme polynomial approché ne peut garantir, pour toute constante k fixée :*

$$|\alpha_a(G)-\alpha(G)| \leqq k,$$

où $\alpha_a(G)$ désigne le cardinal de l'ensemble stable obtenu par l'algorithme approché.

On trouvera d'autres résultats intéressants concernant les garanties de performance pour les algorithmes approchés visant à déterminer un « bon ensemble stable » dans [8].

1.3. Problèmes équivalents

Le problème de l'e s. p. m. est directement équivalent à plusieurs autres. Donnons tout d'abord les définitions suivantes :

une clique de $G=(X, V)$ est un ensemble de sommets $C \subseteqq X$, deux à deux adjacents. Le graphe complémentaire de $G=(X, V)$ est le graphe $\overline{G}=(X, \overline{V})$ dont l'ensemble des sommets est identique à celui de G et dont l'ensemble des arêtes vérifie :

$$\forall x_i, x_j \in X, \qquad [x_i, x_j] \in V \iff [x_i, x_j] \notin \overline{V}.$$

Un support de G est un ensemble de sommets $T \subseteqq X$ contenant au moins une extrémité de chaque arête de G.

Un e. s. p. m. de G est une clique de poids maximal du graphe complémentaire et T est un support de poids minimal si et seulement si $X-T$ est un e. s. p. m.

1.4. Programmes mathématiques associés à ces problèmes

Le problème de l'e. s. p. m. dans un graphe $G=(X, V)$ de n sommets peut se formuler par le programme linéaire en variables bivalentes suivant :

$$\text{(PLS)} \quad \begin{cases} \text{maximiser } \sum_{j=1}^{n} v_j \cdot p(x_j), \\ \text{sous les contraintes :} \\ \forall (i, j) \mid [x_i, x_j] \in V, \quad v_i + v_j \leqq 1, \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad v_j = 0 \text{ ou } 1, \end{cases}$$

([8]) La densité d'un graphe de n sommets et m arêtes est égal au rapport du nombre d'arêtes de ce graphe sur le nombre d'arêtes du graphe complet de n sommets : $2\,m/n\,(n-1)$.

$\{v_j | j=1, \ldots, n\}$ est un ensemble de variables bivalentes biunivoquement associé à X.

Le programme associé à la recherche d'un support de poids minimal est :

$$(\mathrm{PLT}) \begin{cases} \text{minimiser } \sum_{j=1}^{n} v_j . p(x_j), \\ \text{sous les contraintes :} \\ \forall (i, j) \mid [x_i, x_j] \in V, \quad v_i + v_j \geqq 1, \\ \forall j \in \{1, \ldots, n\}, \quad v_j = 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

On peut remarquer que (PLT) est un problème de recouvrement particulier.

Nous serons amenés à considérer la relaxation continue (obtenue en imposant $v_j \in \mathbb{R}^+$ au lieu de $v_j=0$ ou 1) du programme linéaire en variables bivalentes (PLS) que nous appellerons (PLSC).

1.5. Plan de l'article

Dans la section 2 nous proposons une condition suffisante pour qu'un e. s. soit un e. s. p. m. Nous montrons les liens entre cette condition et le programme (PLSC). Nous donnons ensuite un prolongement ce cette condition suffisante qui peut permettre de prouver l'optimalité d'un e. s. quand la condition initiale ne le permet pas. Dans la section 3 on démontre certaines propriétés que doit vérifier tout e. s. de poids supérieur à celui d'un e. s. S déjà trouvé, dans le cas où les conditions de la section 2 n'ont pas permis de prouver l'optimalité de S. Dans la section 4 nous proposons quelques propriétés qui permettent d'affirmer, pour certains sommets de $G=(X, V)$, qu'il existe un e. s. p. m. de G les contenant ou, au contraire, qu'il existe un e. s. p. m. de G ne les contenant pas. Ces propriétés permettent ainsi de réduire le graphe dans lequel on recherche un e. s. p. m. Enfin, dans la section 5 nous montrons comment ce graphe peut être modifié par adjonction d'arêtes, ce qui permet dans certains cas de relancer la réduction du graphe en appliquant les propriétés des sections 3 et 4.

2. CONDITIONS POUR QU'UN ENSEMBLE STABLE SOIT DE POIDS MAXIMAL

2.1. Une condition nécessaire et suffisante

Voyons, tout d'abord, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un e. s. soit de poids maximal :

PROPOSITION 1 (G. L. Nemhauser et L. E. Trotter [16]) : *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un e. s.* S_0 *de* $G=(X, V)$ *soit de poids maximal est que tout e. s.* A *du sous-graphe de* G *engendré par* $X-S_0$ *soit de poids inférieur ou égal au poids de l'ensemble de sommets* $\Gamma_G(A) \cap S_0$.

Cette condition n'est guère pratique à utiliser. Elle conduirait à énumérer, au moins de manière implicite, tous les e. s. du sous-graphe de G engendré par $X-S_0$. (On notera que cela est déjà plus intéressant que d'énumérer tous les e. s. de G.) Nous proposons dans le paragraphe suivant une condition suffisante d'optimalité qui, en revanche, peut être introduite aisément dans un algorithme de recherche d'un e. s. p. m. [5].

2.2. Une condition suffisante pour qu'un ensemble stable soit de poids maximal

Soit S un e. s. de $G=(X, V)$. Associons au couple (G, S) un graphe biparti, G_S, dont le premier ensemble de sommets est $X-S$, dont le second est S et dont l'ensemble des arêtes est $\omega_G(S)$, cocycle de S dans G :

$$G_S=(X-S,\ S,\ \omega_G(S)).$$

Orientons ces arêtes de $X-S$ vers S puis transformons ce graphe biparti en un réseau de transport, $R(G_S)$, en ajoutant une entrée $\mathscr{E}$, une sortie $\mathscr{S}$, un arc de $\mathscr{E}$ vers chaque sommet du premier ensemble et un arc de chaque sommet du second ensemble vers $\mathscr{S}$. La capacité des arcs $(\mathscr{E}, x)$ est prise égale à $p(x)$, celle des arcs $(y, \mathscr{S})$ à $p(y)$. La capacité de tous les autres arcs est infinie. Enfin, le flux de tous les arcs doit être positif ou nul (cf. *fig.* 1 et 2).

THÉORÈME 3 : *Une condition suffisante pour qu'un ensemble stable* S *de* $G=(X, V)$ *soit de poids maximal est que le réseau* $R(G_S)$ *admette un flot de* $\mathscr{E}$ *à* $\mathscr{S}$ *qui sature tous les arcs incidents extérieurement à* $\mathscr{E}$.

Démonstration : S'il existe, dans $R(G_S)$, un flot φ qui sature tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$, cela entraîne que tout sous-ensemble de sommets, A, de $X-S$ vérifie : $P(A) \leqq P[\Gamma_{G_S}(A)]$.

En effet :

$$P(A)=\sum_{x\in A}\varphi(\mathscr{E}, x)=\sum_{x\in A}\ \sum_{y\in\Gamma_{G_S}(A)}\varphi(x, y)$$

$$\leqq \sum_{x\in X-S}\ \sum_{y\in\Gamma_{G_S}(A)}\varphi(x, y)$$

$$=\sum_{y\in\Gamma_{G_S}(A)}\varphi(y, \mathscr{S}) \leqq \sum_{y\in\Gamma_{G_S}(A)} p(y)=P[\Gamma_{G_S}(A)].$$

[$\varphi(x, y)$ désigne le flux de l'arc (x, y) dans le flot φ].

Tout e.s., A, du sous-graphe de G engendré par $X-S$ est donc de poids inférieur ou égal à $P[\Gamma_{G_S}(A)]=P[\Gamma_G(A)\cap S]$. On en déduit, d'après la proposition 1, que S est un e.s.p.m. de G. ■

Pour que cette condition suffisante soit vérifiée il faut que *tout* sous-ensemble A de $X-S$ soit de poids inférieur ou égal au poids de l'ensemble $\Gamma_G(A)\cap S$. En fait, pour prouver que S est de poids maximal, il suffit que les sous-ensembles *stables* de $X-S$ vérifient cette propriété. Le théorème 3 n'est donc pas une condition nécessaire. On peut dire qu'il ne tient pas compte des arêtes ayant leurs deux extrémités dans $X-S$. L'intérêt de ce théorème vient du fait qu'il existe des algorithmes efficaces pour le problème du flot maximal.

2.3. Relation entre la condition du théorème 3 et le programme linéaire associé au problème de l'e.s.p.m.

Étant donné un e.s., S, de $G=(X, V)$ on peut essayer de démontrer que S est optimal par les deux méthodes suivantes :

(a) essayer de construire un flot φ de $R(G_S)$ qui sature tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$;

(b) résoudre le programme (PLSC) et vérifier que la valeur de la solution optimale est égale à $P(S)$.

Nous allons démontrer que ces deux conditions suffisantes pour qu'un e. s. soit de poids maximal sont équivalentes.

Appelons v^S le vecteur $(v_1^S, \ldots, v_n^S)$ associé à l'ensemble stable S de G où $v_i^S=1$ si et seulement si $x_i\in S$.

THÉORÈME 4 : *Étant donné un ensemble stable S de $G=(X, V)$, une condition nécessaire et suffisante pour que v^S soit un programme optimal de (PLSC) est que $R(G_S)$ admette un flot saturant tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$.*

Démonstration : C.S. Supposons que $R(G_S)$ admette un flot φ saturant tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$. Nous pouvons alors réduire la fonction économique de la façon suivante :

$$\sum_{j=1}^{n} v_j.p(x_j)=\sum_{j\mid x_j\in S} v_j.p(x_j)+\sum_{j\mid x_j\in X-S} v_j.p(x_j)$$
$$=\sum_{i\mid x_i\in X-S}\ \sum_{j\mid x_j\in S}\varphi(x_i, x_j).(v_i+v_j)+\sum_{j\mid x_j\in S} CR_\varphi(x_j, \mathscr{S}).v_j$$

[$CR_\varphi(x, \mathscr{S})$ désigne la capacité résiduelle de l'arc $(x, \mathscr{S})$ relativement à φ].

Mais, puisque $\forall (i, j)\mid [x_i, x_j]\in V : v_i+v_j\leqq 1$,

$$\sum_{j=1}^{n} v_j.p(x_j)\leqq \sum_{i\mid x_i\in X-S}\ \sum_{j\mid x_j\in S}\varphi(x_i, x_j)+\sum_{j\mid x_j\in S} CR_\varphi(x_j, \mathscr{S}),$$

ce qui entraîne :

$$\sum_{j=1}^{n} v_j . p(x_j) \leqq P(X-S)+[P(S)-P(X-S)],$$

ce qui s'écrit :

$$\sum_{j=1}^{n} v_j . p(x_j) \leqq P(S). \tag{1}$$

Or le vecteur v^S est un programme de (PLSC) qui donne à la fonction économique la valeur $P(S)$. On peut donc conclure d'après (1) que v^S est un programme optimal de (PLSC).

C.N. En appliquant le corollaire du théorème de Gale cité par C. Berge dans [1] et en inversant l'orientation des arcs du réseau $R(G_S)$ on démontre immédiatement que si $R(G_S)$ n'admet pas un flot saturant tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$, alors, il existe un sous-ensemble A de $X-S$ tel que $P(A) > P[\Gamma_{G_S}(A)]$.

Définissons, à partir de v^S, un nouveau programme de (PLSC) v' :

$$v'_j = \begin{cases} 1/2 & \text{si} \quad x_j \in A \cup \Gamma_{G_S}(A), \\ v_j^S \text{ sinon} \end{cases}$$

et calculons :

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} v_j^S . p(x_j) - \sum_{j=1}^{n} v'_j . p(x_j),$$

$$\Delta = \sum_{j=1}^{n} (v_j^S - v'_j) . p(x_j) = \sum_{j \mid x_j \in A \cup \Gamma_{G_S}(A)} (v_j^S - v'_j) . p(x_j)$$

$$= \sum_{j \mid x_j \in A} (v_j^S - v'_j) . p(x_j) + \sum_{j \mid x_j \in \Gamma_{G_S}(A)} (v_j^S - v'_j) . p(x_j)$$

$$= -1/2 \sum_{x_j \in A} p(x_j) + 1/2 \sum_{x_j \in \Gamma_{G_S}(A)} p(x_j)$$

$$= -1/2\, P(A) + 1/2\, P[\Gamma_{G_S}(A)].$$

Cette dernière quantité est négative et v^S n'est donc pas un programme optimal. ■

2.4. Prolongement de la condition du théorème 3

Nous allons améliorer la condition suffisante d'optimalité du théorème 3 en tenant compte, dans une certaine mesure, des arêtes ayant leurs deux extrémités dans $X-S$. On obtiendra ainsi des cas où, bien qu'il n'existe pas de flot de $R(G_S)$ saturant tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$ (c'est-à-dire qu'il existe au moins un sous-ensemble A de $X-S$ tel que $P(A)>P[\Gamma_{G_S}(A)]$) il sera possible de prouver par le théorème 5, énoncé plus loin, que tout ensemble stable I de $X-S$ vérifie $P(I)\leqq P[\Gamma_{G_S}(I)]$ et donc que S est un e. s. p. m. en vertu de la proposition 1.

Dans le cas où un flot maximal φ déterminé sur $R(G_S)$ ne sature pas tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$, on construit un nouveau graphe biparti G_φ associé à φ, dont le premier ensemble de sommets est le sous-ensemble des sommets de $X-S$ dont l'arc incident intérieurement n'est pas saturé par φ; le deuxième ensemble de sommets est constitué comme suit : à chaque arc de G_S de flux positif est associé un sommet. Soit x un sommet du premier ensemble et t un sommet du second, (x, t) sera un arc de G_φ si et seulement si les deux extrémités de l'arc de G_S, associé au sommet t, sont adjacentes à x (dans le graphe G). Transformons ensuite le graphe G en un réseau de transport $R(G_\varphi)$ en supprimant les sommets isolés puis en ajoutant une entrée $\mathscr{E}'$ et une sortie $\mathscr{S}'$; la capacité des arcs $(\mathscr{E}', x)$ est égale à la capacité résiduelle des arcs $(\mathscr{E}, x)$ relativement à φ. La capacité des arcs $(t, \mathscr{S}')$ est égale au flux, dans $R(G_S)$ de l'arc associé à t. La capacité des autres arcs est infinie (cf. *fig.* 1, 2 et 3).

Présentons d'abord le lemme 1 qui nous servira dans la démonstration du théorème 5.

NOTATION : Soient trois systèmes de poids π_1, π_2 et π_3 associés à un graphe $G=(X, V)$. Appelons $p_1(x)$, $p_2(x)$ et $p_3(x)$ le poids du sommet x dans les systèmes π_1, π_2 et π_3. Notons $P_1(S), P_2(S)$ et $P_3(S)$ le poids d'un e. s. S et P_1^*, P_2^*, P_3^* le poids d'un e. s. p. m. de G dans les systèmes π_1, π_2 et π_3.

LEMME 1. — *Si π_1, π_2 et π_3 sont trois systèmes de poids positifs ou nuls, associés à un graphe $G=(X, V)$, tels que :*

$$\forall x\in X, \quad p_1(x)=p_2(x)+p_3(x),$$

alors, $P_1^*\leqq P_2^*+P_3^*$.

Démonstration : Supposons que S_1^*, S_2^* et S_3^* soient des e. s. p. m. de G dans les systèmes respectifs π_1, π_2 et π_3 tels que $P_1(S_1^*)>P_2(S_2^*)+P_3(S_3^*)$. Par définition des trois systèmes de poids, $P_1(S_1^*)=P_2(S_1^*)+P_3(S_1^*)$, ce qui entraîne, puisque $P_1^*>P_2^*+P_3^*$, $P_2(S_1^*)+P_3(S_1^*)>P_2(S_2^*)+P_3(S_3^*)$, mais $P_3(S_1^*)\leqq P_3(S_3^*)$ puisque S_3^* est un e. s. p. m. de G dans le système π_3. Donc $P_2(S_1^*)>P_2(S_2^*)=P_2^*$ ce qui contredit l'hypothèse : S_2^* est un e. s. p. m. de G dans le système π_2. ■

THÉORÈME 5 [9] : *Une condition suffisante pour qu'un e. s. S soit un e.s.p.m. de G est que $R(G_\varphi)$ admette un flot φ', de $\mathscr{E}'$ à $\mathscr{S}'$, saturant tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}'$.*

Démonstration : Soit φ' un flot de $R(G_\varphi)$ saturant tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}'$. A tout arc $u=(x, t)$ de G_φ on peut associer trois sommets de G : x et les deux sommets y_t et z_t extrémités de l'arc de G_S associé à t; ces trois sommets, par construction, forment une clique de G (x et y_t sont des sommets de $X-S$, z_t est un sommet de S).

Construisons, à partir du système de poids initial π_1 et du flot φ sur $R(G_S)$, un nouveau système de poids π_2 et un nouveau flot $\tilde{\varphi}$ [sur $R(G_S)$] admissible dans le système de poids π_2 :

début
pour tout $x\in X$ *faire* : $p_2(x)=p_1(x)$.
pour tout arc u de $R(G_S)$ *faire* : $\tilde{\varphi}(u)=\varphi(u)$.
pour tout arc (x, t) de G_φ tel que $\varphi'(x, t)>0$ *faire* :
début $p_2(x)=p_2(x)-\varphi'(x, t)$; $p_2(y_t)=p_2(y_t)-\varphi'(x, t)$;
$p_2(z_t)=p_2(z_t)-\varphi'(x, t)$; $\tilde{\varphi}(\mathscr{E}, y_t)=\tilde{\varphi}(\mathscr{E}, y_t)-\varphi'(x, t)$;
$\tilde{\varphi}(y_t, z_t)=\tilde{\varphi}(y_t, z_t)-\varphi'(x, t)$; $\tilde{\varphi}(z_t, \mathscr{S})=\tilde{\varphi}(z_t, \mathscr{S})-\varphi'(x, t)$ *fin*
fin

Dans le système π_2 le flot $\tilde{\varphi}$ sature tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$. En effet, la somme des valeurs soustraites au poids initial des sommets de l'ensemble $\{x \mid \varphi(\mathscr{E}, x)<p_1(x)\}$ est au moins égale à la capacité résiduelle de $(\mathscr{E}, x)$ relativement à φ puisque φ' sature tous les arcs $(\mathscr{E}', x)$. S est donc un e. s. p. m. de G dans le système π_2.

Soit π_3 un système de poids tel que : $\forall x\in X, p_1(x)=p_2(x)+p_3(x)$. D'après le lemme 1, $P_1^*\leqq P_2^*+P_3^*$. Dans le système de poids π_3 les seuls sommets de G dont le poids est différent de 0 sont les sommets des cliques $\{x, y_t, z_t\}$ associées à un arc (x, t) de G_φ tel que $\varphi'(x, t)>0$, ce qui entraîne : $P_3^*\leqq \sum_{u\in G_\varphi} \varphi'(u)$. Donc :

$$P_1^*\leqq P_2^*+\sum_{u\in G_\varphi} \varphi'(u)=P_2(S)+\sum_{u\in G_\varphi} \varphi'(u)=P_1(S).$$

Puisque $P_1(S)$ ne saurait être strictement supérieur à P_1^*, on a : $P_1^*=P_1(S)$ et S est donc un e. s. p. m. de G. ■

Cette condition suffisante d'optimalité permet très souvent de démontrer qu'un e. s. est un e. s. p. m. dans le cas où le poids de cet e. s. p. m. n'est pas très éloigné du poids d'un support de poids minimal.

---

[9] Ce théorème n'a d'intérêt que si la condition du théorème 3 n'est pas vérifiée pour le couple (G, S).

Exemple : Considérons le graphe G de la figure 1 et l'e.s. $S=\{x_4, x_7, x_8\}$.

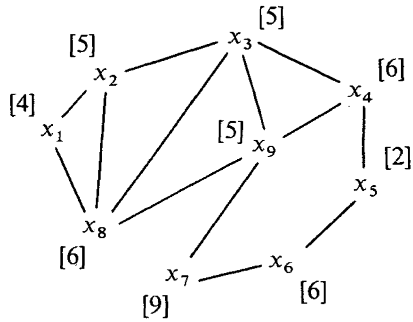

Figure 1. — G (les poids des sommets sont indiqués entre crochets).

La figure 2 représente le réseau $R(G_S)$ et un flot maximal φ sur ce réseau qui ne sature pas les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$. La figure 3 représente le réseau $R(G_\varphi)$ sur lequel est déterminé un flot saturant tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}'$. L'ensemble $S=\{x_4, x_7, x_8\}$, de poids 21, est donc un e.s.p.m. de G.

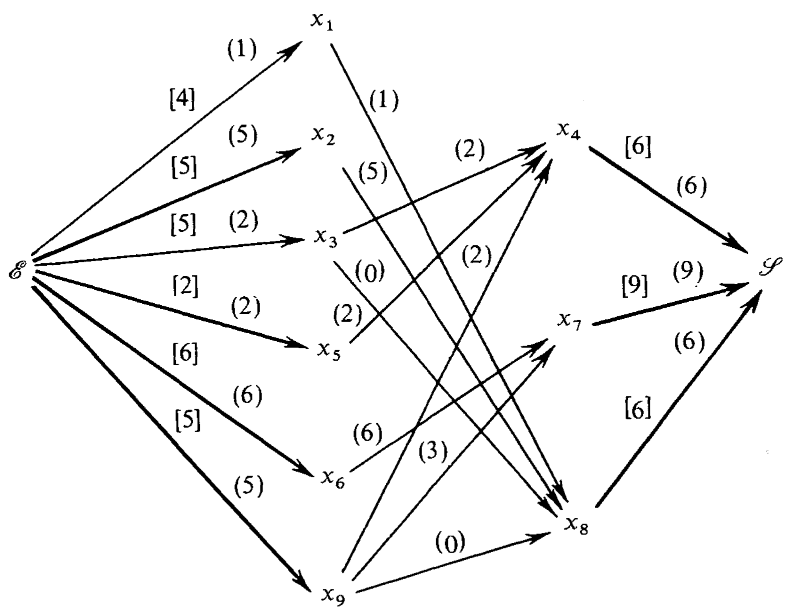

Figure 2. — $R(G_S)$ (les capacités sont indiquées entre crochets et les flux entre parenthèses).

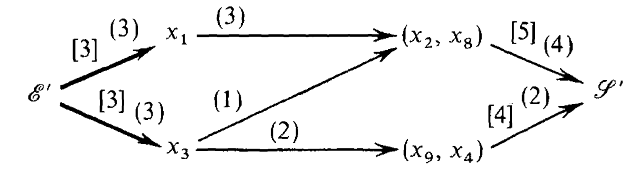

Figure 3. — $R(G_\varphi)$.

3. PROPRIÉTÉS D'UN ENSEMBLE STABLE DE POIDS SUPÉRIEUR A CELUI D'UN ENSEMBLE STABLE DONNÉ

Pour les cas où le théorème 5 ne permet pas de conclure qu'un e. s. S donné est un e. s. p. m., nous énonçons le théorème 6 ci-dessous qui donne une propriété que doit vérifier tout e. s. de poids supérieur à celui de S.

THÉORÈME 6. — *Soit S un e. s. de $G=(X, V)$, φ un flot dans le réseau $R(G_S)$ et φ' un flot dans le réseau $R(G_\varphi)$. Soit A l'ensemble des sommets du premier niveau de G_φ non saturés par φ'. Tout e. s. de poids supérieur à celui de S comporte au moins un sommet de A et tous les sommets x de S vérifiant la propriété $\mathscr{P}$:*

$$(\mathscr{P}): \quad CR_\varphi(x, \mathscr{S}) \geqq \sum_{a \in A} CR_{\varphi'}(\mathscr{E}', a).$$

Démonstration : Considérons le système de poids déduit du système initial π_1 en remplaçant, pour chaque sommet de A, $p_1(a)$ par $p_1(a) - CR_{\varphi'}(\mathscr{E}', a)$. D'après le théorème 5, S est un e. s. p. m. de G dans ce nouveau système de poids et il ne peut donc exister d'e. s. de poids supérieur à celui de S (dans le système de poids initial) et ne contenant aucun sommet de A.

Soit x un sommet de S vérifiant $\mathscr{P}$. Soit π_2 le système de poids obtenu à partir de π_1 en donnant à x un poids égal à $\varphi(x, \mathscr{S})$ et à tous les sommets a de A un poids égal à $p_1(a) - CR_{\varphi'}(\mathscr{E}', a)$; le poids des autres sommets restent inchangés. D'après le théorème 5, S est un e. s. p. m. de G dans π_2. Considérons un troisième système de poids π_3 identique à π_1 excepté pour le sommet x qui conserve un poids égal à $\varphi(x, \mathscr{S})$.

D'après le lemme 1 :

$$P_3^* \leqq P_2(S) + \sum_{a \in A} CR_{\varphi'}(\mathscr{E}', a) = P_1(S) - CR_\varphi(x, \mathscr{S}) + \sum_{a \in A} CR_{\varphi'}(\mathscr{E}', a),$$

ce qui entraîne, d'après $\mathscr{P}$, $P_3^* \leqq P_1(S)$. Tout e. s. de poids supérieur à celui de S contient donc le sommet x. ■

REMARQUE : On peut améliorer le théorème 6 en remplaçant, dans la propriété $\mathscr{P}$, $\sum_{a \in A} CR_{\varphi'}(\mathscr{E}', a)$ par une borne supérieure β du poids de l'e. s. p. m.

dans le sous-graphe de G engendré par A et dont le poids de chaque sommet a est $CR_{\varphi'}(\mathscr{E}', a)$.

En effet, d'après le lemme 1 :

$$P_3^* \leqq P_2(S) + \beta = P_1(S) - CR_\varphi(x, \mathscr{S}) + \beta,$$

ce qui entraîne, d'après $\mathscr{P}$, $P_3^* \leqq P_1(S)$.

4. SOMMETS APPARTENANT OU N'APPARTENANT PAS A UN E.S.P.M.

Nous présentons, dans cette section, quelques propriétés qui permettent d'affirmer, pour certains sommets de $G=(X, V)$, qu'il existe un e. s. p. m. de G les contenant ou, au contraire, qu'il existe un e. s. p. m. de G ne les contenant pas. Ces propriétés permettent donc de réduire de manière itérative le graphe dans lequel on cherche un e. s. p. m. (ces réductions pouvant conduire à un graphe vide, c'est-à-dire à la détermination directe d'un e. s. p. m.). En effet, s'il existe un e. s. p. m. de G contenant x et si S_1 est un e. s. p. m. du sous-graphe de G engendré par $X-\{x\}-\Gamma_G(x)$ alors, $S_1 \cup \{x\}$ est un e. s. p. m. de G. De même s'il existe un e. s. p. m. de G ne contenant pas x et si S_2 est un e. s. p. m. du sous-graphe de G engendré par $X-\{x\}$, alors, S_2 est un e. s. p. m. de G.

4.1. Propriétés de persistance

Énonçons tout d'abord le lemme suivant :

LEMME 2 (G. L. Nemhauser et L. E. Trotter [16]) : *Si S est un e. s. p. m. dans le sous-graphe de G engendré par $S \cup \Gamma_G(S)$, alors, S est inclus dans un e. s. p. m. de G.*

THÉORÈME 7 (G. L. Nemhauser et L. E. Trotter [16]) : *Étant donné un graphe $G=(X, V)$, si v^* est un programme optimal de (PLSC) et si $P=\{x_j \mid v_j^*=1\}$, alors, il existe un e. s. p. m. de G qui contient P.*

Pour démontrer ce dernier théorème G. L. Nemhauser et L. E. Trotter montrent que P est un e. s. p. m. dans le sous-graphe de G engendré par $P \cup \Gamma_G(P)$, ce qui permet de conclure d'après le lemme 2 que P est inclus dans un e. s. p. m. de G.

Le problème qui se pose vis-à-vis de ce théorème est de pouvoir déterminer un programme optimal de (PLSC) qui comporte le plus grand nombre possible de variables entières (égales à 0 ou 1). J. C. Picard et M. Queyranne démontrent, dans [17], qu'il existe un seul ensemble maximal de variables qui prennent simultanément des valeurs entières dans au moins un programme optimal de (PLSC). Ils proposent plusieurs méthodes pour déterminer cet ensemble de manière efficace.

Cette intéressante propriété de persistance voit son efficacité limitée par le théorème suivant :

THÉORÈME 8 (G. L. Nemhauser et L. E. Trotter [16]) : *Le programme v tel que $v_j = 1/2$ pour tout j est le programme optimal unique de (PLSC) si et seulement si $P(S) < P[\Gamma_G(S)]$ pour tout e.s. S de G.*

4.2. Sommets appartenant à un e. s. p. m.

Nous proposons dans ce paragraphe quelques propriétés qui peuvent permettre de déterminer des sommets appartenant à un e. s. p. m. en particulier lorsque la propriété de persistance du théorème 7 ne le permet pas. En effet, si un e. s. S est un e. s. p. m. dans le sous-graphe de G engendré par $S \cup \Gamma_G(S)$, on sait d'après le lemme 2 qu'il existe un e. s. p. m. de G qui contient S. Mais, dans ce cas, il n'existe pas nécessairement de programme optimal de (PLSC) avec $v_j = 1$ pour $x_j \in S$. C'est cette propriété du lemme 2 que nous allons mettre en évidence dans certains cas. En effet, dans le cas général, il est difficile d'identifier des e. s. S de poids maximal dans le sous-graphe de G engendré par $S \cup \Gamma_G(S)$.

NOTATION : Nous noterons $\mathscr{B}_G(A)$ une évaluation par excès du poids d'un e. s. p. m. du sous-graphe de G engendré par l'ensemble de sommets A. Cette évaluation pourra se calculer de nombreuses façons, par exemple par la procédure proposée par G. Démoucron dans [6] ou par une généralisation de la borne supérieure du nombre de stabilité proposée par P. Hansen dans [12] ou encore par la procédure simple suivante :

début
poser $\mathscr{B}_G(A) = 0$.
tant que A est non vide *faire* :
    début
    – déterminer un sommet de A de poids maximal : x;
    – déterminer, parmi les sommets de A un sommet adjacent à x de poids maximal : y (si x est un sommet isolé, poser $\{y\} = \{\emptyset\}$);
    – $\mathscr{B}_G(A) = \mathscr{B}_G(A) + p(x)$;
    – $A = A - \{x\} - \{y\}$.
    fin
fin

En effet, la contribution maximale de deux sommets adjacents x et y de A au poids de tout e. s. de A est égale à $p(x)$ si $p(x) \geqq p(y)$.

PROPRIÉTÉ 1 : Si x est un sommet de $G = (X, V)$ tel que : $\mathscr{B}_G[\Gamma_G(x)] \leqq p(x)$, alors, il existe un e. s. p. m. de G qui contient x.

Démonstration : Soit x un sommet de G tel que $\mathscr{B}_G[\Gamma_G(x)] \leqq p(x)$ et S_0 un e. s. p. m. ne contenant pas x. Certains sommets de $\Gamma_G(x)$ appartiennent à S_0 (sinon S_0 ne serait pas maximal puisque $S_0 \cup \{x\}$ serait un e. s.). Soit

$S'_0 = S_0 - [\Gamma_G(x) \cap S_0] \cup \{x\}$; il est obtenu en supprimant dans l'e. s. S_0 les sommets de $\Gamma_G(x)$ (tout sous-ensemble d'un ensemble stable est stable) puis en ajoutant le sommet x qui n'est adjacent à aucun sommet de $S_0 - [\Gamma_G(x) \cap S_0]$. Le résultat S'_0 est donc un e. s. Son poids est supérieur ou égal à celui de S_0 ce qui contredit l'hypothèse. Notons que si $\mathscr{B}_G[\Gamma_G(x)] < p(x)$, alors, *tout* e. s. p. m. de G contient x. ■

Cette propriété correspond bien à un cas particulier d'un e. s. S optimal dans le sous-graphe de G engendré par $S \cup \Gamma_G(S)$. En effet, on vérifie aisément que $\{x\}$ est un e. s. optimal dans le sous-graphe de G engendré par $\{x\} \cup \Gamma_G(x)$.

Voyons maintenant une extension de cette propriété portant non plus sur un sommet, mais sur un groupe de sommets.

Propriété 2 : Si, dans un graphe $G=(X, V)$, il existe k sommets $x_1, \ldots, x_k$ tels que :

(*a*) $\Gamma_G(x_1) = \ldots = \Gamma_G(x_k)$;

(*b*) $\mathscr{B}_G[\Gamma_G(x_1)] \leqq \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$,

alors, il existe un e. s. p. m. de G qui contient $x_1, \ldots, x_k$.

Démonstration : Remarquons tout d'abord que (*a*) entraîne que deux sommets quelconques de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ ne sont pas adjacents.

Soit S_0 un e. s. p. m. de G. Deux cas sont possibles : S_0 contient tous les sommets $x_1, \ldots, x_k$ ou S_0 ne contient aucun de ces sommets. En effet S_0 ne peut comporter seulement une partie (non vide) de $\{x_1, \ldots, x_k\}$ car, alors, il ne serait pas maximal. Considérons donc le cas où S_0 ne contient aucun sommet de $\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Soit $S'_0 = S_0 - [\Gamma_G(x_1) \cap S_0] \cup \{x_1, \ldots, x_k\}$; comme ci-dessus (propriété 1) c'est un e. s. Son poids $P(S'_0)$ vaut :

$$P(S'_0) = P(S_0) - \sum_{x \in \Gamma_G(x_1) \cap S_0} p(x) + \sum_{i=1}^{k} p(x_i),$$

mais :

$$\sum_{x \in \Gamma_G(x_1) \cap S_0} p(x) \leqq \mathscr{B}_G[\Gamma_G(x_1)],$$

car $\Gamma_G(x_1) \cap S_0$ est un e.s. inclus dans $\Gamma_G(x_1)$; d'autre part, par hypothèse : $\mathscr{B}_G[\Gamma_G(x_1)] \leqq \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$.

Donc $P(S'_0) \geqq P(S_0)$ ce qui contredit l'hypothèse.

Remarquons que si $\mathscr{B}_G\ [\Gamma_G\ (x_1)] < \sum_{i=1}^{k} p(x_i)$, alors, *tout* e. s. p. m. de G contient $x_1, \ldots, x_k$. ■

Remarque : Avec la propriété 2 on se trouve toujours dans le cas d'un e. s. I pour lequel on peut affirmer qu'il existe un e. s. p. m. de G le contenant parce qu'il est de poids maximal dans le sous-graphe de G engendré par $I \cup \Gamma_G(I)$.

4.3. Sommets n'appartenant pas à un e. s. p. m.

Nous allons proposer dans ce paragraphe des propriétés locales d'un sommet qui permettent d'affirmer, dans certains cas, qu'il existe au moins un e. s. p. m. de G ne le contenant pas. Nous ne considérerons pas, ici, les sommets adjacents à un sommet dont on sait, grâce aux propriétés des paragraphes 4.1 et 4.2, qu'il existe un e. s. p. m. S le contenant, puisqu'il est trivial qu'ils n'appartiennent pas à S.

Théorème 9 : *Une condition suffisante pour qu'il existe un e. s. p. m. S de $G=(X, V)$ ne contenant pas tous les sommets d'un e. s. I donné est qu'il existe, dans le sous-graphe de G engendré par $\Gamma_G(I)$, un e. s. A tel que :*

$$P(A) - \mathscr{B}_G[\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(I)] \geqq P[I \cap \Gamma_G(A)],$$

où $\Gamma'_G(I)$ désigne l'ensemble des sommets adjacents aux sommets de $\Gamma_G(I)$ et n'appartenant ni à I ni à $\Gamma_G(I)$.

Démonstration : Soit S_1 un e. s. de $G=(X, V)$ tel que : $I \subseteqq S_1$ et A un e. s. du sous-graphe de G engendré par $\Gamma_G(I)$ vérifiant la condition du théorème 9 :

$$S_2 = S_1 \cup A - [I \cap \Gamma_G(A)] - [\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(I) \cap S_1]$$

est un e. s. de G ne contenant pas tous les sommets de I et de poids :

$$P(S_2) = P(S_1) + P(A) - P[I \cap \Gamma_G(A)] - P[\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(I) \cap S_1],$$

car I, $\Gamma_G(I)$ et $\Gamma'_G(I)$ sont disjoints deux à deux par définition. Mais d'après l'hypothèse, et vu que $\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(I) \cap S_1$ est stable :

$$P(A) - P[\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(I) \cap S_1]$$
$$\geqq P(A) - \mathscr{B}_G[\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(I)] \geqq P[I \cap \Gamma_G(A)],$$

d'où $P(S_2) \geqq P(S_1)$. Il existe donc un e. s. S_2 ne contenant pas tous les sommets de I et de poids supérieur ou égal à celui de S_1. Remarquons que si :

$$P(A) - \mathscr{B}_G[\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(I)] > P[I \cap \Gamma_G(A)],$$

alors, *aucun* e. s. p. m. de G ne contient tous les sommets de I. ■

Dans le cas général le théorème 9 ne permet pas d'éliminer directement de sommets lors de la recherche d'un e. s. p. m. mais lorsque I est réduit à un seul sommet le théorème 9 permet d'éliminer ce sommet :

COROLLAIRE 1 : *Une condition suffisante pour qu'il existe un e. s. p. m. de* $G=(X, V)$ *ne contenant pas* x *est qu'il existe, dans le sous-graphe de* G *engendré par* $\Gamma_G(x)$, *un ensemble stable* A *tel que :*

$$P(A)-\mathscr{B}_G[\Gamma_G(A)\cap\Gamma'_G(x)]\geqq p(x),$$

où $\Gamma'_G(x)$ *désigne l'ensemble des sommets adjacents aux sommets de* $\Gamma_G(x)$, *différents de* x *et n'appartenant pas à* $\Gamma_G(x)$.

La démonstration est immédiate d'après le théorème 9 en remplaçant I par $\{x\}$. ■

D'un point de vue algorithmique, le théorème 9 et son corollaire 1 ne sont pas très pratiques à utiliser. Nous allons présenter trois autres corollaires faciles à intégrer dans un algorithme de recherche d'un e. s. p. m. [5].

COROLLAIRE 2 : *Soit* $[x, y]$ *une arête de* G. *Si l'ensemble des sommets adjacents à* y, *excepté* x, *est inclus dans l'ensemble des sommets adjacents à* x *et si* $p(x)\leqq p(y)$, *alors, il existe un e. s. p. m. de* G *qui ne contient pas* x.

Démonstration : Elle est immédiate à partir du corollaire 1 en prenant comme e.s. A le sommet y puisqu'alors, $\Gamma_G(A)\cap\Gamma'_G(x)$ est vide et l'on peut prendre $\mathscr{B}_G[\Gamma_G(A)\cap\Gamma'_G(x)]=0$. ■

COROLLAIRE 3 : *Soit* $[x, y]$ *une arête de* G. *Si*

$$p(y)\geqq p(x)+\mathscr{B}_G[\Gamma_G(y)-[\Gamma_G(x)\cup\{x\}]],$$

alors, il existe un e.s.p.m. de G *qui ne contient pas* x.

Démonstration : Elle est immédiate à partir du corollaire 1 en prenant comme e. s. A le sommet y. En effet :

$$p(y)\geqq p(x)+\mathscr{B}_G[\Gamma_G(y)-[\Gamma_G(x)\cup\{x\}]],$$

entraîne :

$$p(x)\leqq p(y)-\mathscr{B}_G[\Gamma_G(y)\cap\Gamma'_G(x)].\quad ■$$

COROLLAIRE 4 : *S'il existe dans* $G=(X, V)$ *trois sommets distincts* x, y *et* z *tels que :*

(*a*) $[x, y]\in V$, $[x, z]\in V$ *et* $[y, z]\notin V$;

(*b*) $p(y)+p(z)\geqq p(x)+\mathscr{B}_G(B)$ *où* $B=\Gamma_G(y)\cup\Gamma_G(z)-\Gamma_G(x)-\{x\}$, *désigne l'ensemble des sommets adjacents à* y *ou* z *mais pas à* x *et différents de* x, *alors, il existe un e.s.p.m. de* G *qui ne contient pas* x.

Démonstration : Elle est immédiate à partir du corollaire 1 en prenant comme e. s. A les deux sommets y et z puisque $B=\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(x)$. ■

5. MODIFICATION DU GRAPHE PAR AJOUT D'ARETES

Quand les différentes propriétés des sections précédentes ne permettent plus de réduire le graphe dans lequel on cherche à déterminer un e. s. p. m. on peut encore essayer d'ajouter des arêtes dans le but de pouvoir utiliser à nouveau ces propriétés (cette idée est développée dans [3] pour la recherche d'un e. s. de cardinal maximal).

5.1. Ajout d'arêtes sans connaissance préalable d'un ensemble stable.

Considérons le théorème 9 du paragraphe 4.3 et énonçons le dans le cas particulier où l'ensemble stable I est formé de deux sommets :

THÉORÈME 10 : *Étant donnés deux sommets non adjacents x et y du graphe $G=(X, V)$, une condition suffisante pour qu'un e. s. p. m. de $G_{[x,y]}=(X, V \cup \{[x, y]\})$ soit un e. s. p. m. de G est qu'il existe dans le sous-graphe de G engendré par $\Gamma_G(\{x, y\})$ un ensemble stable A tel que :*

$$P(A)-\mathscr{B}_G[\Gamma_G(A) \cap \Gamma'_G(\{x, y\})] \geqq P[\{x, y\} \cap \Gamma_G(A)].$$

La démonstration est immédiate à partir du théorème 9 en prenant $I=\{x, y\}$. ■

COROLLAIRE : *Étant donnés deux sommets non adjacents x et y du graphe $G=(X, V)$, une condition suffisante pour qu'un e.s.p.m. de*

$$G_{[x,y]}=(X, V \cup \{[x, y]\})$$

soit un e.s.p.m. de G est qu'il existe un sommet z tel que :

(*a*) *z est adjacent à au moins un des sommets x, y;*

(*b*) $p(z)-\mathscr{B}_G[\Gamma_G(z)-\Gamma_G(x)-\Gamma_G(y)-\{x, y\}] \geqq P[\{x, y\} \cap \Gamma_G(z)]$.

La démonstration est immédiate à partir du théorème 10 en prenant $A=\{z\}$. ■

5.2. Ajout d'arêtes lorsqu'on connait déjà un ensemble stable

On considère ici un e. s. S, le réseau $R(G_S)$ dans lequel un flot maximal φ ne sature pas tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}$, puis le réseau $R(G_\varphi)$ dans lequel un flot maximal φ' ne sature pas tous les arcs incidents extérieurement à $\mathscr{E}'$.

THÉORÈME 11' : *Soit S un e. s. maximal de $G=(X, V)$ et I un e. s. quelconque de ce graphe. Une condition suffisante pour qu'un e. s. de poids supérieur à celui de S ne contienne pas tous les sommets de I est que :*

$$\{x \mid \varphi'(\mathscr{E}', x) < CR_\varphi(\mathscr{E}, x)\} \subseteqq \Gamma_G(I).$$

Démonstration : Soit S_0 un e. s. tel que $I \subseteqq S_0$ avec $\{x \mid \varphi'(\mathscr{E}', x) < CR_\varphi(\mathscr{E}, x)\} \subseteqq \Gamma_G(I)$.

D'après le théorème 6 tout e. s. de poids supérieur à celui de S doit contenir au moins un sommet de l'ensemble $\{x \mid \varphi'(\mathscr{E}', x) < CR_\varphi(\mathscr{E}, x)\}$.

L'ensemble stable S_0 qui, contenant I, ne contient aucun sommet de $\Gamma_G(I)$ ne peut être de poids supérieur à celui de S. ■

Si dans ce dernier théorème, l'ensemble stable I considéré est formé de deux sommets x et y alors, on peut effectuer la recherche d'un e. s. de G, de poids supérieur à celui de S, dans le graphe $G_{[x, y]}=(X, V \cup \{[x, y]\})$.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. BERGE, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
2. A. BILLIONNET, *Un algorithme pour le problème de l'ensemble stable de cardinal maximal*, Communication au dixième symposium international de programmation mathématique, Montréal, 27-31 août 1979.
3. L. BUTZ, P. L. HAMMER et D. HAUSMANN, *Reduction Methods for the Vertex Packing problem*, Research Report n° 7540-OR, Institut für okonometrie und operations research, Universitat Bonn, novembre 1975.
4. P. L. HAMMER, P. HANSEN et B. SIMEONE, *On Vertices Belonging to All and to no Maximum Stable Sets of a Graph*, F.U.C.A.M. Research, Report, 1980.
5. I. Caradot et C. POTIEZ, *Réalisation d'algorithmes efficaces en programmation linéaire en variables bivalentes*, Mémoire d'Ingénieur de l'Institut d'Informatique d'Entreprise, 1979-1980, Paris.
6. G. DEMOUCRON, *Ensemble stable intérieurement d'un graphe. Gestion*, juillet-août 1968, p. 508 à 519.
7. L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *Flots dans les graphes*, Gauthier-Villars, Paris, 1966.
8. M. R. GAREY et D. S. JOHNSON, *Computers and Intractability, a Guide to the Theory of NP-Completeness*, chap. 3, V. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.
9. M. R. GAREY, D. S. JOHNSON et L. STOCKMEYER, *Some Simplified NP-Complete Graph Problems*, Theor. Comput. Sc., vol. 1, 1976, p. 237-267.
10. M. GROTSCHEL, L. LOVASZ et A. SCHRIJVER, *The Ellipsoid Method and Its Consequences in Combinatorial Optimisation*, Research Report n° 80151-OR, Institut für okonometrie und operations research, Universitat Bonn, 1980.
11. P. HANSEN, *Bornes et algorithmes pour les stables d'un graphe*, Communication au colloque : « Regards sur la théorie des graphes », Cerisy, Manche, juin 1980.

12. P. HANSEN, *Upper Bounds for the Stability Number of a graph.*, Revue roumaine de Math. pures et appl., vol. 24, 1979, p. 1195-1199.
13. D. J. HOUCK et R. R. VEMUGANTI, *An Algorithm for the Vertex Packing Problem*, Operations Research, vol. 25, n° 5, septembre-octobre 1977, p. 773 à 787.
14. R. M. KARP, *Reducibility Among Combinatorial Problems*, dans R. E. MILLER et J. W. THATCHER, éd., Complexity of Computer Computations, New York, Plenum Press, 1972, p. 85-103.
15. G. MINTY, *On Maximal Independent Sets of Vertices in Claw-Free Graphs*, Journal of Combinatorial Theory, B, vol. 28, n° 3, juin 1980, p. 284 à 304.
16. G. L. NEMHAUSER et L. E. TROTTER, *Vertex Packings : Structural Properties and Algorithms*, Math. Programming, vol. 8, 1975, p. 232 à 248.
17. J. C. PICARD et M. QUEYRANNE, *On the Integer Valued Variables in the Linear Vertex Packing Problem*, Math. Programming, vol. 15, 1977, p. 97-101.
18. N. SBIHI, *Algorithme de recherche d'un stable de cardinalité maximal dans un graphe sans étoile*, Rapport de Recherche, n° 103, Université scientifique et médicale de Grenoble, décembre 1977.
19. R. E. TARJAN et A. E. TROJANOWSKI, *Finding a Maximum Independent Set*, S.I.A.M. J. Computing, vol. 6, 1977, p. 537-546.