RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

J. FONLUPT

L'affectation exponentielle et le problème du plus court chemin dans un graphe

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 15, n° 2 (1981), p. 165-184

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1981__15_2_165_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 15, n° 2, mai 1981, p. 165 à 184)

L'AFFECTATION EXPONENTIELLE ET LE PROBLÈME DU PLUS COURT CHEMIN DANS UN GRAPHE (*)

par J. FONLUPT [1]

Résumé. — *Étant donné un réseau routier et un trafic circulant entre une origine et une destination, nous étudions un modèle d'affectation de trafic introduit par Dial. Nous montrons que cette affectation est la solution d'un programme convexe; cette solution s'obtient d'une manière particulièrement simple, par résolution de systèmes d'équations linéaires.*

Ce programme se déduit du programme linéaire décrivant le problème du plus court chemin en ajoutant à la fonction objectif de ce dernier une fonction pénalité du type entropie. Ce programme permet d'étudier sous un angle nouveau les relations entre algorithmes de plus court chemin et de résolution de systèmes linéaires.

Mots clés : Graphes, programme convexe, transport.

Abstract. — *Given a road network and a traffic going from an origin to a final destination, we study a model of traffic assignment introduced by Dial. We show that this traffic assignment can be found by solving a convex program; the solution of this program can be obtained very easily by solving systems of linear equations.*

This program can be deduced from the linear program describing the shortest path problem by the addition of a penalty function (which is an entropy function) to the objective function. This convex program gives a new insight in the relations between shortest path algorithms and method of resolutions of systems of linear equations.

Keywords: Graphs, convex program, transportation.

I. INTRODUCTION

Soit un graphe $G=(V, E)$; $V=\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$; $E=\{e_1, e_2, \ldots, e_m\}$. Les sommets v_1 et v_n seront appelés respectivement sommet origine et sommet destination de G. A chaque arc $e_i \in E$ est associé un coût $c(e_i)$.

Le graphe G représentera un réseau routier, les sommets $\{v_i\} \in V$ étant les nœuds du réseau et les arcs $\{e_i\} \in E$ étant les tronçons du réseau, reliant certaines paires de nœuds. Le coût $c(e_i)$ de l'arc e_i représente, par exemple le temps nécessaire pour relier le nœud origine au nœud extrémité de e_i.

(*) Reçu septembre 1979.

(1) Université scientifique et médicale de Grenoble, B. P. n° 53, 38041 Grenoble Cedex.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0559/1981/165/$ 5.00

Considérons un trafic d'intensité F se rendant du sommet origine v_1 au sommet destination v_n. Une affectation sera une répartition du trafic entre tous les itinéraires reliant v_1 à v_n. L'affectation suivant le plus court chemin noté A_0 sera celle où tout le trafic emprunte un plus court chemin entre v_1 et v_n. Dans [4] Dial a étudié un autre type d'affectation dans le cas où G est sans circuit. Nous appellerons cette affectation, affectation exponentielle suivant en cela une terminologie utilisée dans [6]. Cette affectation notée A_λ dépend d'un paramètre λ et quand $\lambda \to 0$, A_λ a pour limite l'affectation A_0.

Le but essentiel de cette publication est d'étudier dans le cas général l'affectation exponentielle et de montrer que celle-ci peut se trouver comme solution d'un programme d'optimisation convexe qui se résoud d'une manière particulièrement simple.

Au paragraphe II nous reviendrons sur les méthodes de Dial quand le graphe G est sans circuit.

Au paragraphe III, nous étudierons l'affectation exponentielle dans le cas général.

Au paragraphe IV, nous étudierons, sous un angle nouveau, les relations entre résolutions de systèmes d'équations linéaires et algorithmes de plus courts chemins.

II. L'ALGORITHME DE DIAL

1. Définitions générales

Un chemin t sera défini par la succession de ses arcs : $t = [e_{i_1}, \ldots, e_{i_k}]$. $T(1, n)$ sera l'ensemble des chemins joignant l'origine v_1 à la destination v_n. $T(1, n; e_i)$ sera l'ensemble des chemins d'origine v_1, d'extrémité v_n et empruntant l'arc e_i. La longueur $c(t)$ d'un chemin sera définie par :

$$\boxed{c(t) = \sum_{e_i \in t} c(e_i).}$$

2. Nous ferons dans ce paragraphe les hypothèses suivantes :

(a) le graphe G est sans circuit;

(b) $\forall$ le sommet $v_i \in V$, $\exists$ un chemin $t \in T(1, n)$ passant par ce sommet.

Il est facile de montrer que les conditions (a) et (b) sont équivalentes aux conditions suivantes :

(a') $\exists$ un ordre partiel noté $\leqq$ sur les sommets du graphe défini comme il suit : $v_i \leqq v_j \Leftrightarrow \exists$ un chemin d'origine v_i et d'extrémité v_j (on ne peut avoir $v_i < v_j$ et $v_j < v_i$);

(b') $v_1 \leqq v_i \leqq v_n$, $\forall v_i \in V$.

On peut alors supposer en reclassant éventuellement les sommets du graphe que : $v_i < v_j \Rightarrow i < j$.

3. L'affectation exponentielle A_λ de paramètre λ peut se définir de la manière suivante :

Chargeons chaque itinéraire $t \in T(1, n)$ d'un trafic $r(t)$ égal à :

$$\boxed{r(t) = \mu\, e^{-c(t)/\lambda}.} \tag{1}$$

La constante sera définie de telle façon que la somme de tous les trafics sur les chemins $t \in T(1, n)$ est égale à l'intensité F du trafic total entrant par v_1 :

$$\boxed{\mu \sum_{t \in T(1,\, n)} r(t) = F.} \tag{2}$$

Les formules (1) et (2) définissent *l'affectation exponentielle A_λ de paramètre* λ. A_λ définit sur chaque arc $e \in E$ un trafic noté $x_\lambda(e)$ qui se calcule par la formule :

$$\boxed{x_\lambda(e) = \sum_{t \in T[1,\, n;\, e]} \mu\, r(t).} \tag{3}$$

Notons que les formules (3) ne sont pas intéressantes d'un point de vue algorithmique car elles nécessitent pour chaque arc $e \in E$ une énumération de tous les chemins $t \in T[1, n; e]$.

L'algorithme de Dial permet cependant de calculer d'une façon efficace les quantités $x_\lambda(e)$.

4. Algorithme de Dial

Notations : si e est un arc d'extrémité initial v_i et d'extrémité finale v_j, on posera :

$$i = or(e); \qquad j = ex(e).$$

D'autre part, posons $\bar{c}_\lambda(e) = e^{-c(e)/\lambda}$, $\forall e \in E$:

$$\Omega^-(i) = \{e \in E;\ ex(e) = i\}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n;$$
$$\Omega^+(i) = \{e \in E;\ or(e) = i\}, \qquad \forall i = 1, \ldots, n.$$

Enfin à chaque sommet v_i, on associera deux fonctions $v_i \to \omega(i)$ et $v_i \to \omega'(i)$ définies de la manière suivante :

Calcul de ω

$$\left.\begin{aligned}\omega(1)&=1,\\ \omega(i)&=\sum_{e\in\Omega^-(i)}\bar{c}_\lambda(e)\,\omega[or(e)],\qquad i=2,\,\ldots,\,n.\end{aligned}\right\}\tag{4}$$

Notons que si $e\in\Omega^-(i)$, $or(e)<i$ à cause de la numérotation des sommets adoptés au paragraphe 2.

La fonction ω se calcule donc en balayant les sommets du graphe dans un ordre croissant.

Calcul de ω′

De même la fonction ω′ se calcule en balayant les sommets de G dans un ordre décroissant par les formules :

$$\left.\begin{aligned}\omega'(n)&=1,\\ \omega'(i)&=\sum_{e\in\Omega^+(i)}\bar{c}_\lambda(e)\,\omega'[ex(e)],\qquad 1\leqq i\leqq n-1.\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

THÉORÈME 1 (Dial) :

$$x_\lambda(e)=\frac{F\,.\,\bar{c}_\lambda(e)\,\omega[or(e)]\,.\,\omega'[ex(e)]}{\omega(n)}.\tag{6}$$

Démonstration : Voir (4) ou (7) pour une démonstration plus mathématique.

5. Réciproque du théorème de Dial

Soit $X_\lambda=[x_\lambda(e)\,|\,e\in E]$ un vecteur. X_λ sera appelé vecteur trafic d'intensité F ou trafic d'intensité F si :

$$\left\{\begin{aligned}&X_\lambda\geqq 0,\\ &y(1)=\sum_{e\in\Omega^+(1)}x_\lambda(e)=F,\\ &y(i)=\sum_{e\in\Omega^+(i)}x_\lambda(e)=\sum_{e\in\Omega^-(i)}x_\lambda(e),\qquad i=2,\,\ldots,\,n-1,\\ &y(n)=\sum_{e\in\Omega^-(n)}x_\lambda(e)=F,\end{aligned}\right.$$

[$y(i)$ représente le trafic passant par le nœud i].

Le théorème de Dial fournit une représentation simple du trafic par arc à partir du trafic défini sur les itinéraires $t\in T(1,\,n)$.

Le théorème suivant répond à la question inverse : à partir d'un trafic observé X_λ d'intensité F, peut-on trouver un système de coûts $\{c(e)\,:\,e\in E\}$ tels que l'affectation exponentielle A_λ fournisse le trafic X_λ?

Posons :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \bar{c}_\lambda(e)=\dfrac{x_\lambda(e)}{y[ex(e)]} & \text{si} \quad x_\lambda(e)>0 \quad \text{et} \quad c(e)=-\lambda \operatorname{Log} \bar{c}_\lambda(e), \\ \bar{c}_\lambda(e)=0 & \text{si} \quad x_\lambda(e)=0 \quad \text{et} \quad c(e)=+\infty. \end{array}} \tag{7}$$

Soit A_λ l'affectation exponentielle de paramètre λ sur G avec les coûts définis par (7).

THÉORÈME 2 : *L'affectation exponentielle A_λ produit un trafic égal à X_λ.*

Démonstration : Le système d'équations linéaires :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega(1)=1, \\ \omega(i)=\displaystyle\sum_{e\in\Omega^-(i)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega[or(e)]=\sum_{e\in\Omega^-(i)} \frac{x_\lambda(e)\,\omega[or(e)]}{y[ex(e)]}=\sum_{e\Omega^-(i)} \frac{x_\lambda(e)\,\omega[or(e)]}{y(i)} \end{array}\right.$$

a pour unique solution $\omega(i)=1$, $1<i\leq n$.

De même le système :

$$\left\{\begin{array}{l} \omega'(n)=1, \\ \omega'(i)=\displaystyle\sum_{e\in\Omega^+(i)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega'[ex(e)]=\sum_{e\in\Omega^+(i)} \frac{x_\lambda(e)\,\omega'[ex(e)]}{y[ex(e)]} \end{array}\right.$$

a pour solution unique $\omega'[i]=y(i)/F$.

L'affectation exponentielle A_λ associée aux coûts $c(e)$ définis en (7) produit sur chaque arc un trafic :

$$x'_\lambda(e)=F\,\bar{c}_\lambda(e)\frac{\omega[or(e)]\,\omega'[ex(e)]}{\omega(n)}=x_\lambda(e),$$

C.Q.F.D.

6. Remarque

Soit I la matrice identité de dimension $n\times n$ et soit $A=\|a_{ij}\|$ la matrice $n\times n$ définie par :

$$a_{ii}=0.$$

Si aucun arc ne joint le sommet v_i au sommet $v_j\, a_{ij}=0$.

Si $\exists$ un arc e tel que $or(e)=i$ et $ex(e)=j$, $a_{ij}(\lambda)=\bar{c}_\lambda(e)$. Notons que $A(\lambda)$ est une matrice triangulaire supérieure d'après la numérotation des sommets (*voir* § 2).

Posons :

$$u_1^T=[1, 0, \ldots, 0, 0],$$
$$u_n^T=[0, 0, \ldots, 0, 1],$$
$$\omega=[\omega(i);\ i=1, \ldots, n],$$
$$\omega'=[\omega'(i);\ i=1, \ldots, n].$$

Le système d'équations (4) peut s'écrire :

$$[I-A^T(\lambda)]\,\omega=u_1. \tag{4'}$$

Le système d'équations (5) peut s'écrire :

$$[I-A(\lambda)]\,\omega'=u_n. \tag{5'}$$

III. L'AFFECTATION EXPONENTIELLE DANS LE CAS GÉNÉRAL

1. Notations et rappels

Dans l'espace R^n, posons :

$R_+^n=\{x\in E \mid x_i\geqq 0,\ \forall i\in[1, n]\}$ et $R_{++}^n=\{x\in E \mid x_i>0,\ \forall i\in[1, n]\}$.

Considérons la fonction :

$$g_0(x)=\sum_{i=1}^n x_i \operatorname{Log}\frac{x_i}{\sum_{i=1}^n x_i}.$$

La fonction $g_0(x)$ est définie et continue pour $x\in R_{++}^n$ mais en posant 0 Log 0=0 et $g_0(0)=0$ on définit $g_0(x)$ pour $x\in R_+^n$.

La fonction $g_0(x)$ a déjà été étudiée dans un autre contexte. C'est par exemple la fonction entropie d'un système dans le problème de l'équilibre chimique (*voir* [2], p. 479) (*voir* également [6]).

Rappelons que la fonction $h(x)=\sum_{i=1}^n x_i \operatorname{Log} x_i$ est définie, continue pour $x\in R_+^n$. D'autre par $h(x)$ est strictement convexe et dérivable pour $x\in R_{++}^n$. Son vecteur dérivé en x : $\partial h/\partial x(x)$ défini par ses composantes :

$$u_i(x)=\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}=(\operatorname{Log} x_i)+1$$

est l'unique sous-gradient de $h(x)$ en x. (Pour la définition et les propriétés des sous-gradients *voir* Rockafellar [9].) Comme $u_i(x)\to-\infty$ quand $x_i\to 0$, $h(x)$

n'admet pas de sous-gradient pour $x \in R^n_+$; $x \notin R^n_{++}$. Ces résultats élémentaires s'étendent à la fonction g_0 de la manière suivante :

PROPOSITION 1 : (*a*) *$g_0(x)$ est définie et continue pour $x \in R^n_+$.*

(*b*) *$g_0(x)$ est homogène et convexe pour $x \in R^n_{++}$.*

Si x, y, $z \in R^n_+$ sont tels que $z = \alpha x + \beta y$ avec $(\alpha, \beta \geqq 0,\ \alpha + \beta = 1)$ et $g(z) = \alpha g(x) + \beta g(y)$ x, y, z sont proportionnels.

(*c*) *$g_0(x)$ est dérivable pour $x \in R^n_{++}$ et son vecteur dérivée en x : $\partial g_0(x)/\partial x$ défini par ses composantes $\partial g_0(x)/\partial x_i = \operatorname{Log} x_i / \sum_{i=1}^{n} x_i$ est l'unique sous-gradient de g_0 en x.*

g_0 n'admet pas de sous-gradient pour $x \in R^n_{++}$, $x \notin R^n_+$; $x \neq 0$. Pour $x = 0$, l'ensemble des sous-gradients de g_0 : $\partial f(0)$ est égal à

$$\partial f(0) = [\operatorname{conv} \{ \partial g_0(x)/\partial x \} \mid x \in R^n_{++}].$$

Considérons la fonction :

$$\boxed{g_1(x) = g_0(x) + [(\operatorname{Log} n) + 1] \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \right],}$$

g_1 étant somme de g_0 et d'une fonction linéaire, les propriétés résumées dans la proposition 1 s'étendent à g_1 avec en plus les résultats suivants :

PROPOSITION 1' : (*a*) *$g_1(x) \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i \geqq 0$ pour $x R^n_+$, $g_1(0) = 0$.*

(*b*) *Si $g_1(x) = g_1(y)$ pour $x \neq y$, x et y ne peuvent être proportionnels et :*

$$\forall z = \alpha x + \beta y; \qquad \alpha \geqq 0, \qquad \beta \geqq 0, \qquad \alpha + \beta = 1,$$
$$g_1(z) < g_1(x) = g_1(y).$$

Démonstration : (*a*) Soit :

$$\overline{X} = [x_i = 1,\ \forall\, 1 \leqq i \leqq n], \qquad \frac{\partial g_0(\overline{X})}{\partial x} = \left[\frac{\partial g_0(\overline{X})}{\partial x_i} = -\operatorname{Log} n \right]$$

Par la propriété 1 (*c*) :

$$\frac{\partial g_0(\overline{X})}{\partial x} \in \partial f(0).$$

Par les propriétés des sous-gradients :

$$g_0(x)-g_0(0) \geqq \left\langle \frac{\partial g_0(\overline{X})}{\partial x}, x \right\rangle, \qquad \forall x \in R_+^n$$

$$\Rightarrow \quad g_0(x)+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\operatorname{Log} n \geqq 0 \quad \Rightarrow \quad g_1(x) \geqq \sum_{i=1}^{n} x_i, \qquad \forall x \in R_+^n.$$

(*b*) La fonction g_1 étant homogène, si $g_1(x)=g_1(y)$ x et y ne peuvent être proportionnels à moins que $x=y=0$. La propriété (*b*) de la proposition 1 conduit au résultat.

2. L'affectation exponentielle

(*a*) Tout secteur trafic entre v_1 et v_n $X=[x(e); e \in E]$ satisfait aux contraintes :

$$\left\{\begin{array}{l} X \geqq 0, \\ y(1)=\sum_{e \in \Omega^+(1)} x(e)=\sum_{e \in \Omega^-(1)} x(e)+F, \\ y(i)=\sum_{e \in \Omega^-(i)} x(e)=\sum_{e \in \Omega^+(i)} x(e), \\ y(n)=\sum_{e \in \Omega^-(n)} x(e)=\sum_{e \in \Omega^+(n)} x(e)+F. \end{array}\right.$$

Soit (P) le polyèdre décrit par ces contraintes. Il est bien connu que les points extrêmes de (P) sont les vecteurs représentatifs des chemins élémentaires joignant v_1 à v_n. Un plus court chemin entre v_1 et v_n est donc une solution du programme linéaire :

$$L_0 \quad \left\{\begin{array}{l} X \in P, \\ z_0=\min z_0(x)=\min \sum_{e \in E} c(e)\, x(e), \end{array}\right.$$

(P) n'étant pas borné, la condition nécessaire et suffisante pour que L_0 ait une solution finie est qu'il n'y ait pas dans G de circuit absorbant, c'est-à-dire de circuit de longueur négative. Cette hypothèse que nous appellerons condition (A) sera supposée réalisée dans toute la suite de cet article. Soit X_0 la solution de L_0. Quand X_0 n'est pas unique, on notera $[X_0]$ l'ensemble des solutions de L_0. Nous ferons pour la démonstration des théorèmes (4) et (6) l'hypothèse suivante : Condition (B) : $\forall v_i \in V$, $\exists$ un chemin joignant v_1 à v_n et passant par v_i. Il est facile de montrer que la condition (B) implique (B′) : $\exists X \in P$ *vérifiant* $X>0$.

Pour chaque sommet v_i $2 \leqq i \leqq n$, posons :

$$f_i(x)=\sum_{e \in \Omega^-(i)} x(e) \operatorname{Log} \frac{x(e)}{y(i)}+[1+\operatorname{Log} n]\, y(i).$$

Pour $i=1$,

$$f_1(X)=F\operatorname{Log}\frac{F}{y(1)}+\sum_{e\in\Omega^-(1)} x(e)\operatorname{Log}\frac{x(e)}{y(1)}+(1+\operatorname{Log} n)\,y(1).$$

Enfin posons $f_\lambda(X)=\lambda\sum_{i=1}^{n} f_i(X)$.

Les fonctions $X\to f_i(X)$ $(i=1,\ \ldots,\ n)$ satisfont les propositions (1) et (1′). Il en est donc de même de $f_\lambda(X)$.

Soit L_λ le programme convexe :

$$\begin{cases} X\in P, \\ z_\lambda=\min z_\lambda(X)=\min[f_\lambda(X)+\sum_{e\in E} c(e)\,x(e)]. \end{cases}$$

Pour $\lambda=0$ on retrouve le programme L_0.

THÉORÈME 4 : (*a*) *$\forall\lambda>0$ le programme L_λ a une solution unique X_λ.*

(*b*) *La fonction $\lambda\to(X_\lambda,\ z_\lambda)$ est continue pour $\lambda>0$.*

La fonction $\lambda\to z_\lambda$ est décroissante.

Quand $\lambda\to 0$, $z_\lambda\to z_0$ et $X_\lambda\to X_0\in[X_0]$.

(*c*) *$X_\lambda>0$.*

Démonstration : (*a*) Par la proposition 1′ :

$$f_i(X)\geqq y(i),\qquad \forall X\geqq 0,\quad \forall i\in[1,\ n].$$

Donc :

$$f_\lambda(X)\geqq\lambda\left[\sum_{i=1}^{n} y(i)\right]\quad\Rightarrow\quad\forall X\in P,\quad z_\lambda(X)\geqq z_0(X)\quad\Rightarrow\quad z_\lambda\geqq z_0 \text{ et } z_\lambda \text{ existe.}$$

Soit. $X_0=[x_0(e)\ :\ e\in E]$ un vecteur représentatif d'un plus court chemin élémentaire t_0 entre v_1 et v_n : $[x_0(e)=F$ si $e\in t_0$ et $x_0(e)=0$ si $e\notin t_0]$.

On vérifie alors que

$$\forall i\in[1,\ n],\quad \sum_{e\in\Omega^-(i)} x_0(e)\operatorname{Log}\frac{x_0(e)}{y_0(i)}=0.$$

En posant $y_0(i)=\sum_{e\in\Omega^-(i)} x_0(e)$,

$$z_\lambda(X_0)=\lambda(1+\operatorname{Log} n)\left[\sum_{i=1}^{n} y_0(i)\right]+z_0.$$

Comme d'autre part :

$$z_\lambda(X) \geqq \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} y(i) \right] + z_0, \qquad \forall X \in P,$$

pour $X \in P$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^{n} y(i) > \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} y_0(i) \right] (1 + \operatorname{Log} n)$$

on aura $z_\lambda(X) > z_\lambda(X_0)$.

Posons :

$$P' = P \cap \left[X : \sum_{i=1}^{n} y(i) \leqq \lambda \left[\sum_{i=1}^{n} y_0(i) \right] (1 + \operatorname{Log} n) \right],$$

P' est un polyèdre borné donc compact et on a :

$$\operatorname{Inf}[z_\lambda(X) \mid X \in P] = \operatorname{Inf}[z_\lambda(X) \mid X \in P'] = \min [z_\lambda(X) \mid X \in P'].$$

Ce qui prouve que X_λ existe et $X_\lambda \in P'$. L'unicité de X_λ se déduit aisément de la proposition $1'(b)$.

(b) Comme $X_\lambda \in P'$, $\forall \lambda \geqq 0$, les résultats de (b) sont des applications de théorèmes classiques d'analyse sur le comportement du minimum d'une fonction continue dépendant d'un paramètre λ sur un ensemble compact.

(c) C'est le point important du théorème.

Supposons (c) faux. Soit $e_0 \in E$ tel que $x_\lambda(e_0) = 0$.

Soit un chemin $t = [e_0, e_1, \ldots, e_k]$ dont le premier arc est e_0 et le dernier arc e_k a pour extrémité finale v_n. Parcourant t en partant de e_0 vers e_k, on trouvera un arc noté e d'extrémité v_i tel que $x_\lambda(e) = 0$ et $y(i) > 0$ [puisque $x_\lambda(e_0) = 0$ et $y(n) = \sum_{e \in \Omega^-(n)} x(e) > 0$].

Mais comme par (B') $\exists$ une solution $\overline{X} > 0$, par les théorèmes d'optimalité des programmes convexes (*voir* [9], p. 281, théorème 28.2) X_λ ne peut être solution de L_λ puisque $z_\lambda(X)$ n'admet pas de sous-gradient en un point X_λ tel que [$x_\lambda(e) = 0$ et $y(i) > 0$].

$\Rightarrow$ Donc $X_\lambda > 0$.

DÉFINITION : L'affectation exponentielle A_λ de paramètre $\lambda >$ entre v_1 et v_n est le vecteur trafic X_λ solution du programme L_λ.

Posons pour chaque sommet $v_i (i \leqq i < n)$:

$$f'_i(X) = \sum_{e \in \Omega^+(i)} x(e) \operatorname{Log} \frac{x(e)}{y(i)} + (1 + \operatorname{Log} n)\, y(i).$$

Pour $i=n$:

$$f'_n(X)=F\ \mathrm{Log}\frac{F}{y(n)}+\sum_{e\in\Omega^+(n)} x(e)\ \mathrm{Log}\frac{x(e)}{y(n)}+(1+\mathrm{Log}\ n)\,y(n),$$

$$f'_\lambda(X)=\lambda\sum_{i=1}^{n} f'_i(X).$$

$$z'_\lambda(X)=f'_\lambda(X)+\sum_{e\in E} c(e)\,x(e).$$

Lemme 5 :

$$\forall X\in P,\quad z_\lambda(X)=z'_\lambda(X).$$

Démonstration : Soit $X\in P$:

$$f_\lambda(X)=\lambda\left[F\ \mathrm{Log}\frac{F}{y(1)}+\sum_{e\in E} x(e)\ \mathrm{Log}\ x(e)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\sum_{e\in\Omega^-(i)} x(e)\ \mathrm{Log}\ y(i)\right]+\lambda[1+\mathrm{Log}\ n]\left[\sum_{i=1}^{n} y(i)\right],$$

$$f_\lambda(X)=\lambda\left[F\ \mathrm{Log}\ F+\sum_{e\in E} x(e)\ \mathrm{Log}\ x(e)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n} y(i)\ \mathrm{Log}\ y(i)\right]+\lambda[(1+\mathrm{Log}\ n)]\left[\sum_{i=1}^{n} y(i)\right],$$

$$f_\lambda(X)=\lambda\left[F\ \mathrm{Log}\frac{F}{y(n)}+\sum_{e\in E} x(e)\ \mathrm{Log}\ x(e)\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{n}\sum_{e\in\Omega^+(i)} x(e)\ \mathrm{Log}\ y(i)\right]+\lambda(1+\mathrm{Log}\ n)\left[\sum_{i=1}^{n} y(i)\right]=f'_\lambda(X).$$

C.Q.F.D.

3. Résolution de L_λ

Nous poserons :

$$\bar{c}_\lambda(e)=e^{-(c(e)/\lambda)-(1+\mathrm{Log}\,n)}$$

La matrice $A(\lambda)\in R^{n\times n}$ sera définie par : $a_{ii}=0$.

Si il n'existe aucun arc joignant v_i à v_j $a_{ij}=0$.

Si il existe e tel que $or(e)=v_i$ et $ex(e)=v_j$ $a_{ij}=\bar{c}_\lambda(e)$.

Posons :

$$u_1^T=[1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0],\qquad u_n^T=[0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1],$$
$$\omega=[\omega(i);\ i=1,\ \ldots,\ n],\qquad \omega'=[\omega'(i);\ i=1,\ \ldots,\ n].$$

THÉORÈME 6 : (*a*) *Le système linéaire* $[I - A^T(\lambda)]\,\omega = u_1$ *a une solution unique* $\omega > 0$.

Le système linéaire $[I - A(\lambda)]\,\omega' = u_n$ *a une solution unique* $\omega' > 0$.

La solution X_λ *de* L_λ *est donnée par :*

$$\boxed{x_\lambda(e) = F\,\frac{\bar{c}_\lambda(e)\,\omega[or(e)]\,\omega'[ex(e)]}{\omega(n)}.}$$

(*b*) *La valeur de* L_λ *est* $z_\lambda = -\lambda F \operatorname{Log} \omega(n) + \lambda F(1 + \operatorname{Log} n)$.

Démonstration : (*a*) Par le théorème 4, X_λ existe et $X_\lambda > 0$. Si $\{\partial z_\lambda(X_\lambda)/\partial x(e);\ e \in E\}$ est le gradient de $z_\lambda(X)$ en X_λ, par les théorèmes d'optimalité des programmes convexes ([9], p. 283, théorème de Kuhn et Tucker), à chaque contrainte de (P) décrivant la conservation du trafic en $\{u_i\}$, on peut associer une variable duale optimale notée $\mu(i)$ et les conditions de Kuhn et Tucker s'écrivent :

$$x_\lambda(e)\left[\frac{\partial z_\lambda(X_\lambda)}{\partial x(e)} - \mu[or(e)] + \mu[ex(e)]\right] = 0, \qquad \forall e \in E.$$

Comme $x_\lambda(e) > 0$ par le théorème 4 (*c*), $\forall e \in E$, on a :

$$\boxed{\frac{\partial z_\lambda(X_\lambda)}{\partial x(e)} = \operatorname{Log}\frac{x_\lambda(e)}{y_\lambda[ex(e)]} + 1 + \operatorname{Log} n + \frac{1}{\lambda}c(e) \;= +\mu[or(e)] - \mu[ex(e)]} \tag{1}$$

en notant $y_\lambda(i)$, $1 \leqq i \leqq n$ le trafic passant par le nœud i dans la solution optimale X_λ.

Posons $\omega(i) = e^{\mu(i)}$, $i \in [1, n]$.

Notons que $\omega = [\omega(i);\ i \in [1, n]] > 0$.

Les relations (1) s'écrivent :

$$\forall e \in E, \quad \frac{x_\lambda(e)}{y_\lambda[ex(e)]} = \bar{c}_\lambda(e)\,\frac{\omega[or(e)]}{\omega[ex(e)]}. \tag{2}$$

Posons d'autre part :

$$\frac{F}{y_\lambda(1)} = \frac{\alpha}{\omega(1)}. \tag{2'}$$

Les relations (2), restant inchangées si on multiplie les variables $\omega(i)$; $i \in [1, n]$ par une même quantité, on peut fixer α arbitrairement. Comme le premier membre de (2') est positif et $\omega(1) > 0$ on doit prendre $\alpha > 0$. Fixons donc $\alpha = 1$.

Considérons parmi les relations (2) et (2′) celles associées aux arcs $e \in E$ ayant même extrémité finale $v_i (1 \leq i \leq n)$ et faisons la somme membre à membre de ces relations.

On trouve alors les relations pour chaque sommet $\{v_i\}$:

$$\boxed{\begin{aligned} \omega(i) &= \sum_{e \in \Omega^-(i)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega[or(e)], \qquad i \in [2, n], \\ \omega(1) &= \sum_{e \in \Omega^-(1)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega[or(e)] + 1. \end{aligned}} \tag{3}$$

Par le lemme 5 on peut remplacer dans la fonction objectif $z_\lambda(X)$ par $z'_\lambda(X)$.

Reprenant alors le raisonnement précédent avec la fonction objectif $z'_\lambda(X)$, il existe des variables duales optimales $\mu'(i)\, i \in [1, n]$ et en posant $\omega'(i) = e^{\mu'(i)}\, i \in [1, n]$, le vecteur ω' est solution du système.

$$\boxed{\begin{aligned} \omega'(i) &= \sum_{e \in \Omega^+(i)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega'[ex(e)], \qquad i \in [1, n-1], \\ \omega'(n) &= \sum_{e \in \Omega^+(n)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega'[ex(e)] + 1. \end{aligned}} \tag{3'}$$

On a donc :

$$[I - A^T(\lambda)]\,\omega = u_1,$$

$$[I - A(\lambda)]\,\omega' = u_n.$$

Considérons le vecteur X_λ défini par :

$$x_\lambda(e) = F\,\bar{c}_\lambda(e)\,\frac{\omega[or(e)]\,\omega'[ex(e)]}{\omega(n)}$$

Notons d'abord que $\omega(n) = \omega'(1)$ puisque :

$$\omega'(1) = \langle \omega'^T, u_1 \rangle = \langle \omega'^T, [I - A^T(\lambda)]\,\omega \rangle$$

$$= \langle \omega^T, (I - A(\lambda))\,\omega' \rangle = \langle \omega^T, u_n \rangle = \omega(n).$$

$$\left.\begin{aligned}
&\text{Pour } i \neq 1 : \\
&\quad \sum_{e \in \Omega^-(i)} x_\lambda(e) = F\,\frac{\omega'(i)}{\omega(n)} \sum_{e \in \Omega^-(i)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega[or(e)] = F\,\frac{\omega(i)\,\omega'(i)}{\omega(n)}. \\
&\text{Pour } i = 1 : \\
&\quad \sum_{e \in \Omega^-(1)} x_\lambda(e) = F\,\frac{\omega'(1)}{\omega(n)} \sum_{e \in \Omega^-(1)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega[or(e)] = F\,[\omega(1) - 1]. \\
&\text{Pour } i \neq n : \\
&\quad \sum_{e \in \Omega^+(i)} x_\lambda(e) = F\,\frac{\omega(i)}{\omega(n)} \sum_{e \in \Omega^+(i)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega'[ex(e)] = F\,\frac{\omega(i)\,\omega'(i)}{\omega(n)}. \\
&\text{Pour } i = n : \\
&\quad \sum_{e \in \Omega^+(n)} x_\lambda(e) = F\,\frac{\omega(n)}{\omega(n)} \sum_{e \in \Omega^+(n)} \bar{c}_\lambda(e)\,\omega'[ex(e)] = F\,[\omega'(n) - 1].
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Les relations (4) montrent que $X_\lambda \in P$. D'autre part, elles montrent que X_λ satisfait les relations (2) et (2') c'est-à-dire les relations d'optimalité de Kuhn et Tucker.

Montrons enfin que ω (resp. ω') est solution unique de (3) [resp. de (3')].

Supposons que (3) n'ait pas une solution unique. Ceci signifie que $\exists$ une solution $\bar{\omega}$ celle que $[I - A^T(\lambda)]\bar{\omega} = 0$.

Posons $\omega_1 = \omega + \varepsilon\bar{\omega}$ avec ε suffisamment petit pour que $\omega_1 > 0$. ω_1 est alors solution de (3).

En posant :

$$x'_\lambda(e) = \frac{\omega_1[or(e)]\,\omega'[ex(e)]}{\omega_1[n]}$$

on vérifie que $X'_\lambda = [x'_\lambda(e); e \in E]$ est solution de L_λ, puisque les relations (4) et (2), (2'), sont vérifiées pour X'_λ, ω_1 et ω'. Mais comme la solution de L_λ est unique par le théorème (4) $x'_\lambda(e) = x_\lambda(e)$, $\forall e \in E$.

Donc :

$$\frac{\omega_1(i)}{\omega_1(n)} = \frac{\omega(i)}{\omega(n)}, \qquad \forall i \in [1, n].$$

Ceci montre que $\omega = \omega'$ et on aboutit à une contradiction :

$$(b) \quad z_\lambda(X_\lambda) = \sum_{e \in E} x_\lambda(e)\left[\lambda\left[\operatorname{Log}\frac{x_\lambda(e)}{y_\lambda[ex(e)]} + 1 + \operatorname{Log} n\right] + c(e)\right] + \lambda F\left[\operatorname{Log}\frac{F}{y_\lambda(1)} + 1 + \operatorname{Log} n\right].$$

Par les relations (1), on 1 :

$$z_\lambda(X_\lambda) = \sum_{e \in E} \lambda x_\lambda(e)[\mu\, or(e) - \mu[ex(e)]] + \lambda F[\operatorname{Log}\alpha - \mu(1) + 1 + \operatorname{Log} n],$$

$$z_\lambda(X_\lambda) = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda\mu(i)[\sum_{e \in \Omega^+(i)} x_\lambda(e) - \sum_{e \in \Omega^-(i)} x_\lambda(e)] + \lambda\mu(1)[\sum_{e \in \Omega^+(1)} x_\lambda(e) - \sum_{e \in \Omega^-(1)} x_\lambda(e) - F] + \lambda\mu(n)[\sum_{e \in \Omega^+(n)} x_\lambda(e) - \sum_{e \in \Omega^-(n)} x_\lambda(e)] + \lambda F(1 + \operatorname{Log} n),$$

$$z_\lambda(X_\lambda) = -F\lambda \operatorname{Log}\omega(n) + \lambda F[1 + \operatorname{Log} n].$$

4. Cas général

Supposons que seule la condition (A) soit vérifiée.

THÉORÈME 6 : (a) *L'inverse* $B(\lambda)=\|b_{ij}(\lambda)\|\in R^{n\times n}$ *de la matrice* $I-A(\lambda)$ *existe et* $B(\lambda)\geqq 0$, $b_{ij}(\lambda)>0 \Leftrightarrow \exists$ *un chemin d'origine* v_i *et d'extrémité* v_j.

(b) *Supposons qu'il existe un chemin d'origine* v_i *et d'extrémité* v_j. *Soit* A_λ *l'affectation exponentielle pour un trafic d'intensité* F *entre ces deux sommets.* A_λ *produit sur chaque arc* e *d'origine* v_l *d'extrémité* v_k *un trafic :*

$$x_\lambda(e)=\frac{\bar{c}_\lambda(e)\,b_{il}(\lambda)\,b_{kj}(\lambda)}{b_{ij}(\lambda)}\,.F.$$

(c) *La valeur du programme convexe associé à l'affectation exponentielle entre* v_i *et* v_j *est alors :*

$$z_\lambda=-F.\lambda\ \mathrm{Log}\ b_{ij}(\lambda)+\lambda F[1+\mathrm{Log}\ n].$$

Démonstration : Voir [7].

5. Remarques

(a) Par le précédent théorème, la valeur z_λ du programme L_λ s'obtient par la résolution d'un seul système linéaire : $[I-A^T(\lambda)]\,\omega=u_1$. Pour obtenir la solution X_λ il faut en plus résoudre le système $[I-A(\lambda)]\,\omega'=u_n$. D'autre part, la matrice $B(\lambda)$ fournit directement la solution de tous les programmes L_λ pour tous les couples (v_i, v_j) origine-destination par les formules du théorème 6.

(b) Si $\bar{c}_{ij}$ désigne la longueur cu plus court chemin entre v_i et v_j, $\bar{c}_{ij}=\lim\limits_{\lambda\to 0}-\lambda$ Log $b_{ij}(\lambda)$ par les théorèmes 4 et 6.

$B(\lambda)$ représente donc une approximation de la matrice $\bar{C}=\|\bar{c}_{ij}\|$ des plus courts chemins.

(c) Soit β le minimum des longueurs de tous les circuits du graphe G avec les coûts initiaux. Par la condition (A), $\beta\geqq 0$.

Si $\beta>0$, définissons un nouveau système de coûts :

$$\boxed{c_\lambda(e)=c(e)-\lambda(1+\mathrm{Log}\ n)},\qquad \forall\, e\in E.$$

$\exists\,\lambda_0$ tel que pour $\lambda\leqq\lambda_0$ il n'y ait pas dans G de circuits de longueur négative avec le système de coûts $c_\lambda(e)$. Les résultats précédents sont donc applicables avec les coûts $c_\lambda(e)$ pour $\lambda\leqq\lambda_0$. Notons alors que la quantité :

$$\bar{c}_\lambda(e)=e^{-(c_\lambda(e)/\lambda)-(1+\mathrm{Log}\ n)}$$

est égale :

$$\bar{c}_\lambda(e)=e^{-(c_\lambda(e)+\lambda(1+\mathrm{Log}\, n))/\lambda}=e^{-c(e)/\lambda}.$$

En particulier quand le graphe est sans circuit, on retrouve les quantités introduites au paragraphe II dans le cas de l'affectation de Dial.

Soit :

$$f'_\lambda(X)=f_\lambda(X)-\lambda(1+\mathrm{Log}\, n)\left[\sum_{i=1}^{n} y(i)\right]$$

et

$$z'_\lambda(X)=f'_\lambda(X)+\sum_{e\in E} c(e)\, x(e).$$

Notons que :

$$z'_\lambda(X)=f_\lambda(X)+\sum_{e\in E} c_\lambda(e)\, x(e)-\lambda(1+\mathrm{Log}\, n)F.$$

Pour $\lambda<\lambda_0$ on peut donc remplacer la fonction $z_\lambda(X)$ par $z'_\lambda(X)$ dans L_λ, les résultats précédent sont valables mais en remplaçant $c(e)$ par $c_\lambda(e)$ et en posant :

$$\bar{c}_\lambda(e)=e^{-c(e)/\lambda}, \qquad \forall\, e\in E.$$

La valeur du programme L_λ étant alors $-\lambda F$ Log $\omega(n)$.

6. Interprétation de l'affectation exponentielle A_λ entre $\{v_1\}$ et $\{v_n\}$

LEMME 7 :

$$B(\lambda)=\sum_{i=0}^{\infty}[A(\lambda)]^i \qquad \textit{avec} \quad [A(\lambda)]^0=I. \tag{8}$$

Démonstration :

$$\forall\, m, \quad B(\lambda)=\sum_{i=0}^{m}[A(\lambda)]^i+A^{m+1}(\lambda)\, B(\lambda),$$

comme $A(\lambda)\geqq 0$ et $B(\lambda)\geqq 0$,

$$A^{m+1}(\lambda)\times B(\lambda)\geqq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=0}^{m}[A(\lambda)]^i\leqq B(\lambda).$$

Donc la série $[A(\lambda)]^i$ est convergente et $[A(\lambda)]^m \to 0$ quand $m \to +\infty$. $\Rightarrow [A(\lambda)]^{m+1} \times B \to 0$ quand $m \to +\infty$. $B(\lambda)$ est la limite de la série $[A(\lambda)]^i$.

Sur chaque arc considérons un coût $c_\lambda(e) = c(e) + \lambda[1 + \text{Log } n]$.

Soit $T(i, j)$ l'ensemble des chemins d'origine v_i d'extrémité v_j.

On vérifie alors que $b_{ij}(\lambda) = \sum_{t \in T(i,j)} e^{-c(t)/\lambda}$ où $c(t)$ est la longueur du chemin t avec les coûts $c_\lambda(e)$.

THÉORÈME 7 : *L'affectation exponentielle A_λ revient à charger chaque chemin $t \in T(1, n)$ avec un trafic égal à $r(t) = \mu e^{-c(t)/\lambda}$.*

Démonstration : μ est déterminé de telle façon que :

$$\sum_{t \in T(1, n)} r(t) = F.$$

On en déduit :

$$\mu = \frac{F}{b_{1n}(\lambda)}.$$

D'autre part, l'affectation décrite dans le théorème charge chaque arc e d'origine i, d'extrémité j d'un trafic :

$$x_\lambda(e) = \sum_{t \in T(1, n; e)} e^{-c(t)/\lambda} = \mu\Big(\sum_{t \in T[1, or(e)]} e^{-c(t)/\lambda}\Big) . e^{-c_\lambda(e)/\lambda} . \Big(\sum_{t \in T[ex(e); n]} e^{-c(t)/\lambda}\Big).$$

Donc :

$$x_\lambda(e) = F \times \frac{b_{1i}(\lambda) \times b_{jn}(\lambda)}{b_{1n}(\lambda)} . c_\lambda(e),$$

ce qui est bien le résultat de l'affectation exponentielle définie au théorème 6.

7. On a un théorème analogue au théorème 3 du paragraphe 1

THÉORÈME : *Soit $X = [x(e)]$ un vecteur trafic d'intensité F entre $\{v_1\}$ et $\{v_n\}$. On supposera [en enlevant éventuellement les arcs pour lesquels $x(e) = 0$] que $X > 0$.*

Posons :

$$\bar{c}_\lambda(e) = \frac{x(e)}{y[ex(e)]}$$

et :

$$c(e) = -\lambda \text{ Log } \bar{c}_\lambda(e) - \lambda(1 + \text{Log } n).$$

Avec les coûts $c(e)$ l'affectation exponentielle produit sur chaque arc un trafic égal à $x(e)$.

La démonstration est identique à celle du théorème 2 paragraphe II, en utilisant les formules données par le théorème 6 (§ III).

IV. MÉTHODES D'INVERSION DE MATRICE ET ALGORITHMES DE PLUS COURT CHEMIN

On a vu au paragraphe II, 4, remarque (*b*) que $\bar{c}_{ij} = \lim\limits_{\lambda \to 0} -\lambda \operatorname{Log} b_{ij}(\lambda)$.

Les algorithmes de plus courts chemins sont donc liés aux algorithmes d'inversion de matrice dans la mesure où la matrice $\bar{C} = \| \bar{c}_{ij} \|$ des plus courts chemins apparaît comme la limite de $\| -\lambda \operatorname{Log} b_{ij} \lambda) \|$ quand $\lambda \to 0$.

Nous donnerons dans ce paragraphe les deux propriétés qui permettent de préciser ces liaisons.

DÉFINITION : Soit une fonction continue $\lambda \to a(\lambda)$ vérifiant la propriété (P) : $\exists \lambda_0 > 0$ telle que $\forall \lambda < \lambda_0$, $a(\lambda) \geqq 0$.

Posons alors $r(a) = \lim\limits_{\lambda \to 0, \lambda < \lambda_0} [-\lambda \operatorname{Log} a(\lambda)]$. [On posera $\operatorname{Log}(0) = -\infty$.]

Notons qu'au voisinage de 0, $a(\lambda)$ peut s'écrire :

$$a(\lambda) = e^{-(r(a)/\lambda) + s + \varepsilon(\lambda)} \quad \text{avec} \quad \varepsilon(\lambda) \to 0 \quad \text{quand } \lambda \to 0.$$

Deux fonctions $a(\lambda)$ et $b(\lambda)$ vérifiant la propriété (P) sont équivalentes et on notera $a(\lambda) \sim b(\lambda)$ si $r(a) = r(b)$.

Cette définition s'étend à une matrice $B(\lambda) = \| b_{ij}(\lambda) \|$ où $b_{ij}(\lambda)$ vérifient la propriété (P) : $r(B) = \| r(b_{ij}) \|$.

On a le résultat suivant :

LEMME 1 : *Soient $a_1(\lambda)$, $a_2(\lambda)$ fonctions satisfaisant la propriété* (P).

Si $a_3(\lambda) = a_1(\lambda) + a_2(\lambda)$,

$$r(a_3) = \min [r(a_1), r(a_2)].$$

Si $a_3(\lambda) = a_1(\lambda) a_2(\lambda)$,

$$r(a_3) = r(a_1) + r(a_2).$$

Évident.

LEMME 2 : *Soient* $B_1(\lambda)=\|b_{ij}^1(\lambda)\|$ *et* $B_2(\lambda)=\|b_{ij}^2(\lambda)\|$ *des matrices satisfaisant la propriété* (P).

$$r(B_1+B_2)=\min[r(B_1), r(B_2)],$$
$$r(B_1.B_2)=r(B_1)+r(B_2).$$

En définissant les opérations $\oplus$ et $\otimes$ par : $r_1 \oplus r_2=\min(r_1, r_2)$ et $r_1 \otimes r_2=r_1+r_2$ on retrouve la structure algébrique introduite et étudiée par plusieurs auteurs [1, 8], la fonction $r(a)$ permettant d'associer les opérations $+$ et $\oplus$ d'une part et $\times$ et $\otimes$ d'autre part.

Dans [8] une étude précise de ces relations entre algorithmes de plus court chemin avec les opérations $\oplus$, $\otimes$ et les méthodes d'inversion de matière avec les opérateurs $+$, $\times$ est faite montrant que tous les algorithmes classiques de plus court chemin s'interprètent à la limite comme certains algorithmes d'inversion de matrice (soit exact, soit itératif).

REMARQUE : Il faut noter cependant que toutes les autres méthodes de résolution de système linéaire ou d'inversion de matrices s'appliquent au problème de l'affectation exponentielle sans pouvoir nécessairement s'interpréter à la limite, comme un algorithme de plus court chemin. Citons par exemple des méthodes itératives de projections orthogonales successives sur les hyperplans constitués par chaque contrainte ([5], chap. III, § V, p. 120) ou les méthodes de calcul de minimum d'une forme quadratique ([5], chap. III, § IV, p. 112).

V. CONCLUSION

Les méthodes exactes d'inversion de matrices nécessitent un nombre d'itérations de l'ordre de $O(n^3)$ ou $n=|V|$ comme les algorithmes de calcul de tous les plus courts chemins. Cependant les méthodes d'inversion de matrice sont plus compliquées que les algorithmes de plus court chemin comme le montrent à l'évidence les comparaisons faites au paragraphe IV. [Les méthodes sont aussi longues à condition de calculer la matrice $B(\lambda)=I+\sum_{i=1}^{n} A^i(\lambda)$.]

La matrice $B(\lambda)$ a cependant de nombreux avantages par rapport à la matrice $\overline{C}$ des plus courts chemins.

1° On peut connaître directement à partir de $B(\lambda)$ toutes les affectations exponentielles entre tous les sommets par les formules du théorème 5, paragraphe II.

2° Notons surtout que la matrice $B(\lambda)$ contient beaucoup plus d'informations que la matrice $\bar{C}$. Ceci se remarque sur l'interprétation faite au paragraphe III, 6.

En particulier, on peut reconstruire la matrice $A(\lambda)$ à partir de $B(\lambda)$ alors qu'il n'est pas toujours possible de reconstituer la matrice C à partir de $\bar{C}$ comme le montre l'exemple suivant : G est un graphe à trois sommets v_1, v_2, v_3 et trois arcs $e_1=(v_1, v_2)$; $e_2=(v_2, v_3)$; $e_3=(v_1, v_3)$.

Les systèmes de coûts $[c(e_1)=1,\ c(e_2)=1,\ c(e_3)=2]$ et $c'(e_1)=1,\ c'(e_2)=1,\ c'(e_3)=5$ fournissent la même matrice de plus courts chemins :

$$\bar{c}_{12}=1, \qquad \bar{c}_{23}=1, \qquad \bar{c}_{13}=2, \qquad \bar{c}_{21}=\bar{c}_{32}=\bar{c}_{31}=+\infty.$$

Grâce à ces dernières remarques, les méthodes de calcul développées dans cet article peuvent trouver d'intéressantes applications à divers problèmes liés à des calculs de plus court chemin. Une prochaine publication étudiera quelques-unes de ces extensions.

BIBLIOGRAPHIE

1. B. A. CARRE, *An Algebra for Network Routing Problems*, J. Inst. Math. Appl., vol. 7, 1971, p. 273-294.
2. G. B. DANTZIG, *Linear Programming and Extensions*, Princeton University Press, 1963.
3. G. B. DANTZIG, *On a Shortest Route Through a Network*, Manag. Sc., vol. 6, 1960, p. 187-189.
4. R. B. DIAL, *A Probabilistic Multipath Traffic Assignment Model which Obviates Path Enumeration*, Transp. Res., vol. 5, 1971, p. 83-111.
5. E. DURAND, *Solutions numériques des équations algébriques*, tome II, Masson, Paris, 1961.
6. P. H. FARGIER, *Une méthode de détermination de réseau optimal*, février 1977, I.R.T.
7. J. FONLUPT, *L'affectation exponentielle et le problème du plus court chemin dans un graphe*, Séminaire Analyse numérique n° 275, Mathématiques appliquées, Université scientifique et médicale de Grenoble.
8. M. GONDRAN, *Algèbre linéaire et cheminement dans un graphe*, R.A.I.R.O., 1975, p. 77-98.
9. R. T. ROCKAFELLAR, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1970.