

A. ALJ

A. HAURIE

Commande optimale hiérarchisée d'une population de chaînes de Markov

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 14, n° 3 (1980),
p. 229-247

http://www.numdam.org/item?id=RO_1980__14_3_229_0

© AFCET, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

COMMANDE OPTIMALE HIÉRARCHISÉE D'UNE POPULATION DE CHAINES DE MARKOV (*) (1)

par A. ALJ (2) et A. HAURIE (3)

Résumé. — Nous proposons un modèle de population où chaque individu est décrit par chaîne de Markov commandée. Le processus de recensement est caractérisé et une « superstratégie » est définie comme un système de commande hiérarchisé pour la population. Une technique de calcul numérique est exposée et l'application de ce modèle à la régulation du flot de patients dans une unité de soins ainsi que l'application à l'entretien préventif d'un ensemble de machines sont envisagées.

Abstract. — A population model is proposed where each individual is described by a finite-state controlled Markov chain. The census process is defined and its transition probability matrix is obtained. A hierarchical control of the population process is considered where a superstrategy associates with the observation of the census a common strategy of control of all individual processes. A numerical technique is presented and the applications of the model to Hospital Admission Scheduling and to Group Preventive Maintenance are discussed.

1. INTRODUCTION

Le but de cet article est de formuler puis de résoudre un problème de commande optimale stochastique discret ayant les caractéristiques suivantes : une population est composée de M individus; chaque individu est décrit par une chaîne de Markov commandée et ces M processus sont identiques et à variations indépendantes. A chaque période t on peut choisir une stratégie de contrôle commune à ces M chaînes de Markov et un coût dépend de la stratégie choisie et du recensement de la population. On cherche la meilleure superstratégie qui, à chaque période, associe à l'observation du recensement un choix d'une stratégie de contrôle commune aux M chaînes de Markov.

(*) Reçu mars 1979.

(1) Cette recherche a été rendue possible par une subvention du C.R.S.N.G. du Canada, n° : A 9368 et le soutien financier de la Direction de la recherche de l'École des Hautes Études commerciales de Montréal.

(2) Professeur, Département de Mathématiques, Faculté des Sciences, Université Mohammed-V, Rabat, Maroc. Cette recherche a été réalisée lors d'un séjour de cet auteur à l'école des Hautes Études Commerciales de Montréal.

(3) Professeur, École des Hautes Études Commerciales, 5255 Decelles, Montréal, Québec H3T 1V6, Canada. (Toute correspondance doit être envoyée à cette adresse).

Ce type de problème apparaît dans plusieurs domaines d'application de la recherche opérationnelle. Citons en particulier le problème du contrôle des admissions de patients dans un service hospitalier. Kolesar [12], Offensend [15] et Duguay et Haurie [4] ont utilisé un modèle de chaîne de Markov commandée pour analyser le flot de patients dans une unité de soins. Cependant, des hypothèses très restrictives sur la dynamique des soins pour chaque patient ont dû être faites dans chacune de ces études. Parallèlement à ces études Smallwood et Alii [16] et Kao [10, 11] proposèrent un modèle de population utilisable pour la planification dans un hôpital. Dans ce modèle, chaque patient est décrit par un processus semi-markovien correspondant à la dynamique des soins qu'il reçoit. A partir des données de base sur la dynamique des soins et sur les processus d'arrivée de nouveaux patients dans l'unité, Kao [11] obtint des formules de prévision du recensement des patients. Il va sans dire qu'un tel modèle décrit beaucoup plus fidèlement la réalité que les processus simplifiés utilisés en références [4], [12] et [15]. Collart et Haurie [3 a] et [3 b], utilisèrent ce modèle de population pour étudier les possibilités de régulation de la demande de soins infirmiers grâce un contrôle de l'admission des patients non urgents. Cependant, ces auteurs utilisèrent une approche heuristique pour obtenir une commande « sous-optimale » définie en « boucle ouverte adaptée » ⁽⁴⁾.

Une définition précise du problème de commande optimale et des conditions nécessaires caractérisant une politique d'admission (ou de naissance) optimale ont été obtenues par Alj et Haurie [1] pour une population de processus semi-markoviens en temps continu. La restriction du contrôle au processus de naissance simplifie le problème. De façon générale, il faut envisager des variables de contrôle pouvant agir aussi sur la dynamique de chaque individu ⁽⁵⁾. L'article que nous présentons ici traite de ce problème dans le cas particulier où la population a un nombre fixé et constant de processus individuels, chacun étant décrit par une chaîne de Markov commandée.

Ce cas particulier correspond aussi à une certaine classe de problèmes de fiabilité ou d'entretien préventif d'un ensemble de machines identiques. En effet dans certains systèmes plusieurs éléments sont utilisés en parallèle et le coût de défaillance est une fonction du nombre d'éléments détériorés ou en panne. La politique d'entretien de chaque élément peut alors dépendre du recensement des états de l'ensemble des éléments du système.

⁽⁴⁾ Ces modèles de population peuvent être aussi utilisés dans des problèmes de planification de services sociaux ou d'éducation (*cf.* [6, 8]).

⁽⁵⁾ Dans le cas hospitalier présenté plus haut, cela pourra traduire la possibilité d'agir sur la durée de séjour des patients traités, par exemple par une politique de congés anticipés.

En section 2, nous donnerons une description du processus de population et en section 3 nous poserons le problème de commande optimale du processus de recensement de cette population. En section 4 nous considérerons une technique de résolution numérique inspirée de travaux récemment publiés par Varayia [17] et Forrestier et Varayia [5]. En section 5, nous montrerons les possibilités offertes par cette méthodologie pour résoudre les problèmes d'admission déjà cités. En section 6, nous envisagerons une application à un problème d'entretien préventif d'un parc de machines identiques et une illustration numérique sera alors donnée.

Une étude des processus de population markoviens basée sur les mêmes prémisses mais orientée vers l'obtention de méthodes heuristiques peut être trouvée dans la thèse de Moore [14].

2. POPULATION DE CHAINES DE MARKOV

Soit $\underline{\xi}^{\Delta} = (\xi(t); t \in \{0, 1, 2, \dots\})$ une chaîne de Markov à valeur dans $S = \{1, 2, \dots, s\}$, définie par les matrices des probabilités de transition $P(t) = (P_{ij}(t))_{(i,j) \in S^2}$, $t \in \{0, 1, 2, \dots\}$. Ce processus markovien sera appelé le *processus noyau* de la population.

Nous considérons un ensemble de M processus $\{\xi^k, k \in \{1, 2, \dots, M\}\}$ indépendants et de même loi que le processus noyau $\underline{\xi}$. C'est cet ensemble que nous appellerons une population de chaînes de Markov. Chaque processus $\underline{\xi}^k$ sera désormais appelé un *individu*.

A cette population est associé un processus de recensement

$$\underline{X}^{\Delta} = (X(t), t \in \{0, 1, 2, \dots\})$$

à valeurs dans le sous-ensemble \mathcal{X} des vecteurs $x = (x_i)_{i \in S}$ de $\{0, 1, 2, \dots, M\}^s$ vérifiant :

$$\sum_{i=1}^s x_i = M. \quad (1)$$

Le vecteur aléatoire $X(t) = (X_i(t))_{i \in S}$ a pour composante $X_i(t)$ le nombre d'individus recensés dans l'état $i \in S$ en période t . Pour définir plus précisément le processus \underline{X} , considérons pour chaque individu $\underline{\xi}^k$ le processus

vectorel $\underline{d}^k = (d^k(t), t \in \{0, 1, 2, \dots\})$ à valeur dans $\{0, 1\}^S$ défini ⁽⁶⁾ par

$$\underline{d}^k(t) = (\mathbf{1}_{(\xi^k(t)=i)})_{i \in S}. \quad (2)$$

Le processus de recensement sera alors défini par la somme des processus \underline{d}^k c'est-à-dire :

$$X(t) = \sum_{k=1}^M \underline{d}^k(t), \quad t \in \{0, 1, 2, \dots\}. \quad (3)$$

Dans les applications que nous envisageons, il est important de savoir établir la loi du processus de recensement à partir de celle du processus noyau. Nous allons établir que \underline{X} est une chaîne de Markov en calculant la probabilité de transition

$$P[X(t+1) = x(t+1) | X(t) = x(t)]$$

et en montrant qu'elle ne dépend que de t et $x(t)$.

Introduisons pour cela la notion de *ventilation* du recensement $X(t)$ comme étant la matrice $N(t) = \{N_{ij}(t)\}_{(i,j) \in S^2}$ où chaque élément $N_{ij}(t)$ est le nombre de transitions de l'état i à l'état j observées entre les périodes t et $t+1$. Cette ventilation vérifiera nécessairement les deux « conditions aux bornes » suivantes :

$$\forall i \in S, \sum_{j \in S} N_{ij}(t) = X_i(t) \quad (4)$$

$$\forall j \in S, \sum_{i \in S} N_{ij}(t) = X_j(t+1). \quad (5)$$

Étant donné la réalisation $X_i(t) = x_i(t)$, le vecteur aléatoire

$$\underline{N}_{i.}(t) = (N_{ij}(t))_{j \in S}$$

a une distribution multinominale donnée par :

$$\left\{ \begin{array}{l} P[\underline{N}_{i.}(t) = \underline{n}_{i.}(t) | X_i(t) = x_i(t)] = \frac{x_i(t)!}{\prod_{j \in S} n_{ij}(t)!} \prod_{j \in S} P_{ij}(t)^{n_{ij}(t)} \quad (6) \\ \text{si le vecteur } \underline{n}_{i.}(t) = (n_{ij}(t))_{j \in S} \in \{0, 1, \dots, M\}^S \text{ vérifie la condition (4) :} \\ \text{et} \quad P[\underline{N}_{i.}(t) = \underline{n}_{i.}(t) | X_i(t) = x_i(t)] = 0, \quad \text{sinon.} \end{array} \right.$$

⁽⁶⁾ $\mathbf{1}_{(\xi^k(t)=i)}$ est la fonction indicatrice définie par

$$\mathbf{1}_{(\xi^k(t)=i)} = \begin{cases} 1 & \text{si } \xi^k(t) = i, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les vecteurs aléatoires $N_{i.}(t)$ et $N_{j.}(t)$ sont indépendants si i est différent de j . Nous aurons donc

$$P[N(t) = n(t) | X(t) = x(t)] = \prod_{i \in S} P[N_{i.}(t) = n_{i.}(t) | X_i(t) = x_i(t)]. \quad (7)$$

Soit $x(t)$ et $x(t+1)$ deux recensements dans \mathcal{X} . Appelons $N[x(t+1) | x(t)]$ l'ensemble des ventilations $n(t)$ vérifiant les conditions aux bornes (4) et (5). Nous aurons alors

$$P[X(t+1) = x(t+1) | X(t) = x(t)] = \sum_{n(t) \in N[x(t+1) | x(t)]} P[N(t) = n(t) | x(t)]. \quad (8)$$

Nous venons d'obtenir l'expression de la probabilité de transition de $x(t)$ à $x(t+1)$ pour le processus de recensement \underline{X} . Selon les expressions (4) à (8), il est clair que \underline{X} est une chaîne de Markov.

3. COMMANDE OPTIMALE DU PROCESSUS DE RECENSEMENT

3.1. Notion de superstratégie

Nous supposons maintenant que le processus noyau $\underline{\xi}$ est une chaîne de Markov commandée. Plus précisément, à chaque période t et à tout état $i \in S$ est associé un sous-ensemble compact de \mathbf{R} , noté $U(t, i)$, qui est l'ensemble des actions possibles. Si l'action $u(t, i) \in U(t, i)$ est choisie, les probabilités de transition sont alors définies et on les notera

$$P_{ij}[t, u(t, i)] \stackrel{\Delta}{=} P[\xi(t+1) = j | \xi(t) = i \text{ et } u(t, i)], \quad j \in S. \quad (9)$$

Un vecteur $u(t, \cdot) \in U(t) = \prod_{i \in S} U(t, i)$ définit une *stratégie* de commande du processus $\underline{\xi}$ en période t . Étant donné une suite $\underline{u} = \{u(t, \cdot), t \in \{0, 1, 2, \dots\}\}$ de stratégies, le processus $\underline{\xi}$ est une chaîne de Markov dont les matrices de probabilité de transition sont données par (9). Étant donné \underline{u} , nous pouvons définir comme en section 2 une population de M individus ayant $\underline{\xi}$ pour processus noyau. Nous allons cependant modifier quelque peu la définition d'une population pour permettre de considérer une construction séquentielle de la suite \underline{u} .

Considérons donc M processus $\{\underline{\xi}^k, k \in \{1, 2, \dots, M\}\}$ qui ne sont pas indépendants mais prennent tous leur valeur dans S . Le processus de recensement est défini comme en (1) et (2). Soit $X(t)$ le recensement en période t .

Nous définirons une *superstratégie* comme une application

$$\sigma : \{0, 1, 2, \dots\} \times \mathcal{X} \rightarrow U(t) \quad (10)$$

qui associe à l'observation $\{t, x(t)\}$ une stratégie $u(t, \cdot) \in U(t)$.

Nous supposons que pour chaque processus ξ^k la réalisation d'une transition de l'état i vers l'état j sera un événement, indépendant des transitions effectuées pour les autres processus, dont la probabilité sera donnée par (9). Nous dirons alors que les processus ξ^k sont à *variations indépendantes*.

Avec ces hypothèses, nous pouvons reprendre le développement effectué en section 2 et montrer que le processus de recensement X est une chaîne de Markov commandée, telle que, si on choisit une superstratégie σ , les matrices de probabilité de transition sont données par :

$$\begin{aligned} P[X(t+1) = x(t+1) | X(t) = x(t) \text{ et } \sigma] \\ = \sum_{n(t) \in N[x(t+1) | x(t)]} P[N(t) = n(t) | x(t) \text{ et } \sigma], \end{aligned} \quad (11)$$

où

$$P[N(t) = n(t) | x(t) \text{ et } \sigma] = \prod_{i \in S} P[N_{i.}(t) = n_{i.}(t) | x_i(t) \text{ et } \sigma] \quad (12)$$

et

$$P[N_{i.}(t) = n_{i.}(t) | x_i(t) \text{ et } \sigma] = \frac{x_i(t)!}{\prod_{j \in S} n_{ij}(t)!} \prod_{j \in S} P_{ij}[u^\sigma(t, i)]^{n_{ij}(t)} \quad (13)$$

avec la notation

$$u^\sigma(t, \cdot) \stackrel{\Delta}{=} \sigma[t, x(t)]. \quad (14)$$

Nous avons ainsi défini une population de chaînes de Markov commandées, chaque chaîne étant pilotée par une même stratégie construite itérativement par une superstratégie basée sur l'observation du processus de recensement. Nous avons du même fait établi que le processus de recensement est une chaîne de Markov commandée.

Soit un coût $C[t, x(t), u(t, \cdot)]$, défini comme un nombre réel associé en période t au recensement observé $x(t)$ et à la stratégie commune $u(t, \cdot)$ utilisée sur chaque processus ξ^k , $k \in \{1, 2, \dots, M\}$. Le problème général de commande optimale du processus de recensement est de définir la superstratégie σ^* qui permette d'atteindre la borne inférieure de l'expression

$$J(\sigma) \stackrel{\Delta}{=} E \left[\sum_{v=0}^T C[t, X(t), \sigma[t, X(t)]] \rho(t) \right], \quad (15)$$

où $\underline{\rho} = (\rho(t), t \in \{0, 2, \dots\})$ est une fonction d'actualisation donnée ($\rho(t) = \rho^t$, $0 \leq \rho \leq 1$, par exemple).

Un cas particulier intéressant est celui où les probabilités de transition décrites en (9) ne dépendent pas explicitement de la période t . Dans ces conditions, le processus de recensement est une chaîne de Markov stationnaire quand on utilise une superstratégie stationnaire

$$\sigma : x(t) \mapsto u \in U = \prod_{i \in S}^{\Delta} U(i). \quad (16)$$

Si pour toute superstratégie stationnaire σ le processus de recensement \bar{X} est une chaîne de Markov ayant une seule classe ergodique alors il existe un vecteur de probabilité d'état uniquement défini,

$$\pi(\sigma) = (\pi_{x(t)}(\sigma))_{x(t) \in \mathcal{X}}$$

tel que

$$\pi(\sigma) = \pi(\sigma) \tilde{P}(\sigma), \quad (17)$$

où $\tilde{P}(\sigma)$ est la matrice indicée sur $\mathcal{X} \times \mathcal{X}$ dont l'élément d'indices $(x(t), x(t+1))$ est donnée par

$$\tilde{P}_{x(t), x(t+1)}(\sigma) = P[X(t+1) = x(t+1) | X(t) = x(t) \text{ et } \sigma]. \quad (18)$$

Sous cette condition il est établi [17] que, pour un horizon infini et en l'absence d'actualisation ($\rho(t) = 1$) on a

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} \sum_{t=0}^T [\tilde{P}(\sigma)]^t = \mathbf{1} \pi(\sigma), \quad (19)$$

avec $\mathbf{1} = (1)_{x(t) \in \mathcal{X}}$. Dans ces conditions le coût espéré à long terme par période, défini par

$$J(\sigma) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T+1} E \left[\sum_{t=0}^T C[X(t), \sigma[X(t)]] \right] \quad (20)$$

est tout simplement donné par

$$J(\sigma) = \pi(\sigma) C[., \sigma], \quad (21)$$

où

$$C[., \sigma] = (C[x(t), \sigma[x(t)]])_{x(t) \in \mathcal{X}}. \quad (22)$$

Dans ce cas le problème de commande optimale revient à chercher la superstratégie stationnaire σ^* qui fasse atteindre la borne inférieure de l'ensemble

des valeurs possibles pour $J(\sigma)$. De façon plus précise, soit Σ l'ensemble des superstratégies admissibles, on cherche à résoudre le problème suivant :

$$\text{Min} \{ \pi C[., \sigma] \mid \pi \in \mathcal{P}, \pi \tilde{P}(\sigma) = \pi, \sigma \in \Sigma \}, \quad (23)$$

ou \mathcal{P} est simplexe unité dans \mathbf{R}^x .

En résumé nous avons formulé le problème de commande optimale du processus de recensement comme un problème classique de commande optimale d'une chaîne de Markov. Il s'agira cependant d'une chaîne de Markov de grande dimension et des méthodes particulières devront être utilisées pour résoudre le problème (23).

3.2. Le processus de recensement vu comme une agrégation du processus de population

Une population de M processus où le processus noyau admet s états pourrait être représentée par un seul processus ayant s^M états. Ainsi une population de dix (10) individus décrits par un processus noyau à cinq (5)

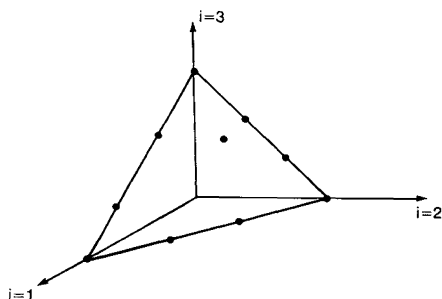


Figure 1. — Ensemble \mathcal{X} pour $M = s = 3$.

états sera représentée par un processus à $5^{10} = 9,76 \times 10^6$ états. La considération du processus de recensement \underline{X} va pouvoir être interprétée comme une façon d'agréger le processus de population. L'importance de cette agrégation sera traduite par le cardinal $|\mathcal{X}|$ de l'ensemble des états de \underline{X} .

L'ensemble \mathcal{X} est l'ensemble des points à coordonnées entières du simplexe de \mathbf{R}^s défini par les contraintes :

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, s, \quad (24)$$

$$\sum_{i=1}^s x_i = M. \quad (25)$$

La figure 1 représente l'ensemble \mathcal{X} dans le cas où $M = 3$ et $s = 3$.

On a donc dans ce cas ⁽⁷⁾ $|\mathcal{X}|_{3,3} = 10$.

On peut facilement calculer de façon récurrente le cardinal $|\mathcal{X}|_{s,M}$ pour toutes les valeurs de M et s . En effet pour $M \equiv 1$ on a $|\mathcal{X}|_{s,1} \equiv s$, cependant que pour $s \equiv 1$ on a $|\mathcal{X}|_{1,M} \equiv 1$. La formule de récurrence générale sera

$$|\mathcal{X}|_{s,M} = 1 + \sum_{k=0}^{M-1} |\mathcal{X}|_{s-1, M-k}. \quad (26)$$

Elle s'établit facilement en considérant les différentes possibilités pour x_s . Si x_s est égal à k , il reste $M-k$ individus à recenser dans $s-1$ états.

TABLEAU I
 $|\mathcal{X}|$ en fonction de s et M

M.. s	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
3	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	
4	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286	...
5	5	15	35	70	126	210	330	495	715	1001	
6	6	21	56	126	252	462	792	1287	2002	3003	...
7	7	28	84	210	462	924	1716	3003	5005	8008	

A partir de cette formule nous avons construit le tableau de la figure 2 qui donne $|\mathcal{X}|_{s,M}$. On pourra constater que

$$|\mathcal{X}|_{5,10} = 1001$$

⁽⁷⁾ $|\mathcal{X}|_{s,M}$ est le nombre d'élément de l'ensemble \mathcal{X} quand il y a M individus décrits par un processus noyau à s états.

ce qui est une contraction considérable par rapport aux 5^{10} états du processus de population.

L'expression générale de $|\mathcal{X}|_{s,M}$ est la suivante :

$$|\mathcal{X}|_{s,M} = \frac{(s+M-1)!}{M!(s-1)!}.$$

3.3. La commande du processus de recensement vue comme un système de commande hiérarchisée

La figure 2 représente le système de commande de la population qui résulte de la commande du processus de recensement décrite en section 3.1. Le premier niveau de commande correspond à la commande de chaque individu ξ^k de la population. Cette commande est réalisée par le biais d'une stratégie $u(t, \cdot)$ qui transforme l'observation de l'état i d'un individu en une action $u(t, i)$. La stratégie $u(t, \cdot)$ est elle-même le résultat de l'observation du recensement par le système de commande du deuxième niveau qui utilise la superstratégie σ . Le coût est associé au recensement et à la stratégie de contrôle utilisée au premier niveau.

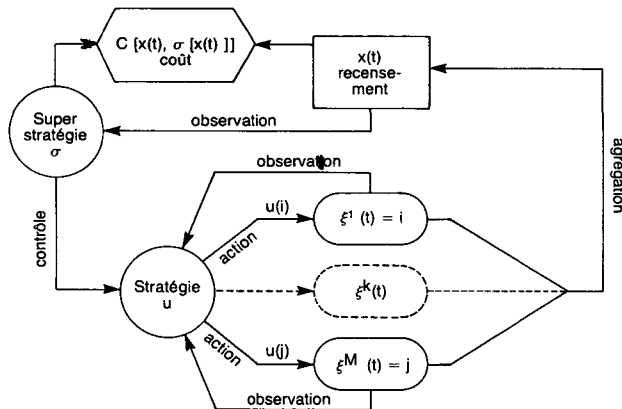


Figure 2. — Système de contrôle de la population.

4. TECHNIQUE DE RÉOLUTION NUMÉRIQUE DANS LE CAS D'UNE POPULATION STATIONNAIRE

La définition d'une superstratégie optimale pour une population de dix individus décrits par un processus noyau à cinq états revient à la résolution d'un problème de commande optimale d'une chaîne de Markov ayant un

millier d'états. Il s'agit donc d'un problème de grande dimension pour lequel des techniques de décomposition devront être utilisées. Nous nous restreindrons au cas où le processus noyau est une chaîne de Markov stationnaire. Nous avons vu en section 3.1 que la superstratégie optimale σ^* est alors obtenue en résolvant le problème

$$\text{Min} \{ \pi C[., \sigma] \mid \pi \in \mathcal{P}, \pi \tilde{P}(\sigma) = \pi, \sigma \in \Sigma \}. \quad (27)$$

Deux méthodes peuvent être utilisées pour résoudre ce problème. La première consiste à utiliser une formulation de programmation linéaire, dans le cas où l'ensemble des actions possibles [ici les stratégies $u(.)$] est fini. Ce programme linéaire sera de dimension considérable. Une technique de décomposition de Dantzig et Wolfe pourrait être alors appliquée comme l'indiquent Kushner et Chen [13]. La seconde méthode consiste à utiliser une technique d'approximation dans l'espace des stratégies telle que proposée par Bellmann [2] ou Howard [9] en évitant cependant de résoudre à chaque itération un ensemble de s équations simultanées. C'est cette méthode qui a été récemment proposée par Forestier et Varayia [5] et Varayia [17]. Pour notre problème la méthode de Varayia consiste à utiliser l'algorithme suivant :

Étape 1 : Choisir un vecteur $V \in \mathbb{R}^{|X|}$ arbitraire. Par exemple on prendra $V = 0$.

Étape 2 : Pour tout $x \in X$ calculer l'expression

$$h_x(V) = \text{Min} \{ \tilde{Q}_x[u(.)]V + C[x, u(.)] \mid u(.) \in U \} \quad (28)$$

où $\tilde{Q}_x[u(.)]$ est la ligne d'indice x de la matrice

$$P[u(.)] - I$$

et $C[x, u(.)]$ est le coût associé à l'état x et à la stratégie $u(.)$.

Étape 3 : Calculer les bornes :

$$\begin{aligned} \underline{h}(V) &= \text{Inf} \{ h_x(V) \mid x \in X \}, \\ \bar{h}(V) &= \text{Sup} \{ h_x(V) \mid x \in X \}. \end{aligned}$$

(a) Si $\bar{h}(V) - \underline{h}(V) < \varepsilon$, où ε est un seuil fixé à l'avance, on considère que l'optimum est atteint. Aller alors en étape 4.

(b) Si $\bar{h}(V) - \underline{h}(V) \geq \varepsilon$ on modifie le vecteur V de la façon suivante :

$$V + \delta \left\{ h(V) - \frac{1}{|X|} \sum_{x \in X} h_x(V) \right\} \rightarrow V, \quad (30)$$

où δ est un pas qui devra être choisi suffisamment petit. Retourner alors à l'étape 2.

Étape 4 : L'optimisation réalisée en (28) définit la stratégie optimale

$$\sigma^* : x \mapsto \sigma^*(x) = u^*(.). \quad (31)$$

La valeur commune des $h_x(V)$ définit le coût optimal

$$J(\sigma^*) = \pi^* C[., \sigma^*]. \quad (32)$$

Cet algorithme est attrayant par le fait de la décomposition par lignes qui apparaît dans l'optimisation (28) suivie d'une modification très simple de la variable duale V en (30). Il offre en outre l'avantage de fournir à chaque itération un intervalle $[h(V), \bar{h}(V)]$ qui contient la valeur optimale cherchée,

5. APPLICATIONS POSSIBLES A LA RÉGULATION DU FLOT DES PATIENTS DANS UNE UNITÉ DE SOINS

Considérons une unité de soins d'un hôpital où sont admis des patients souffrant de certaines maladies et devant être opérés. Il y a M lits dans cette unité de soins. Un lit peut être dans s états différents selon l'état du patient qui l'occupe. Si une chaîne de Markov peut représenter l'évolution du processus noyau, l'unité de soins peut être considérée comme une population de M individus. C'est l'hypothèse faite par Kolesar [12] puis reprise par Offensend [15] et Duguay et Haurie [4]. Dans ces travaux le processus noyau a deux états décrits dans le tableau II.

TABLEAU II
États d'un lit

État i d'un lit	Interprétation
1.....	Le lit est innocupé
2.....	Un patient occupe le lit

Le processus noyau sera donc décrit par le graphe de la figure 3.

La probabilité p_{11} est celle qu'un lit innocupé un jour le soit encore le jour suivant; p_{12} est la probabilité qu'un lit innocupé un jour soit occupé le

lendemain; p_{21} est la probabilité qu'un lit occupé un jour soit inoccupé le lendemain et finalement p_{22} est la probabilité qu'un lit occupé un jour soit encore occupé le lendemain.

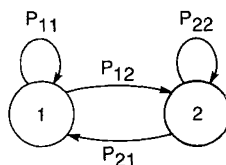


Figure 3. — Graphe de transitions pour un lit.

Une description plus fidèle de la dynamique des patients hospitalisés dans un département de chirurgie serait obtenue si on considérait les huit états suivants un lit :

TABLEAU III

Description des états d'un lit

État i d'un lit	Interprétation
1.....	Le lit est inoccupé
2.....	Le lit est occupé par un patient dans le stade préopératoire avec des analyses et consultations à faire
3.....	Le lit est occupé par un patient dans le stade préopératoire mais avec des analyses et consultations déjà faites
4.....	Le lit est occupé par un patient dans le stade postopératoire (1 ^{er} jour)
5.....	Le lit est occupé par un patient dans le stade postopératoire (2 ^e jour ou plus)
6.....	Le lit est occupé par un patient ayant une complication postopératoire (1 ^{er} jour)
7.....	Le lit est occupé par un patient ayant une complication postopératoire (2 ^e jour ou plus)
8.....	Le lit est occupé par un patient en convalescence

La figure 4 décrit le graphe des transitions possibles du processus noyau.

La considération de ce processus permet de distinguer plusieurs états du patient en cours de traitement. Un patient en stade préopératoire engendre une charge de travail moindre qu'un patient au premier jour du stade postopératoire. Un patient ayant une complication postopératoire engendrera une très lourde charge de travail. Un patient qui est admis sans avoir eu déjà les

analyses et les consultations faites en clinique externe aura une certaine probabilité de ne pas être opéré dès le lendemain etc.

Nous considérons la population représentée pour les M lits d'une unité de chirurgie où à chaque lit correspond la chaîne de Markov décrite plus haut. Le recensement $X(t)$ donne, au jour t , le nombre de lits se trouvant dans chacun des états possibles. Ce recensement est générateur de coût dans la mesure où la charge de travail dans l'unité s'éloigne de charge « normale ».

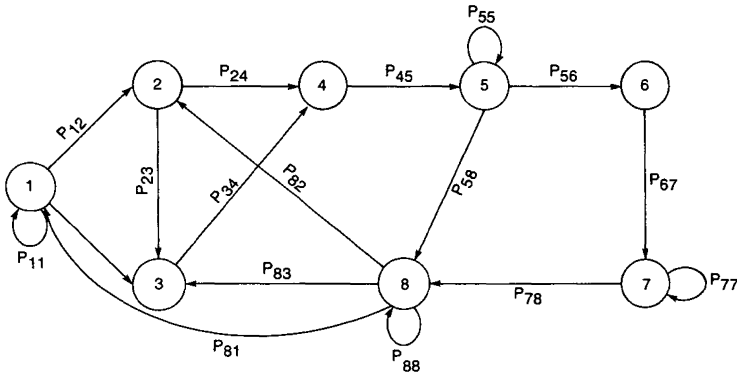


Figure 4. — Graphe des transitions du processus noyau.

Le processus noyau peut être commandé s'il y a une possibilité d'action sur certaines probabilités de transition. Nous en considérerons deux portant respectivement sur les admissions et les congés de patients.

Nous supposons qu'il existe deux politiques d'admission : La politique d'*admission normale* donne une assez forte probabilité à l'admission d'un patient dont les analyses et consultations ne sont pas faites. La politique d'*admission sélective* réduit cette probabilité cependant que la politique d'*admission restreinte* garde vide un lit qui se libère.

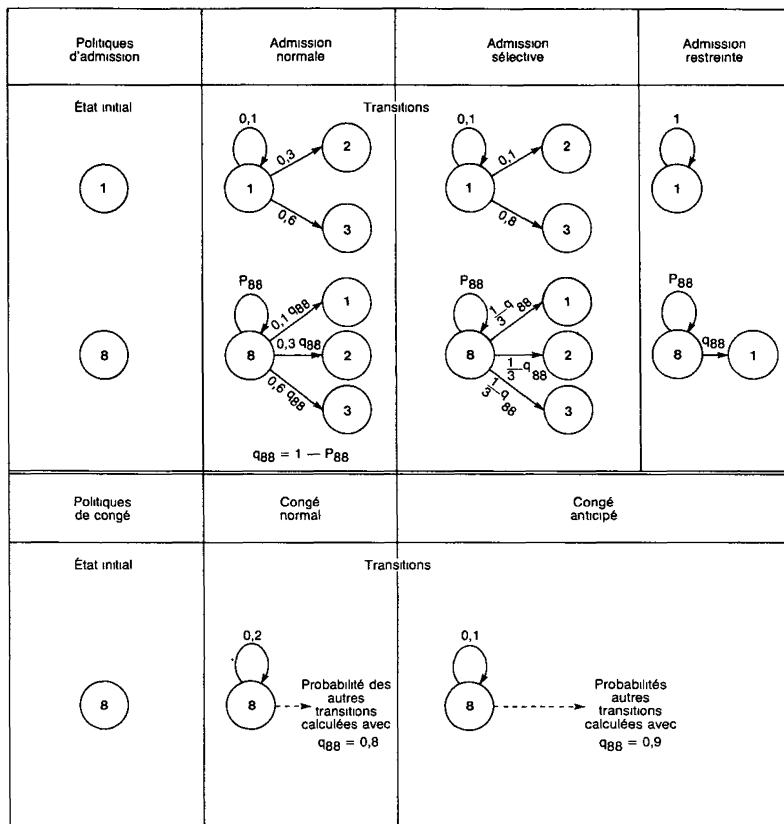
De façon similaire nous supposons qu'il existe deux politiques de congé. La *politique normale* accorde une plus forte probabilité d'un séjour prolongé que la politique de *congé anticipé*. Le tableau IV décrit les probabilités de transition affectées par ces actions; les valeurs données aux probabilités sont indicatives.

Une stratégie $u(\cdot)$ sera une règle d'action décrivant l'action à entreprendre quand un lit se trouve dans un état donné.

Une superstratégie sera une règle de choix de la stratégie $u(\cdot)$ selon la valeur prise par le recensement de patients dans l'unité.

TABLEAU IV

Schéma donnant un exemple des actions possibles sur le processus noyau



Au coût du recensement doit être rajouté le coût de la stratégie $u(\cdot)$ associée. Le problème de commande optimale de cette population revient à chercher les conditions de recensement pour lesquelles on appliquera au niveau de chaque lit une admission normale sélective ou restreinte ou bien un congé normal ou anticipé de façon à rendre minimal le coût moyen espéré par période.

6. ENTRETIEN PRÉVENTIF D'UN ENSEMBLE DE MACHINES

Dans cette section nous traiterons d'un problème d'entretien préventif plus général que ceux concernant une seule machine (cf. [7]).

Considérons un système composé de trois (3) éléments. Tous les éléments sont d'un type commun et fonctionnent dans les mêmes conditions. Chaque

élément est un sous-système qui est décrit par une chaîne de Markov. Les états correspondent à différents niveaux de détérioration.

Le tableau V décrit les quatre états possibles de chaque élément.

TABLEAU V
États d'un élément

État d'une machine	Interprétation
1.....	Condition parfaite Faible détérioration Détérioration marquée En panne
2.....	
3.....	
4.....	

TABLEAU VI
Actions possibles pour un élément

Actions	Interprétation
1.....	Ne rien faire Réparer l'élément Remplacer l'élément
2.....	
3.....	

TABLEAU VII
Chaîne de Markov commandée correspondant à un élément

$i \backslash j$	1	2	3	4	Action
1.....	0	7/8	1/16	1/16	1
2.....	0	3/4	1/8	1/8	
3.....	0	0	1/2	1/2	
4.....	0	0	0	1	
1.....	0	1	0	0	2
2.....	0	1	0	0	
3.....	0	1	0	0	
4.....	0	1	0	0	
1.....	1	0	0	0	3
2.....	1	0	0	0	
3.....	1	0	0	0	
4.....	1	0	0	0	

A chaque période correspond une inspection où l'on observe l'état des trois éléments. Pour chaque élément il y a trois actions possibles décrites dans le tableau VI.

Chaque élément est ainsi décrit par une chaîne de Markov commandée définie par le tableau VII et qui constitue le processus noyau de cette population de trois individus.

Si un élément est dans l'état i et que l'on entreprend l'action a alors il y a un coût $k(i, a)$ défini dans le tableau VIII.

TABLEAU VIII
Coûts $k(i, a)$ par période et par élément

Action \ État	1	2	3	4
1.....	0	1	3	6
2.....	4	4	4	∞
3.....	6	6	6	6

La chaîne de Markov commandée définie dans les tableaux 7 et 8 correspond à l'exemple traité dans l'ouvrage de Hillier et Lieberman ([18], chap. 12). Nous considérons ici que, outre les coûts d'entretien $k(i, a)$, il y a un coût de pénalité élevé quand deux éléments ou plus sont fortement détériorés soit en panne. Plus précisément nous considérons un coût de défaillance $f(x(t))$ défini par

$$f(x(t)) = \begin{cases} 25 & \text{si } x_3(t) + x_4(t) \geq 2, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (33)$$

Ainsi, lorsque le recensement des trois éléments est $x(t)$ et lorsque la super-stratégie σ est utilisée le coût total $c[x(t), \sigma[x(t)]]$ sera défini par

$$c[x(t), \sigma[x(t)]] = \sum_{i=1}^4 k(i, u^\sigma(i)) \cdot x_i(t) + f(x(t)). \quad (34)$$

La solution du problème consistant à minimiser le coût espéré moyen par période à long terme est fournie dans le tableau IX. Elle a été obtenue en appliquant la méthode de calcul décrite en section 4.

La valeur du coût moyen par période est comprise entre 7,3 et 7,4.

On pourra remarquer que, selon le recensement un élément qui se trouve dans l'état 3 est soit remplacé soit réparé.

TABLEAU IX
Superstratégie optimale

Recensement				Stratégie			
$x_1 (t)$	$x_2 (t)$	$x_3 (t)$	$x_4 (t)$	$u (1)$	$u (2)$	$u (3)$	$u (4)$
0	0	0	3	.	.	.	3
0	0	1	2	.	.	2	3
0	0	2	1	.	.	2	3
0	0	3	0	.	.	3	.
0	1	0	2	.	1	.	3
0	1	1	1	.	1	2	3
0	1	2	0	.	1	3	.
0	2	0	1	.	1	.	3
0	2	1	0	.	1	3	.
0	3	0	0	.	1	.	.
1	0	0	2	1	.	.	3
1	0	1	1	1	.	2	3
1	0	2	0	1	.	3	.
1	1	0	1	1	1	.	3
1	1	1	0	1	1	3	.
1	2	0	0	1	1	.	.
2	0	0	1	1	.	.	3
2	0	1	0	1	.	3	.
2	1	0	0	1	1	.	.
3	0	0	0	1	.	.	.

7. CONCLUSION

Nous avons caractérisé le processus de recensement d'une population composée de M individus représentés chacun par une chaîne de Markov. Nous avons proposé une formulation d'un problème de commande hiérarchisée de cette population qui se ramène à la commande optimale d'une chaîne de Markov de grande dimension. En utilisant un algorithme récemment proposé, nous pouvons résoudre numériquement ce type de problème. Un exemple d'application à l'entretien préventif d'un ensemble de machines identiques à détérioration progressive, a permis d'illustrer la notion de superstratégie. En effet, dans cet exemple, la stratégie d'entretien appliquée à chaque machine est modifiée selon le recensement de la population concernée.

REMERCIEMENTS

Les résultats numériques présentés ont été obtenus grâce à la collaboration de Serge Pelland qui réalisa la programmation de l'algorithme.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research

BIBLIOGRAPHIE

1. A. ALJ et A. HAURIE, *Description and Control of a Continuous Time Population Process*, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC 25, n° 1, février 1980.
 2. R. BELLMANN, *Dynamic Programming*, Princeton University Press, 1957.
 3. (a) D. COLLART et A. HAURIE, *On a Suboptimal Control of a Hospital Inpatient Admission System*, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC 21, n° 3, 1976, p. 233-238.
 3. (b) D. COLLART et A. HAURIE, *On the Control of Care Supply and Demand in a Urology Department* dans *European Journal of Operational Research* (à paraître).
 4. C. R. DUGUAY et A. HAURIE, *Étude analytique du flux des patients dans une unité de soins à l'aide d'un modèle markovien*, R.A.I.R.O., Recherche Opérationnelle, vol. 10, n° 10, 1976, p. 7-25.
 5. J. P. FORESTIER et P. VARAYIA, *Stochastic Control of Large Markov Chains in Control and Management of Integrated Industrial Complexes*, SINGH and TITLI, ed., Pergamon Press, 1977.
 6. S. FANSHEL, *The Welfare of the Elderly, A Systems Analysis Viewpoint*, Policy Science, vol. 6, 1975, p. 343-357.
 7. I. B. GERTSBAKH, *Models of Preventive Maintenance*, North-Holland, 1977.
 8. A. HAURIE, *Modèle de population pour la planification de l'offre de service*, l'Actualité Économique, octobre-décembre 1978, p. 500-520.
 9. R. A. HOWARD, *Dynamic Programming and Markov Processes*, Cambridge, M.I.T. Press, 1960.
 10. E. P. C. KAO, *A Semi-Markov Model to Predict Recovery Progress of Coronary Patients*, Health Services Research, 1972, p. 191-208.
 11. E. P. C. KAO, *A Semi-Markovian Population Model with Application to Hospital Planning*, I.E.E.E. Transactions on Systems Man and Cybernetics, vol. SMC 3, n° 4, 1973, p. 327-336.
 12. P. KOLESAR, *A Markovian Decision Model for Hospital Admission Scheduling*, Management Science, vol. 16, 1970, p. B-384-396.
 13. H. J. KUSHNER et C. H. CHEN, *Decomposition of Systems Governed by Markov Chains*, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC 19, n° 5, 1974, p. 501-507.
 14. J. M. MOORE, *Optimal Control in Markov Population Processes*, Ph. D. Dissertation, Department of Engineering Economic Systems, Stanford University, May 1977.
 15. F. L. OFFENSEND, *A Hospital Admission System Based on Nursing Work Load*, Management Science, vol. 19, n° 2, 1972, p. 132-138.
 16. R. D. SMALLWOOD, G. E. MURRAY, D. D. SILVA, E. J. SONDIK et L. M. KLAINER, *A Medical Services Requirements Model for Health System Design*, Proceedings of I.E.E.E., vol. 57, n° 11, 1969, p. 1880-1887.
 17. P. VARAYIA, *Optimal and Suboptimal Stationary Controls for Markov Chains*, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, vol. AC 23, n° 4, 1978.
 18. F. S. HILLIER et G. J. LIEBERMAN, *Operations Research*, 2nd ed., Holden Day, 1974.
- vol. 14, n° 3, août 1980