RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

PH. MICHEL

Programmes mathématiques mixtes. Application au principe du maximum en temps discret dans le cas déterministe et dans le cas stochastique

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 14, nº 1 (1980), p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1980__14_1_1_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 14, n° 1, février 1980, p. 1 à 19)

PROGRAMMES MATHÉMATIQUES MIXTES. APPLICATION AU PRINCIPE DU MAXIMUM EN TEMPS DISCRET DANS LE CAS DÉTERMINISTE ET DANS LE CAS STOCHASTIQUE (*)

par Ph. MICHEL [1]

Résumé. — *Une notion nouvelle, les programmes mathématiques mixtes, se prête particulièrement bien à l'étude des systèmes évolutifs en temps discret : la condition nécessaire d'optimalité est obtenue sous une forme qui donne le maximum du lagrangien par rapport à la variable de décision; et ce résultat s'applique directement à un problème d'évolution déterministe en temps discret. Le même résultat s'applique au cas stochastique, lorsque le nombre des événements aléatoires est fini, sans condition d'indépendance dans le temps. On illustre cette étude par une application à un modèle simple de gestion de portefeuille : la décision optimale est obtenue en comparant les espérances conditionnelles par rapport au passé, des valeurs futures des avoirs, compte tenu des coûts de transaction.*

Abstract. — *A new formulation in Mathematical Programming is proposed, which is well adapted to the study of discrete time evolution systems. In this formulation, the maximum of the Lagrangian with respect to the control variables is directly obtained as a necessary condition for optimality. It applies without difficulty to a discrete time maximum principle in a deterministic case. It applies also to a stochastic case with a finite number of events. This is illustrated by a simple model of portofolio choice in which the probabilities depend on all the past.*

1. PROGRAMMES MATHÉMATIQUES MIXTES

1.1. Problème

On considère le programme mathématique suivant : *maximiser* $f^0(x, u)$ *sur l'ensemble des éléments* (x, u) *de* $X \times U$ *qui vérifient les contraintes*

$$\left.\begin{array}{rl} \text{pour } 1 \leqq i \leqq m_0 : & f^i(x, u) \geqq 0, \\ \text{pour } m_0+1 \leqq i \leqq m : & f^i(x, u) = 0. \end{array}\right\} \qquad (1.1)$$

X est un sous-ensemble *convexe* de l'espace euclidien à n dimensions $\mathbb{R}^n$ et U est un ensemble *quelconque*; les fonctions numériques f^i, $0 \leqq i \leqq m$, sont définies dans $X \times U$ et vérifient : pour tout *u fixé* dans U, $f^i(x, u)$ est *différentiable par rapport à x dans X*.

(*) Reçu mai 1978.
(1) C.M.E. (Panthéon 219), Université de Paris-I, Paris.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0842/1980/ 1 /$ 5.00

1.2. Définition

Le programme mathématique précédent est dit *mixte au point* (x_0, u_0) s'il vérifie la condition suivante : *si* (x_0, u_0) *est une solution optimale, alors pour tout sous-ensemble fini* $\{u_1, u_2, \ldots, u_N\}$ *de* U, $(x_0, 0)$ *est une solution optimale du problème relaxé :*
maximiser $g^0(x, y)$ *sur l'ensemble des points* (x, y) *de* $X \times Y$ *qui vérifient :*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } 1 \leqq i \leqq m_0 : & g^i(x, y) \geqq 0, \\ \text{pour } m_0+1 \leqq i \leqq m : & g^i(x, y)=0, \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

où Y est le polyèdre convexe des points $y=(y^1, \ldots, y^N)$ de $\mathbb{R}^N$ qui vérifient $\{y^j \geqq 0 (1 \leqq j \leqq N)$ et $\sum_{j=1}^{N} y^j \leqq 1\}$, et $g^i(x, y)$ est définie pour $0 \leqq i \leqq m$, par :

$$g^i(x, y)= \sum_{j=1}^{N} y^j f^i(x, u_j)+\left(1-\sum_{j=1}^{N} y^j\right) f^i(x, u_0). \tag{1.3}$$

Remarque 1 : Il est à noter que les fonctions g^i et l'ensemble Y varient avec le choix du sous-ensemble fini de U; le programme mathématique défini avec les fonctions g^i correspond, dans le cas des problèmes de contrôle optimal, à la forme relaxée par rapport à u du problème initial qui est utilisée dans [5].

On définit les ensembles suivants, pour x élément de X : $A(x)$ est l'ensemble des points $z=(z^0, z^1, \ldots, z^m)$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ qui vérifient : *il existe* $u \in U$ *tel que*

$$\left.\begin{array}{ll} \text{pour } 0 \leqq i \leqq m_0 : & z^i \leqq f^i(x, u), \\ \text{pour } m_0+1 \leqq i \leqq m : & z^i = f^i(x, u), \end{array}\right\} \tag{1.4}$$

$B(x)$ est l'ensemble des points $z=(z^0, z^1, \ldots, z^m)$ de $\mathbb{R}^{m+1}$ qui vérifient : *il existe* $u \in U$ *et* $v \in \mathbf{R}^m$ *tels que*

$$\left.\begin{array}{ll} & z^0 \leqq f^0(x, u), \\ \text{pour } 1 \leqq i \leqq m_0 : & v^i z^i \leqq f^i(x, u), \\ \text{pour } m_0+1 \leqq i \leqq m : & v^i z^i = f^i(x, u). \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

1.3. Critère

Si pour tout x *de* X, *l'enveloppe convexe de* $A(x)$ *est contenue dans l'ensemble* $B(x)$, *alors le programme* 1.1 *est mixte en tout point.*

Démonstration : Soient (x_0, u_0) un élément de $X \times U$ et $\{u_1, \ldots, u_N\}$ un sous-ensemble fini de U. On suppose que $(x_0, 0)$ n'est pas une solution optimale du problème relaxé (1.2), et nous allons montrer que (x_0, u_0) n'est pas une solution optimale du problème (1.1).

Par hypothèse, il existe un point (x, y) de $X \times Y$ qui vérifie :

$$g^0(x, y) > g^0(x_0, 0); \qquad \text{pour } 1 \leqq i \leqq m_0 : \quad g^i(x, y) \geqq 0;$$
$$\text{et pour } m_0+1 \leqq i \leqq m : \quad g^i(x, y) = 0.$$

On a les relations suivantes, pour $0 \leqq j \leqq N$:

$$z_j^0 = f^0(x, u_j) \leqq f^0(x, u_j),$$
$$\text{pour } 1 \leqq i \leqq m_0 : \quad z_j^i = f^i(x, u_j) - g^i(x, y) \leqq f^i(x, u_j),$$
$$\text{pour } m_0+1 \leqq i \leqq m : \quad z_j^i = f^i(x, u_j) - g^i(x, y) = f^i(x, u_j).$$

Par conséquent, les points z_j de $\mathbb{R}^{m+1}$, de composantes $z_j^i (0 \leqq i \leqq m)$, appartiennent à $A(x)$; et le point

$$z = \sum_{j=1}^{N} y^j z_j + \left(1 - \sum_{j=1}^{N} y^j\right) z_0,$$

appartient à l'enveloppe convexe de $A(x)$, donc à $B(x)$; ce point z a pour composantes

$$z^0 = g^0(x, y); \qquad \text{et pour } 1 \leqq i \leqq m : \quad z^i = 0.$$

D'après la définition de $B(x)$, il existe $u \in U$ et $v \in \mathbb{R}^m$ tels que l'on a

$$f^0(x, u) \geqq z^0 > f^0(x_0, u_0),$$
$$\text{pour } 1 \leqq i \leqq m_0 : \quad f^i(x, u) \geqq v^i z^i \quad \text{et} \quad v^i z^i = 0,$$
$$\text{pour } m_0+1 \leqq i \leqq m : \quad f^i(x, u) = v^i z^i = 0,$$

ce qui prouve que (x_0, u_0) n'est une solution optimale du problème (1.1). Le critère est démontré.

COROLLAIRE : *Si pour tout x de X, $A(x)$ est un ensemble convexe, alors le programme est mixte en tout point de $X \times U$.*

Démonstration : Ce critère résulte immédiatement du critère précédent, car l'ensemble $A(x)$ est contenu dans $B(x)$ pour tout x.

REMARQUE 2 : Un cas particulier important où les hypothèses du corollaire sont vérifiées, est celui où U est un ensemble convexe d'un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, pour $0 \leqq i \leqq m_0 : f^i(x, u)$ est concave par rapport à u, et pour $m_0+1 \leqq i \leqq m : f^i(x, u)$ est linéaire affine par rapport à u; dans ce cas le problème 1.1 est un programme mathématique de type « *différentiable par rapport à x et convexe par rapport à u* ». Le cas général permet d'envisager des problèmes plus complexes.

Exemple : On cherche à maximiser $x+f(u)$ sur l'ensemble des éléments $(x, u)\in[0, +\infty]\times[-1, 1]$ qui vérifient :

$$x+u \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad x^2-(1-u^2)^3=0,$$

où $f(u)=+1$ pour $u \geqq 0$ et $f(u)=-1$ pour $u < 0$.

Montrons que ce programme est mixte en tout point. $A(x)$ [respectivement $B(x)$] est l'ensemble des points (a, b, c) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient : il existe $u\in[-1, 1]$ [respectivement $(u, v, w)\in[-1, 1]\times\mathbb{R}^2$] tels que :

$$a \leqq x+f(u); \qquad b \leqq x+u; \qquad c=x^2-(1-u^2)^3$$

[respectivement $a \leqq x+f(u)$; $vb \leqq x+u$; $wc=x^2-(1-u^2)^3$].

Pour $x > 1$, $A(x)$ est contenu dans le convexe $C(x)$ défini par

$$a \leqq x+1; \qquad b \leqq x+1; \qquad c > 0;$$

et $C(x)$ est contenu dans $B(x)$: $(a, b, c)\in C(x)$ est obtenu pour $u=1$, $v=1$ et $w=x^2/c$.

Pour $x\in[0, 1]$, $A(x)$ est contenu dans le convexe $D(x)$ défini par

$$a \leqq x+1; \qquad b\in\mathbb{R}; \quad c\in\mathbb{R};$$

et $D(x)$ est contenu dans $B(x)$: $(a, b, c)\in D(x)$ est obtenu pour $v=0$, $w=0$ et $u=(1-x^{2/3})^{1/2}$.

Considérons les mêmes données à l'exception de l'ensemble des valeurs de u : $U=\{-1, 0, 1\}$; alors les hypothèses du critère ne sont pas vérifiées; néanmoins le problème a une unique solution optimale $\{x_0=1, u_0=0\}$, et on vérifie aisément que cette solution est une solution optimale de tout problème relaxé : le programme est encore mixte.

1.4. Théorème

Condition nécessaire d'optimalité.

Si $(\bar{x}, \bar{u})$ est une solution optimale du programme (1.1) *et si ce programme est mixte en $(\bar{x}, \bar{u})$, alors il existe des nombres réels a_i, $0 \leqq i \leqq m$, qui vérifient :*

1° $\sum_{i=0}^{m} |a_i| = 1$;

2° *pour* $0 \leqq i \leqq m_0$, *on a* $a_i \geqq 0$;

3° *pour* $1 \leqq i \leqq m_0$, *on a* $a_i f^i(\bar{x}, \bar{u})=0$, *c'est-à-dire que les multiplicateurs des contraintes non saturées sont nuls;*

4° *en posant* $L(a, x, u)=\sum_{i=0}^{m} a_i f^i(x, u)$, *on a, en tout point :* $x=(x^1, \ldots, x^n)$ *de* X *:*

$$\sum_{k=1}^{n} (x^k-\bar{x}^k)\frac{\partial L}{\partial x^k}(a, \bar{x}, \bar{u}) \leqq 0; \tag{1.6}$$

5° *la fonction de* u *:* $L(a, \bar{x}, u)$ *atteint son maximum sur* U *au point* $\bar{u}$.

Démonstration : Soit $Z=\{u_1, \ldots, u_N\}$ un sous-ensemble fini de U. Par hypothèse, $(\bar{x}, 0)$ est une solution optimale de programme relaxé (1.2) correspondant à Z; pour ce programme de type différentiable et défini dans un ensemble convexe $X \times Y$, on a la condition nécessaire d'optimalité suivante [6] : il existe des nombres a_i^Z qui ne sont pas tous nuls et qui vérifient :

$$\text{pour } 0 \leqq i \leqq m_0 : \quad a_i^Z \geqq 0,$$

$$\text{pour } 1 \leqq i \leqq m_0 : \quad a_i^Z\, g^i(\bar{x}, 0)=0,$$

$$\sum_{k=1}^{n} (x^k-\bar{x}^k) \sum_{i=0}^{m} a_i^Z \frac{\partial g^i}{\partial x^k}(\bar{x}, 0)+ \sum_{j=1}^{N} y^j \sum_{i=0}^{m} a_i^Z \frac{\partial g^i}{\partial y^j}(\bar{x}, 0) \leqq 0 \tag{1.7}$$

pour tout point (x, y) de $X \times Y$.

Les multiplicateurs a_i^Z étant définis à une constante multiplicative positive près, on peut se ramener au cas où $\sum_{i=0}^{m} |a_i^Z|=1$. Ces multiplicateurs vérifient les conclusions 1, 2 et 3 du théorème car $g^i(\bar{x}, 0)=f^i(\bar{x}, \bar{u})$; $0 \in Y$, et pour $y=0$, la relation (1.7) donne la quatrième conclusion; et pour $x=\bar{x}$ et $y^j=1$, les autres composantes de y étant nulles, la relation (1.7) s'écrit :

$$\sum_{i=0}^{m} a_i^Z (f^i(\bar{x}, u_j)-f^i(\bar{x}, \bar{u})) \leqq 0,$$

$$L(a^Z, \bar{x}, u_j) \leqq L(a^Z, \bar{x}, \bar{u}). \tag{1.8}$$

Soit $K(Z)$ l'ensemble des points a^Z de $\mathbb{R}^{m+1}$ qui vérifient les conclusions 1 à 4 du théorème et l'inégalité (1.8) pour tout point u_j de Z. L'ensemble $K(Z)$ est un compact non vide : la première conclusion définit un compact, les autres définissent des fermés, et l'existence d'un élément a^Z appartenant à $K(Z)$ vient d'être démontrée. D'autre part, toute intersection finie des $K(Z)$ est non vide : $\bigcap_{r=1}^{r=s} K(Z_r)$ contient $K\left(\bigcup_{r=1}^{r=s} Z_r\right)$ qui est non vide; par conséquent, l'intersection de tous les $K(Z)$, pour Z sous-ensemble fini de U, est non vide; et tout point a de cette intersection vérifie toutes les conclusions du théorème, car on a

$$L(a, \bar{x}, u) \leqq L(a, \bar{x}, \bar{u})$$

pour tout élément u de U. Le théorème est démontré.

REMARQUE 3 : Ce théorème est valable sous des *hypothèses plus faibles :* par exemple pour X convexe d'un espace vectoriel topologique ou approximation convexe au premier ordre de l'ensemble de définition du programme, et les fonctions f^i différentiables par rapport à x au sens de Neustadt [9]. De manière générale, la démonstration est valable dans tout cadre d'hypothèses qui permet d'obtenir une condition nécessaire d'optimalité pour le programme relaxé.

REMARQUE 4 : Pour un problème indépendant de x, on obtient une *généralisation des programmes convexes;* pour un problème indépendant de u et défini par des fonctions $f^i(x)+h^i(x)$, on peut considérer le problème équivalent défini par $f^i(x)+h^i(u)$ en adjoignant la liaison $x-u=0$, et on obtient une généralisation des programmes définis par des fonctions qui sont sommes de fonctions différentiables et de fonctions concaves.

REMARQUE 5 : Notre formulation des programmes mixtes a été choisie pour sa commodité dans les problèmes de *contrôle optimal en temps discret :* elle donne directement les conditions de maximum par rapport à la commande. Elle permet de généraliser la plupart des conditions nécessaires qui concluent au maximum du hamiltonien par rapport à la commande, *cf.* par exemple [1, 2, 7].

La définition des programmes mathématiques mixtes avec des conditions *d'optimalité locale par rapport à x et globale par rapport à u* semble plus générale; en fait, l'étude du programme défini dans un ensemble convexe X permet de se limiter à un voisinage de $\bar{x}$ pour la définition, le critère et la condition nécessaire d'optimalité.

L'hypothèse de programme mixte est en un certain sens minimale pour obtenir la condition 5 du théorème 1.4; plus précisément, *si le problème est indépendant de x et si on a : $a_0 > 0$, alors les conditions nécessaires du théorème* 1.4 *sont aussi des conditions suffisantes d'optimalité pour le problème* 1.1 *et pour tout problème relaxé* 1.2. En effet, pour tout y qui vérifie :

$$\text{pour } 1 \leqq i \leqq m_0 : \quad g^i(y) \geqq 0;$$
$$\text{et pour } m_0+1 \leqq i \leqq m : \quad g^i(y)=0,$$

on a, avec les conclusions 2, 5 et 3 du théorème 1.4 :

$$a_0\, g^0(y) \leqq \sum_{i=0}^{m} a_i\, g^i(y) = \sum_{j=1}^{N} y^j (L(a, u_j) - L(a, \bar{u})) + \sum_{i=0}^{m} a_i f^i(\bar{u}),$$
$$a_0\, g^0(y) \leqq \sum_{i=0}^{m} a_i f^i(\bar{u}) = a_0 f^0(\bar{u}) = a_0\, g^0(0)$$

et si $a_0 > 0$, on a $g^0(y) \leqq g^0(0)$, 0 est solution optimale du problème relaxé. D'autre part, 0 étant une solution optimale de tout problème relaxé, $\bar{u}$ est une solution optimale du problème 1.1. La notion de programme mixte permet de généraliser les conditions nécessaires et suffisantes d'optimalité [3].

REMARQUE 6 : La conclusion 1 du théorème 1.4 correspond à une condition nécessaire du type de Fritz-John. On obtient, à partir de là, les conditions de Kuhn et Tucker avec une hypothèse de qualification; par exemple, si X est un voisinage de $\bar{x}$, la conclusion 4 s'écrit :

$$\text{pour } 1 \leqq k \leqq n : \quad \frac{\partial L}{\partial x^k}(a, \bar{x}, \bar{u})=0, \tag{1.9}$$

et si les gradients par rapport à x en $(\bar{x}, \bar{u})$ des fonctions $f^i(x, u)$ sont linéairement indépendants pour $1 \leqq i \leqq m$, alors on a les conclusions du théorème avec $a_0 > 0$ (que l'on peut choisir égal à 1 en supprimant la première conclusion). De manière générale, toute hypothèse qui assure l'impossibilité de l'ensemble des conclusions du théorème avec $a_0=0$, donne une condition nécessaire d'optimalité du type de Kuhn et Tucker.

REMARQUE 7 (2) : La résolution numérique d'un programme mixte peut utiliser simultanément des procédés intervenant en programmation différentielle (pour la détermination de l'état) et en programmation dynamique (pour la détermination de la commande). Pour le problème d'optimisation en temps discret du prochain paragraphe, les méthodes utilisées en contrôle optimal qui résolvent un problème approché sous forme discrète, s'appliquent naturellement. S'il y a une grande parenté entre notre formulation et le contrôle optimal, il n'en est pas de même entre elle et la programmation dynamique; la différence essentielle réside dans la présence des multiplicateurs a_i qui jouent un rôle important dans les applications : en économie par exemple, ces multiplicateurs s'interprètent comme des prix implicites (shadow prices) et constituent un mode d'évaluation.

2. APPLICATION AU PRINCIPE DU MAXIMUM EN TEMPS DISCRET DANS LE CAS DÉTERMINISTE

2.1. Problème

Maximiser $\sum_{t=0}^{T-1} \varphi(x_t, u_t, t)+\varphi(x_T, T)$ *sous les conditions suivantes : pour* $0 \leqq t \leqq T-1$, *on a*

$$x_{t+1} \in X_{t+1} \quad \text{et} \quad u_t \in U_t \quad \text{et} \quad x_0=\xi_0, \tag{2.1}$$

$$\text{pour } 1 \leqq k \leqq n : \quad x_{t+1}^k - x_t^k = f^k(x_t, u_t, t), \tag{2.2}$$

(2) Cette remarque, ainsi que la remarque finale 4.5, ont été ajoutées à la suite des commentaires du référée et je l'en remercie.

$$\text{pour } 1 \leqq i \leqq m_t : \quad g^i(x_t, u_t, t) \geqq 0, \tag{2.3}$$

$$\text{pour } m_t+1 \leqq i \leqq n_t : \quad g^i(x_t, u_t, t) = 0, \tag{2.4}$$

ainsi que les conditions finales

$$\text{pour } 1 \leqq i \leqq m_T : \quad g^i(x_T, T) \geqq 0, \tag{2.5}$$

$$\text{pour } m_T+1 \leqq i \leqq n_T : \quad g^i(x_T, T) = 0. \tag{2.6}$$

Pour $0 \leqq t \leqq T-1$, X_{t+1} est un *convexe ouvert de* $\mathbb{R}^n$, et U_t est un *ensemble quelconque. Toutes les fonctions* φ, f^k et g^i *sont définies dans l'ensemble*

$$\bigcup_{t=0}^{T-1} (X_t \times U_t \times \{t\}) \cup (X_T \times \{T\})$$

et elles sont supposées différentiables par rapport à la première variable.

On note $X_0 = \{\xi_0\}$.

Pour $0 \leqq t \leqq T-1$, $x_t \in X_t$ et $x_{t+1} \in X_{t+1}$, *on désigne par* $A_t(x_t, x_{t+1})$ [respectivement $B_t(x_t, x_{t+1})$] l'ensemble des points (λ, y_t, z_t) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_t}$ qui vérifient : il existe $u_t \in U_t$ [respectivement $u_t \in U_t$ et $(v_t, w_t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n_t}$] tels que :

$$\lambda \leqq \varphi(x_t, u_t, t),$$

$$\text{pour } 1 \leqq k \leqq n : \quad y_t^k = f^k(x_t, u_t, t) + x_t^k - x_{t+1}^k$$

[respectivement $v_t^k y_t^k = f^k(x_t, u_t, t) + x_t^k - x_t^{k+1}$] :

$$\text{pour } 1 \leqq i \leqq m_t : \quad z_t^i \leqq g^i(x_t, u_t, t)$$

[respectivement $w_t^i z_t^i \leqq g^i(x_t, u_t, t)$] :

$$\text{pour } m_t+1 \leqq i \leqq n_t : \quad z_t^i = g^i(x_t, u_t, t)$$

[respectivement $w_t^i z_t^i = g^i(x_t, u_t, t)$].

2.2. Critère

Pour que le problème 2.1 *soit un programme mixte en tout point,* il suffit que pour $0 \leqq t \leqq T-1$, l'enveloppe convexe de $A_t(x_t, x_{t+1})$ soit contenue dans $B_t(x_t, x_{t+1})$ pour tout (x_t, x_{t+1}) de $X_t \times X_{t+1}$; il suffit en particulier que $A_t(x_t, x_{t+1})$ soit convexe.

Démonstration : Pour $x_T \in X_T$, on définit les sous-ensembles $A_T(x_T)$ et $B_T(x_T)$ de $\mathbb{R}^{n_T+1}$ par les conditions

$$\lambda \leqq \varphi(x_T, T),$$

respectivement z_T^i et $w_T^i z_T^i \leqq g^i(x_T, T)$ pour $1 \leqq i \leqq m_T$; respectivement z_T^i et $w_T^i z_T^i = g^i(x_T, T)$ pour $m_T+1 \leqq i \leqq n_T$.

$A_T(x_T)$ est convexe et contenu dans $B_T(x_T)$.

Soit, pour $0 \leqq t \leqq T$, $x_t \in X_t$. Par adjonction de composantes nulles, les ensembles $A_t(x_t, x_{t+1})$, $B_t(x_t, x_{t+1})$, $A_T(x_T)$ et $B_T(x_T)$ s'identifient respectivement à A'_t, B'_t, A'_T et B'_T sous-ensembles de

$$F=\mathbb{R}\times\left(\prod_{t=0}^{T-1}(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{n_t})\right)\times\mathbb{R}^{n_T}.$$

Il résulte des hypothèses que, pour $0 \leqq t \leqq T$, B'_t contient l'enveloppe convexe de A'_t, et il en est de même des sommes respectives B' et A' de ces ensembles de $t=0$ à T. Or A' et B' sont les ensembles du critère 1.3 qui correspondent au problème 2.1; donc il résulte de ce critère que le problème 2.1 est mixte en tout point.

2.3. Théorème

Si $\bar{x}_t$ $(0 \leqq t \leqq T)$ et $\bar{u}_t$ $(0 \leqq t \leqq T-1)$ est une solution optimale du problème 2.1 et si le problème est mixte en ce point, alors il existe des nombres non tous nuls : a, b_t^i $(0 \leqq t \leqq T,\ 1 \leqq i \leqq n_t)$, et q_{t+1}^k $(0 \leqq t \leqq T-1,\ 1 \leqq k \leqq n)$ tels que :

1° $a \geqq 0$;

2° *pour* $0 \leqq t \leqq T-1$ *et* $1 \leqq i \leqq m_t$: $b_t^i \geqq 0$ *et* $b_t^i g^i(\bar{x}_t, \bar{u}_t, t)=0$;

3° *pour* $1 \leqq i \leqq m_T$: $b_T^i \geqq 0$ *et* $b_T^i\, g^i(\bar{x}_T, T)=0$;

4° *pour* $1 \leqq t \leqq T-1$ *et* $1 \leqq k \leqq n$:

$$q_t^k - q_{t+1}^k = \frac{\partial H}{\partial x^k}(\bar{x}_t, \bar{u}_t, a, b_t, q_{t+1}, t);$$

5° *pour* $1 \leqq k \leqq n$: $q_T^k = a\dfrac{\partial \varphi}{\partial x^k}(\bar{x}_T, T) + \sum_{i=1}^{n_T} b_T^i \dfrac{\partial g^i}{\partial x^k}(\bar{x}_T, T)$;

6° *pour* $0 \leqq t \leqq T-1$, $H(\bar{x}_t, u, a, b_t, q_{t+1}, t)$ *atteint son maximum sur* U_t *en* $\bar{u}_t$; *le hamiltonien H étant défini par*

$$H(x, u, a, b, q, t)=a\,\varphi(x, u, t)+\sum_{k=1}^{n} q^k f^k(x, u, t)+\sum_{i=1}^{n_t} b^i g^i(x, u, t).$$

Démonstration : Posons

$$\begin{aligned}L=a&\left(\sum_{t=0}^{T-1}\varphi(x_t, u_t, t)+\varphi(x_T, T)\right)\\&+\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{k=1}^{n} q_{t+1}^k\left(f^k(x_t, u_t, t)+x_t^k-x_{t+1}^k\right)\\&+\sum_{t=0}^{T-1}\sum_{i=1}^{n_t} b_t^i g^i(x_t, u_t, t)+\sum_{i=1}^{n_T} b_T^i g^i(x_T, T).\end{aligned}$$

D'après le théorème 1.4 appliqué au problème 2.1, il existe des multiplicateurs a, q_{t+1}^k, b_t^i qui ne sont pas tous nuls, qui vérifient : $a \geqq 0$;

$$\text{pour } 1 \leqq i \leqq m_t : \quad b_t^i \geqq 0 \quad \text{et} \quad b_t^i g^i(\bar{x}_t, \bar{u}_t, t) = 0$$

[respectivement $b_T^i g^i(\bar{x}_T, T) = 0$]; L est maximal en $\bar{u}_t$ par rapport aux u_t (pour $x_t = \bar{x}_t$), ce qui implique les conclusions 6; et X_t étant un voisinage de $\bar{x}_t$ pour $t \geqq 1$, on a

$$\text{pour } 1 \leqq t \leqq T \quad \text{et} \quad 1 \leqq k \leqq n : \quad \frac{\partial L}{\partial x_t^k} = 0$$

aux points $(\bar{x}_t, \bar{u}_t)$, ce qui implique les conclusions 4 et 5. Le théorème est démontré.

3. PRINCIPE DU MAXIMUM EN TEMPS DISCRET DANS LE CAS D'UN NOMBRE FINI D'ÉVÉNEMENTS ALÉATOIRES ET D'UNE INFORMATION PARFAITE

3.1. Description du problème

On considère un *ensemble fini E d'événements* qui sont des suites $S = (s_0, s_1, \ldots, s_{T-1})$ ayant chacun une probabilité $p(S) > 0$.

Pour tout $t \geqq 1$ et tout $S \in E$, on note S_t la suite partielle $(s_0, s_1, \ldots, s_{t-1})$ composée des t premiers termes de S; pour R et S appartenant à E, on note $R \subset S_t$ la condition : $R_t = S_t$ (dans le langage des probabilités S_t est l'ensemble des $R \in E$ qui vérifient $R_t = S_t$); et on définit

$$p(S_t) = \sum_{R \subset S_t} p(R). \tag{3.1}$$

A chaque instant t, *l'état* et la *commande* seront fonction du passé S_t : x_t et u_t sont des applications définies dans l'ensemble E_t des suites partielles S_t,

$$E_t = \{ S_t;\ S \in E \}; \tag{3.2}$$

et pour simplifier les notations, on introduit un ensemble E_0 à un élément S_0; $x_t(S_t)$ appartient à un *convexe ouvert* X_t de $\mathbb{R}^n$ et on impose à $u_t(S_t)$ d'appartenir à un ensemble pouvant dépendre de S_t :

$$\text{pour } 0 \leqq t \leqq T-1 : \quad u_t(S_t) \in U_t(S_t) \quad \text{et} \quad x_{t+1} \in X_{t+1}. \tag{3.3}$$

L'évolution du système est définie par

$$\left.\begin{array}{c} \text{pour } 0 \leqq t \leqq T-1; \\ x_{t+1}(S_{t+1}) - x_t(S_t) = f(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_{t+1}) \end{array}\right\} \tag{3.4}$$

$$x_0(S_0) = x_0; \tag{3.5}$$

l'état initial est donné et l'évolution est aléatoire : elle dépend du passé S_t et de l'« événement s_t » qui se produit entre t et $t+1$.

Les contraintes sont définies par des fonctions numériques g^i pouvant dépendre, en nombre et forme, du passé; on conviendra que dans les expressions suivantes :

$$\text{pour } 0 \leqq t \leqq T \left\{ \begin{array}{c} \text{pour } 1 \leqq i \leqq m_t(S_t) : \\ g^i(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_t) \geqq 0, \\ \text{pour } m_t(S_t) \leqq i \leqq n_t(S_t) : \\ g^i(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_t) = 0, \end{array} \right\} \tag{3.6}$$

pour $t=T$, u_t ne figure pas; ces contraintes ne dépendent que du passé S_t et non de S_{t+1}, car il faut choisir $u_t(S_t)$ vérifiant ces contraintes en disposant de l'information sur le passé seulement.

Définissons *l'objectif*. A la commande $u_t(0 \leqq t \leqq T-1)$ et à l'événement $S \in E$ correspondent les suites de décisions $u_t(S_t)$ et d'états $x_t(S_t)$; on leur associe le revenu

$$\varphi(x, u; S) = \sum_{t=0}^{T-1} \varphi(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_{t+1}) + \varphi(x_T(S), T; S); \tag{3.7}$$

On cherche à *maximiser l'espérance de revenu*

$$\varphi(x, u) = \sum_{S \in E} p(S)\, \varphi(x, u; S). \tag{3.8}$$

Or on a, pour tout t, $0 \leqq t \leqq T-1$,

$$\begin{aligned} &\sum_{S \in E} p(S)\, \varphi(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_{t+1}) \\ &\qquad = \sum_{S_{t+1} \in E_{t+1}} \Big(\sum_{R \subset S_{t+1}} p(R)\Big)\, \varphi(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_{t+1}) \\ &\qquad\qquad = \sum_{S_{t+1} \in E_{t+1}} p(S_{t+1})\, \varphi(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_{t+1}); \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$\begin{aligned} \varphi(x, u) = \sum_{t=0}^{T-1} \quad \sum_{S_{t+1} \in E_{t+1}} p(S_{t+1})\, \varphi(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_{t+1}) \\ + \sum_{S \in E} p(S)\, \varphi(x_T(S), T; S). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Remarque : Le maximum de $\varphi(x, u)$ définit une solution optimale en *boucle fermée* (ou feedback), la seule acceptable dans les problèmes à évolution aléatoire; en effet, soit $(\bar{x}, \bar{u})$ une solution optimale; si à l'instant θ le passé a été S_θ^0, l'état est $\bar{x}_\theta(S_\theta^0)$ et les décisions à partir de θ maximisent la somme partielle $\varphi_\theta(x, u; S_\theta^0)$ des termes de l'expression (3.9) de $\varphi(x, u)$ qui vérifient : $t \geqq \theta$, $S_{t+1} \subset S_\theta^0$, $S \subset S_\theta^0$; dans le cas contraire, une modification des commandes $u_t(S_t)$ correspondantes donnerait une solution meilleure; on obtient donc aussi le maximum de $(1/p(S_\theta^0))\,\varphi_\theta(x, u; S_\theta^0)$ qui est l'espérance de revenu de θ à T lorsque le passé a été S_θ^0.

3.2. Formulation du problème

Maximiser $\varphi(x, u)$ *sur l'ensemble des fonctions* (x_t, u_t) *qui vérifient :*

$$x_0(S_0)=x_0, \text{ et, pour } 1 \leqq t \leqq T \text{ et } S_t \in E_t : \quad x_t(S_t) \in X_t, \tag{3.10}$$

$$\text{pour } 0 \leqq t \leqq T-1 \text{ et } S_t \in E_t : \quad u_t(S_t) \in U_t(S_t), \tag{3.11}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{pour } 0 \leqq t \leqq T \quad \text{et} \quad S_t \in E_t, \\ \text{pour } 1 \leqq i \leqq m_t(S_t) : \quad p(S_t)\, g^i(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_t) \geqq 0, \\ \text{pour } m_t(S_t)+1 \leqq i \leqq n_t(S_t) : \quad p(S_t)\, g^i(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_t) = 0, \end{array}\right\} \tag{3.12}$$

$$\left.\begin{array}{c} \text{pour } 0 \leqq t \leqq T-1, \quad S_{t+1} \in E_{t+1} \text{ et } 1 \leqq k \leqq n : \\ p(S_{t+1})\,[f^k(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_{t+1}) + x_t^k(S_t) - x_{t+1}^k(S_{t+1})] = 0. \end{array}\right\} \tag{3.13}$$

Dans les conditions (3.12), pour $t=T$, u_t ne figure pas; E_0 est un ensemble à un élément S_0 et on pose $p(S_0)=1$; comme on a, pour tout t et tout $S_t \in E_t$, $p(S_t) > 0$, le problème est équivalent à celui qu'on obtient en remplaçant les conditions (3.12) et (3.13) respectivement par (3.6) et (3.4) : on a choisi de pondérer les contraintes avec la probabilité qu'elles ont de jouer.

HYPOTHÈSE : On suppose que *toutes les fonctions* φ, f^k *et* g^i sont *différentiables par rapport à la première variable*, lorsque toutes les autres sont arbitrairement fixées.

Pour établir la condition nécessaire d'optimalité, on supposera en outre que le problème est un programme mixte au point optimal considéré. On pourra se servir du critère suivant.

3.3. Critère

Pour que le problème 3.2 *soit mixte en tout point, il suffit que, pour* $0 \leqq t \leqq T-1$ *et tout* $S \in E$, *le problème obtenu en fixant toutes les variables à l'exception de* $x_t(S_t)$ *et* $u_t(S_t)$ *vérifie les hypothèses du critère* 1.3; autrement dit pour tout $(x, x') \in X_t \times X_{t+1}$ l'ensemble B contient l'enveloppe convexe de A, où A (respectivement B) est l'ensemble des points (z_0, z_1, z_2) de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_t(S_t)} \times \mathbb{R}^n$

qui vérifient : il existe $u \in U_t(S_t)$ [respectivement $(u, v_1, v_2) \in U_t(S_t) \times \mathbb{R}^{n_t(S_t)} \times \mathbb{R}^n$] tels que

$$z_0 \leqq \varphi(x, u, t; S_{t+1}),$$

pour $1 \leqq i \leqq m_t(S_t)$: z_1^i [respectivement v_1^i $z_1^i] \leqq g^i(x, u, t; S_t)$; pour $m_t(S_t)+1 \leqq i \leqq n_t(S_t)$: z_1^i [respectivement v_1^i $z_1^i] = g^i(x, u, t; S_t)$; pour $1 \leqq k \leqq n$: z_2^k [respectivement v_2^k $z_2^k] = f^k(x, u, t; S_{t+1}) + x - x'$.

La démonstration de ce critère est rigoureusement la même que celle du critère 2.2 : au nombre de composantes près, chaque S_t introduisant des composantes différentes, le problème 3.2 est exactement du type du problème 2.1; et la présence éventuelle des $p(S_t) > 0$ ne modifie en rien la propriété : B contient l'enveloppe convexe de A.

3.4. Notation

Pour $0 \leqq t \leqq T-1$, $S_t \in E_t$, $x \in X_t$, $u \in U_t(S_t)$, $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}^{n_t(S_t)}$ et q application de E_{t+1} dans $\mathbb{R}^n$, on définit le hamiltonien :

$$\begin{aligned} H(x, u, a, b, q, t; S_t) = & \sum_{i=1}^{n_t(S_t)} b^i g^i(x, u, t; S_t) \\ & + \sum_{R_{t+1} \in E_{t+1},\, R_{t+1} \subset S_t} \frac{p(R_{t+1})}{p(S_t)} \left[a\,\varphi(x, u, t; R_{t+1}) \right. \\ & \left. + \sum_{k=1}^{n} q^k(R_{t+1}) f^k(x, u, t; R_{t+1}) \right]. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Interprétation : Dans le cas déterministe, le hamiltonien en t est

$$a\,\varphi(x, u, t) + \sum_{k=1}^{n} q^k f^k(x, u, t) + \sum_{i=1}^{n_t} b^i g^i(x, u, t).$$

Dans le cas stochastique, le hamiltonien correspondant au passé S_t, défini par (3.14), est l'*espérance conditionnelle par rapport à S_t, sur une période, du « hamiltonien déterministe qui correspond à la connaissance de R_{t+1} »* : en effet $p(R_{t+1})/p(S_t)$ est la probabilité conditionnelle de R_{t+1} quand le passé est S_t (si on a $R_{t+1} \subset S_t$), et on a, la somme des probabilités conditionnelles étant égale à 1,

$$\sum_{R_{t+1} \subset S_t} \frac{p(R_{t+1})}{p(S_t)} \sum_i b^i g^i(x, u, t; S_t) = \sum_i b^i g^i(x, u, t; S_t).$$

3.5. Théorème

Si $(\bar{x}, \bar{u})$ est une solution optimale du problème 3.2 et si ce problème est mixte en $(\bar{x}, \bar{u})$, alors il existe $a \in \mathbb{R}$, $b_t(S_t) \in \mathbb{R}^{n_t(S_t)}$ $(0 \leqq t \leqq T, S_t \in E_t)$, et $q_{t+1}(S_{t+1}) \in \mathbb{R}^n$ $(0 \leqq t \leqq T-1, S_{t+1} \in E_{t+1})$ qui ne sont pas tous nuls et tels que l'on a :

1° $a \geqq 0$;

2° *pour* $0 \leqq t \leqq T$, $S_t \in E_t$ *et* $1 \leqq i \leqq m_t(S_t)$:

$$b_t^i(S_t) \geqq 0 \qquad et \qquad b_t^i(S_t)\, g^i(\bar{x}_t(S_t), \bar{u}_t(S_t), t; S_t) = 0,$$

3° *pour* $1 \leqq t \leqq T-1$, $S_t \in E_t$ *et* $1 \leqq k \leqq n$:

$$q_t^k(S_t) - \sum_{R_{t+1} \in E_{t+1},\, R_{t+1} \subset S_t} \frac{p(R_{t+1})}{p(S_t)}\, q_{t+1}^k(R_{t+1}) = \frac{\partial H}{\partial x^k}(\bar{x}_t(S_t), \bar{u}_t(S_t), a, b_t(S_t), q_{t+1}, t; S_t);$$

4° *pour* $S \in E$ *et* $1 \leqq k \leqq n$:

$$q_T^k(S) = a\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(\bar{x}_T(S), T; S) + \sum_{i=1}^{n_T(S)} b_T^i(S)\frac{\partial g^i}{\partial x^k}(\bar{x}_T(S), T; S);$$

5° *pour* $0 \leqq t \leqq T-1$ *et* $S_t \in E_t$, *la fonction de* u :

$$H(\bar{x}_t(S_t), u, a, b_t(S_t), q_{t+1}, t; S_t)$$

atteint son maximum sur $U_t(S_t)$ *en* $\bar{u}_t(S_t)$.

Démonstration : Appliquons le théorème 1.4. On pose

$$L = a\,\varphi(x, u) + \sum_{t=0}^{T} \sum_{S_t \in E_t} \sum_{i=1}^{n_t(S_t)} b_t^i(S_t)\, p(S_t)\, g^i(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_t)$$
$$+ \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{S_{t+1} \in E_{t+1}} \sum_{k=1}^{n} q_{t+1}^k(S_{t+1})\, p(S_{t+1})$$
$$\times [f^k(x_t(S_t), u_t(S_t), t; S_{t+1}) + x_t^k(S_t) - x_{t+1}^k(S_{t+1})].$$

En remplaçant $\sum_{S_{t+1} \in E_{t+1}}$ par $\sum_{S_t \in E_t} \sum_{R_{t+1} \in E_{t+1},\, R_{t+1} \in S_t}$, on obtient :

$$L = \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{S_t \in E_t} p(S_t)\, H(x_t(S_t), u_t(S_t), a, b_t(S_t), q_{t+1}, t; S_t)$$
$$+ \sum_{S \in E} p(S)\left[a\,\varphi(x_T(S), T; S) + \sum_{i=1}^{n_T(S)} b_T^i(S)\, g^i(x_T(S), T; S)\right]$$
$$+ \sum_{t=0}^{T-1} \sum_{S_{t+1} \in E_{t+1}} \sum_{k=1}^{n} p(S_{t+1})\, q_{t+1}^k(S_{t+1})\, (x_t^k(S_t) - x_{t+1}^k(S_{t+1})).$$

Des conclusions 1, 2 et 3 du théorème 1.4, il résulte que les multiplicateurs a, $b_t^i(S_t)$ et $q_{t+1}^k(S_{t+1})$ ne sont pas tous nuls et vérifient les deux premières conclusions du présent théorème. Avec la conclusion 4 du théorème 1.4, on obtient pour $1 \leqq t \leqq T$, $S_t \in E_t$ et $1 \leqq k \leqq n$, la nullité de la dérivée de L par rapport à $x_t^k(S_t)$, car X_t est ouvert; pour $t \leqq T-1$, on obtient ainsi :

$$p(S_t)\frac{\partial H}{\partial x^k} + \sum_{R_{t+1} \subset S_t} p(R_{t+1})\, q_{t+1}^k(R_{t+1}) - p(S_t)\, q_t^k(S_t) = 0,$$

ce qui donne la présente condition 3; pour $t = T$, on obtient :

$$ap(S)\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}(\bar{x}_T(S),\ T;\ S) + \sum_{i=1}^{n_T(S)} b_T^i(S)\, p(S)\frac{\partial g^i}{\partial x^k}(\bar{x}_T(S),\ T;\ S) - p(S)\, q_T^k(S) = 0,$$

ce qui donne la présente condition 4. Enfin le maximum de L par rapport à chacun des $u_t(S_t)$ donne la conclusion 5. Le théorème est entièrement démontré.

3.6. Cas où les probabilités dépendent de l'état et de la commande

Dans le problème (3.1) et (3.2), les événements peuvent être considérés comme des « états de l'environnement du système évolutif » dont la probabilité est connue et indépendante de l'évolution du système lui-même : les effets du système sur l'environnement sont supposés négligeables.

Dans le cas général, s'il y a encore information parfaite, les probabilités des événements S de E peuvent dépendre de la trajectoire $x = (x_t)$ et de la commande $u = (u_t)$ du système, soit :

$$p(S;\ x,\ u).$$

Pour appliquer la méthode précédente dans ce cas, on est amené dans la fonction objectif

$$\varphi(x,\ u) = \sum_{S \in E} p(S;\ x,\ u)\, \varphi(x,\ u;\ S),$$

à regrouper les termes $\sum_{R \subset S_{t+1}} p(R;\ x,\ u)$; et la même méthode s'appliquera si on fait l'hypothèse que l'on a

$$\sum_{R \subset S_{t+1}} p(R;\ x,\ u) = p(S_{t+1};\ x_t(S_t),\ u_t(S_t)),$$

c'est-à-dire que le dernier état et la dernière commande déterminent la probabilité de la chaîne d'événements; on peut toujours formellement se ramener à ce cas, par exemple en prenant comme état $y_t = (x_1,\ \ldots,\ x_t)$, mais on accroît considérablement la dimension de l'état. La résolution théorique peut se faire dans le cas général; il sera plus simple, pour des problèmes particuliers, d'appliquer directement le théorème 1.4; et on peut toujours se ramener au problème étudié en introduisant la variable d'état supplémentaire

$$x_{t+1}^{n+1}(S_{t+1})-x_t^{n+1}(S_t)=p(S_{t+1};\, x_t(S_t),\, u_t(S_t))-x_t^{n+1}(S_t).$$

3.7. Autres cas

Un cas important est celui où le *nombre des événements n'est pas fini :* il faut alors disposer d'une condition nécessaire d'optimalité pour des programmes mixtes en dimension infinie; la méthode de démonstration basée sur la compacité de l'ensemble des multiplicateurs (dont la somme des valeurs absolues est égale à 1), ne s'applique plus. Mais on peut conjecturer que ces résultats se généralisent à l'aide d'une condition nécessaire des programmes mathématiques de dimension infinie, comme on en trouve dans [8],

Un autre problème important est celui de l'information : le cas d'une *information partielle* nécessite l'introduction de liaisons supplémentaires [4].

Citons aussi le problème en *horizon infini* qui nécessite une étude spécifique, et qui comporte naturellement un nombre infini d'événements, sauf hypothèses très particulières.

4. EXEMPLE D'APPLICATION [3]

Pour illustrer cette étude nous appliquerons les résultats obtenus à un modèle simple de gestion de portefeuille. Soient x_t^1 le montant des titres, x_t^2 le montant des liquidités, r_t^1 le taux de variation de valeur des titres, r_t^2 le taux d'intérêt des liquidités, d_t les entrées de liquidités (ou sorties si $d_t < 0$), u_t le montant des achats de titres (ou ventes si $u_t < 0$), et c la commission unitaire de vente ou d'achat de titres.

On suppose que les taux r_t^1 et r_t^2 sont aléatoires, selon un ensemble fini E d'événements $S=(s_0,\, s_1,\, \ldots,\, s_{T-1})$.

4.1. Problème

Maximiser l'espérance de l'avoir final

$$\sum_{S\in E} p(S)\,(x_T^1(S)+x_T^2(S)), \tag{4.1}$$

[3] Cet exemple a été étudié en collaboration avec F. Miras.

sous les conditions suivantes, pour $0 \leqq t \leqq T-1$:

$$x_{t+1}^1(S_{t+1})-x_t^1(S_t)=r_t^1(S_{t+1})\,x_t^1(S_t)+u_t(S_t), \tag{4.2}$$

$$x_{t+1}^2(S_{t+1})-x_t^2(S_t)=r_t^2(S_{t+1})\,x_t^2(S_t)+d_t-u_t(S_t)-c\,|u_t(S_t)|-v_t(S_t), \tag{4.3}$$

$$u_t(S_t)\in[-M,\ M] \qquad \text{et} \qquad v_t(S_t)\in[0,\ +\infty], \tag{4.4}$$

l'état initial est donné

$$x_0^1(S_0)=x_0^1 \qquad \text{et} \qquad x_0^2(S_0)=x_0^2, \tag{4.5}$$

la constante M représente la borne supérieure des transferts.

La décision supplémentaire $v_t \geqq 0$ exprime que l'on peut dilapider des liquidités; on aura $\bar{v}_t=0$ pour une solution optimale, et cette commande permet de vérifier sans difficulté que le programme est mixte : elle assure les hypothèses du critère 3.3.

4.2. Le problème 4.1 est mixte en tout point

Soit C l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient : il existe $u\in[-M, M]$ et $v \geqq 0$ tels que :

$$x \leqq 0; \qquad y=u; \qquad z=-u-c\,|u|-v. \tag{4.6}$$

C'est un ensemble convexe, car c'est aussi l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ qui vérifient :

$$x \leqq 0; \qquad z \geqq -y-c\,|y| \tag{4.7}$$

et les ensembles A du critère 3.3 sont obtenus par translation de C; il résulte donc de ce critère que le problème 4.1 est mixte en tout point.

4.3. Condition nécessaire d'optimalité

Le hamiltonien du problème 4.1 est :

$$H(x,\ u,\ v,\ a,\ q,\ t;\ S_t)=\sum_{R_{t+1}\subset S_t}\frac{p(R_{t+1})}{p(S_t)}[q_{t+1}^1(R_{t+1})\,(r_t^1(R_{t+1})\,x^1+u)$$
$$+q_{t+1}^2(R_{t+1})\,(r_t^2(R_{t+1})\,x^2+d_t-u-c\,|u|-v)] \tag{4.8}$$

et on a, pour $1 \leqq t \leqq T-1$ et $S_t\in E_t$, $i=1$ et $i=2$:

$$q_t^i(S_t)=\sum_{R_{t+1}\subset S_t}\frac{p(R_{t+1})}{p(S_t)}\,q_{t+1}^i(R_{t+1})\,(1+r_t^i(R_{t+1})), \tag{4.9}$$

$$q_T^i(S)=a. \tag{4.10}$$

On vérifie aisément par récurrence que l'on a, pour $1 \leqq t \leqq T-1$ et $i=1, 2$:

$$q_t^i(S_t)=a \sum_{R \subset S_t} \frac{p(R)}{p(S_t)} \prod_{k=t}^{T-1} (1+r_k^i(R_{k+1})). \tag{4.11}$$

D'autre part, comme a et les $q_t^i(S_t)$ ne sont pas tous nuls, on a nécessairement $a \neq 0$; on peut supposer $a=1$.

Calculons les facteurs de u dans le hamiltonien :

pour $0 \leqq t \leqq T-2$:

$$\left.\begin{aligned} f_t^i(S_t) &= \sum_{R_{t+1} \subset S_t} \frac{p(R_{t+1})}{p(S_t)} q_{t+1}^i(R_{t+1}); \\ \text{et} \quad & f_{T-1}^i(S_{T-1})=a. \end{aligned}\right\} \tag{4.12}$$

On obtient avec $a=1$:

pour $0 \leqq t \leqq T-2$:

$$\left.\begin{aligned} f_t^i(S_t) &= \sum_{R \subset S_t} \frac{p(R)}{p(S_t)} \prod_{k=t+1}^{T-1} (1+r_k^i(R_{k+1})); \\ \text{et} \quad & f_{T-1}^i(S_{T-1})=1. \end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

Alors le maximum du hamiltonien donne : $\bar{v}_t(S_t)=0$ et

$$\text{si } f_t^1(S_t) < (1-c) f_t^2(S_t) : \quad \bar{u}_t(S_t)=-M, \tag{4.14}$$

$$\text{si } (1-c) f_t^2(S_t) < f_t^1(S_t) < (1+c) f_t^2(S_t) : \quad \bar{u}_t(S_t)=0, \tag{4.15}$$

$$\text{si } (1+c) f_t^2(S_t) < f_t^1(S_t) : \quad \bar{u}_t(S_t)=M. \tag{4.16}$$

La linéarité du problème par rapport à l'état et la propriété $a \neq 0$ permettent d'affirmer que les conditions obtenues sont suffisantes.

4.4. Interprétation

L'expression (4.13) de $f_t^i(S_t)$ est *l'espérance conditionnelle par rapport au passé* S_t du produit $\prod_{t+1}^{T-1} (1+r_k^i)$ qui est la *valeur finale de un franc en* $t+1$ *sous la forme* i (titres ou liquidités), la suite des taux de rendement étant r_k^i.

Si l'espérance conditionnelle de la valeur finale sous forme de titres est inférieure à celle sous forme de liquidités, coût de transaction déduit, on vend le maximum de titres (4.14); si elle est supérieure à celle sous forme de liquidités, coût de transaction ajouté, on achète le maximum de titres (4.16); et entre les deux, on ne fait aucune opération (4.15), le coût de transaction étant supérieur au bénéfice que l'on peut espérer en tirer.

On a obtenu une généralisation des résultats connus dans le cas de suites d'événements indépendants, quand ce n'est pas le cas : l'espérance des valeurs est alors remplacée par l'espérance conditionnelle par rapport au passé.

4.5. Remarque

Le problème plus complexe, et plus vraisemblable, d'un maximum M et d'un minimum m de transfert qui dépendent des liquidités disponibles, des titres acquis, et du passé, peut être résolu par application du théorème 3.5 : il suffit de remplacer la condition

$$u_t(S_t) \in [-M, M], \quad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T-1$$

par les contraintes

$$u_t(S_t) - m(x_t^1(S_t), x_t^2(S_t), S_t) \geqq 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T-1,$$
$$M(x_t^1(S_t), x_t^2(S_t), S_t) - u_t(S_t) \geqq 0, \quad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T-1.$$

Les multiplicateurs correspondants b_t^1 et b_t^2 représentent les coûts de ces contraintes et interviennent dans les conclusions : les décisions optimales prennent en considération, outre le coût de chaque transaction, les conséquences de celle-ci sur les limitations qu'elle engendre sur les transactions futures.

BIBLIOGRAPHIE

1. M. Albouy, *Régulation économique dans l'Entreprise*, t. 2, Dunod, Paris, 1972.
2. A. Bensoussan, E. G. Hurst Jr, et B. Naslund, *Management Applications of Modern Control Theory*, North-Holland, 1974.
3. I. V. Evstigneev, *Optimal Stochastic Programs and Their Stimulating Prices* in Mathematical Models in Economics, J. Los et M. W. Los éd., North-Holland, 1974, p. 219-252.
4. I. V. Evstigneev, *Lagrange Multipliers for the Problems of Stochastic Programming* (to appear).
5. R. V. Gamkrelidze, *Optimal Sliding States*, Soviet Math. Dokl., vol. 3, 1962, p. 559-562.
6. H. Halkin, *Nonlinear Nonconvex Programming in an Infinite Dimensional Space*, in Mathematical Theory of Control, A. V. Balakrishan et L. W. Neustadt, éd., Academic Press, 1967, p. 10-25.
7. J. M. Holtzman et H. Halkin, *Directional Convexity and the Maximum Principle for Discrete Systems*, J. S.I.A.M. Control, vol. 4, 1966, p. 263-275.
8. P. Michel, *Problème d'Optimisation défini par des fonctions qui sont somme de fonctions convexes et de fonctions dérivables*, J. Math. pures et Appl., vol. 53, 1974, p. 321-330.
9. L. W. Neustadt, *An abstract Variational Theory with Applications to a Broad Class of Optimization Problems. I. General Theory*, S.I.A.M. J. Control, vol. 4, 1966, p. 505-527.