RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

D. VIAUD

Une formalisation du jeu de Mastermind

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 13, nº 3 (1979), p. 307-321

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_3_307_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 13, n° 3, août 1979, p. 307 à 321)

UNE FORMALISATION DU JEU DE MASTERMIND (*)

par D. VIAUD [1]

Résumé. — *On commence par donner une formalisation générale du jeu de Mastermind. Elle permet de définir puis de caractériser des stratégies optimales et le nombre de coups qu'elles nécessitent. On applique ensuite les résultats obtenus à deux cas particuliers dont l'un correspond précisément à celui du Mastermind. On montre alors comment dans ces cas on peut construire une stratégie optimale.*

Abstract. — *We first give a general formalisation of the game of Masterming. It enables us to define and characterize optimal strategies and the number of plays they require to end a game. We then apply these results to two particular cases, one of them being the usual game of Mastermind. In that case we show how to build an optimal strategy.*

1. DESCRIPTION DU JEU ET NOTATIONS

On dispose de deux ensembles finis : S (ensemble des solutions) et P (ensemble des points) ainsi que d'une application $\mathscr{P}$ de $S \times S$ dans P telle que :

(i) $$\mathscr{P}(s_1, s_2) = \mathscr{P}(s_2, s_1), \qquad \forall s_1, s_2 \in S;$$

(ii) $$\exists p_* \in P \quad \text{tel que} \quad [\mathscr{P}(s_1, s_2) = p_*] \Leftrightarrow [s_1 = s_2].$$

Le jeu consiste à découvrir un élément s_* de S choisi par l'adversaire. Pour cela on choisit au premier coup s_1 dans S. L'adversaire répond en donnant le point $p_1 = \mathscr{P}(s_1, s_*)$ obtenu. On choisit alors au deuxième coup s_2 dans S ce qui fournit le point $p_2 = \mathscr{P}(s_2, s_*)$, etc. On s'arrête lorsque l'on a trouvé s_*. Il est clair qu'à chaque coup, on utilise les points obtenus lors des coups précédents et la fonction $\mathscr{P}$ qui est entièrement connue.

Une stratégie est un procédé automatique de recherche de l'élément s_* inconnu. Au premier coup, elle spécifie l'élément s_1 à jouer. Au i-ième coup, elle spécifie l'élément s_i à jouer en fonction de ceux joués précédemment : $s_1, \ldots, s_{i-1}$ et des points obtenus : $p_1, \ldots, p_{i-1}$. Le dernier coup consiste à annoncer s_*. Son ordre est le nombre maximum de coups nécessaire pour

(*) Reçu décembre 1977.

[1] Centre de Calcul de l'Université Louis-Pasteur, Strasbourg.

trouver s_*. Une stratégie est dite optimale si son ordre est minimal, c'est-à-dire si elle minimise le nombre maximum de coups nécessaire pour trouver s_*. L'ordre d'une stratégie optimale est donc un « minimax ».

Pour $s \in S$ et $p \in P$, on pose :

$$\mathscr{P}_s^{-1}(p) = \{ \sigma \in S \mid \mathscr{P}(\sigma, s) = p \}.$$

Pour s fixé et p variant, ces ensembles constituent un recouvrement disjoint de S. Ils permettent de localiser un élément s_* cherché de la façon suivante. Si après avoir choisi $s_1, \ldots, s_i$ dans S on a obtenu en réponse les points respectifs : $p_1, \ldots, p_i$, on sait alors que

$$s_* \in \bigcap_{k=1}^{i} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k).$$

On notera :

$$\min_s \quad \text{pour} \quad \min_{s \in S} \qquad \text{et} \qquad \max_p \quad \text{pour} \quad \max_{p \in P}.$$

2. CARACTÉRISATION DES STRATÉGIES OPTIMALES

2.1. Applications τ_k

Elles sont définies sur l'ensemble des parties E de S par :

$$\begin{cases} \tau_1(E) = |E|, \\ \tau_k(E) = \min\limits_s \max\limits_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)] \qquad \text{pour} \quad k > 1. \end{cases}$$

Elles s'introduisent de la façon suivante :

On cherche s_* que l'on sait appartenir à un sous-ensemble E de S. On a donc : $\tau_1(E) = |E|$ possibilités et s_* est déjà connu si $\tau_1(E) = 1$. Si $\tau_1(E) > 1$, on cherche à déterminer s_* en choisissant s_1. Si la réponse est p_1, on sait alors que :

$$s_* \in E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1),$$

et l'on connaît s_* si et seulement si le cardinal de cet ensemble est égal à 1.

Pour tenter de connaître s_* aussitôt après avoir joué s_1, quelle que soit la réponse p_1 obtenue, il faut donc choisir s_1 de façon à minimiser le nombre :

$$\max_p |E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)| = \max_p \tau_1[E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)],$$

s_1 doit alors vérifier :

$$\max_p \tau_1(E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)) = \min_s \max_p \tau_1[E \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)] = \tau_2(E),$$

et l'on connaît certainement s_* après avoir joué s_1 si $\tau_2(E)=1$. Une telle stratégie n'est rien d'autre qu'une stratégie « minimax » (*voir* [1]) appliquée à l'évolution du jeu en un coup.

En raisonnant de façon analogue mais sur deux coups, on est conduit à choisir s_1 de façon à minimiser le nombre :

$$\max_p \min_{s'} \max_{p'} \left| E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p) \cap \mathscr{P}_{s'}^{-1}(p') \right| = \max_p \tau_2(E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)),$$

s_1 doit alors vérifier :

$$\max_p \tau_2(E \cap \mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)) = \min_s \max_p \tau_2[E \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)] = \tau_3(E),$$

et l'on connaîtra certainement s_* après avoir joué s_1, puis s_2 convenablement choisi, si $\tau_3(E)=1$.

En poursuivant cette étude récurrente du jeu, on est conduit à définir la suite des applications $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_{k-1}, \tau_k, \ldots$, et

$$\tau_k(E) = \min_{s_1} \max_{p_1} \ldots \min_{s_{k-1}} \max_{p_{k-1}} \left| E \cap \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p_i) \right) \right|.$$

Il est donc clair que :

$$0 \leqq \tau_k(E) \leqq \tau_{k-1}(E), \qquad \forall k > 1. \tag{1}$$

Cette propriété se précise de la façon suivante :

PROPOSITION 1 : *Pour $E \subset S$ et $k \geqq 1$, on a*

$$\begin{cases} [\tau_k(E)=0] \Leftrightarrow [E=\emptyset], & (2) \\ [\tau_k(E)>1] \Rightarrow [\tau_{k+1}(E)<\tau_k(E)]. & (3) \end{cases}$$

Preuve : Le premier point se démontre par récurrence sur k. Il est évident si $k=1$. Si $k>1$, et si $[\tau_{k-1}(E)=0] \Leftrightarrow [E=\emptyset]$,

$$\begin{aligned} [\tau_k(E)=0] &\Leftrightarrow [\min_s \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)]=0] \\ &\Leftrightarrow [\exists s_0 \in S \text{ tel que, } \forall p \in P,\ \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)]=0] \\ &\Leftrightarrow [\exists s_0 \in S \text{ tel que, } \forall p \in P,\ E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)=\emptyset] \Leftrightarrow [E=\emptyset], \end{aligned}$$

puisque les $\mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)$ forment un recouvrement de E.

Le second point se démontre aussi par récurrence sur k. Pour $k=1$, soit $E \subset S$ avec $|E|>1$. Si $s_0 \in E$, on a :

$$E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p) \begin{cases} \subset E \setminus \{s_0\} & \text{si } p \neq p_*, \\ = \{s_0\} & \text{si } p = p_*. \end{cases}$$

Ainsi

$$|E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)| < |E|, \qquad \forall p \in P,$$

d'où :

$$\tau_2(E) \leqq \max_p |E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)| < |E| = \tau_1(E).$$

Supposons maintenant la propriété vérifiée à l'ordre k et démontrons là à l'ordre $k+1$, en raisonnant par l'absurde. Soit donc $E \subset S$ avec

$$\tau_k(E) > 1 \qquad \text{et} \qquad \tau_{k+1}(E) = \tau_k(E).$$

Soit $s_0 \in S$ tel que :

$$\tau_k(E) = \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)].$$

D'après (1) et la définition des τ_k :

$$\tau_{k+1}(E) \leqq \max_p \tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)] \leqq \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)] = \tau_k(E).$$

On a donc, puisque $\tau_{k+1}(E) = \tau_k(E)$ par hypothèse,

$$\tau_k(E) = \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)] = \max_p \tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)].$$

Soit $p_0 \in P$ tel que :

$$\tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)] = \max_p \tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)].$$

Alors :

$$\tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)] = \tau_k(E) = \max_p \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p)] \geqq \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)],$$

d'où, compte tenu de (1),

$$\tau_k[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)] = \tau_{k-1}[E \cap \mathscr{P}_{s_0}^{-1}(p_0)] = \tau_k(E) > 1.$$

On arrive ainsi à une contradiction, puisque, d'après l'hypothèse de récurrence,

$$[\tau_{k-1}(E') > 1] \quad \Rightarrow \quad [\tau_k(E') < \tau_{k-1}(E')].$$

2.2. Étude d'une stratégie quelconque

Soit une stratégie d'ordre q quelconque. Si elle conduit à jouer la suite de coups : $s_1, \ldots, s_i$ avec les réponses respectives : $p_1, \ldots, p_i$ différentes de p_*, on pose :

$$E_j = \bigcap_{k=1}^{j} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k) \qquad \text{si} \quad 1 \leqq j \leqq i \qquad \text{et} \qquad E_0 = S.$$

PROPOSITION 2 : *On a :*

$$\begin{cases} \tau_{q-i}(E_i)=1, & 0 \leqq i < q, \quad (4) \\ \max\limits_p \tau_{q-i}(E_{i-1} \cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p))=1, & 1 \leqq i < q. \quad (5) \end{cases}$$

Preuve : On raisonne par récurrence sur le nombre de coups restant à jouer. Si s_i est dernier coup de la stratégie, on a :

$$E_{i-1} = \{ s_i \} = \{ s_* \}$$

et le résultat est évident.

Si s_i est un avant-dernier coup de la stratégie, $1 \leqq i < q$ et p_i détermine de façon unique le coup suivant à jouer, c'est-à-dire s_*. On a donc :

$$\tau_1(E_i) = |E_i| = 1 \tag{6}$$

quel que soit le point p_i obtenu en réponse à s_i. Par conséquent :

$$\max_p \tau_1(E_{i-1} \cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p)) = 1 \tag{7}$$

car l'ensemble sur lequel porte τ_1 est vide si le point p ne peut être obtenu en réponse à s_i.

Mais q étant l'ordre de la stratégie :

$$i+1 \leqq q \qquad \text{et} \qquad 1 \leqq q-i.$$

Puisque $E_i \neq \emptyset$, (1) et (2) impliquent avec (6) et (7) les relations (4) et (5) pour tout avant-dernier coup de la stratégie.

Si s_i n'est pas un avant-dernier coup de la stratégie, $1 \leqq i \leqq q-2$ et p_i ne détermine pas toujours de façon unique le coup suivant à jouer. On a donc :

$$|E_i| > 1 \tag{8}$$

pour au moins un point p_i obtenu en réponse à s_i. On peut alors, dans le calcul du premier membre de (5), se restreindre pour p à de tels p_i. Soit donc p_i tel que (8) soit vérifié. Au coup suivant, on jouera s_{i+1} qui n'est pas un dernier coup de la stratégie. Alors, d'après (2) et la définition des τ_k,

$$1 \leqq \tau_{q-i}(E_i) = \min_s \max_p \tau_{q-(i+1)}[E_i \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)] \leqq \max_p \tau_{q-(i+1)}[E_i \cap \mathscr{P}_{s_{i+1}}^{-1}(p)].$$

On obtient alors le résultat cherché en raisonnant par récurrence sur l'indice des coups en partant des avants derniers :

si

$$\max_p \tau_{q-(i+1)}(E_i \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)) = 1,$$

on a

$$\tau_{q-i}(E_i) = 1$$

pour tout p_i tel que $|E_i| > 1$, ce qui implique les relations (4) et (5).

En ce qui concerne le premier coup, on obtient :

$$\max_p \tau_{q-1}[\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)] = 1.$$

On en déduit que :

$$\tau_q(S) = \min_s \max_p \tau_{q-1}(\mathscr{P}_s^{-1}(p)) \leqq \max_p \tau_{q-1}(\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)) = 1,$$

d'où, compte tenu de (2), puisque $S \neq \emptyset$:

$$\tau_q(S) = 1.$$

REMARQUE : On obtient un résultat analogue lorsqu'on cherche $s_* \in E$ où E est un sous-ensemble connu de S. Dans ce cas, si une stratégie d'ordre q fait jouer la suite de coups : $s_1, \ldots, s_i$, les réponses correspondantes étant $p_1, \ldots, p_i$ différentes de p_*, on a si $i < q$:

$$\tau_{q-i}(E \cap E_i) = 1,$$

$$\max_p \tau_{q-i}[E \cap E_{i-1} \cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p)] = 1.$$

Pour $i = 0$, on obtient :

$$\tau_q(E) = 1.$$

2.3. Étude des stratégies optimales

On notera q_0 le plus petit indice q tel que :

$$\tau_q(S) = 1$$

q_0 existe d'après la proposition 1.

PROPOSITION 3 : *Les stratégies optimales sont d'ordre q_0 et sont caractérisées de la façon suivante :*

Au i-ième coup, après avoir joué successivement les coups $s_1, \ldots, s_{i-1}$ pour lesquels on a obtenu les réponses respectives $p_1, \ldots, p_{i-1}$, on joue si $i<q_0$, s_i tel que :

$$\max_p \tau_{q_0-i}\left[\bigcap_{k=1}^{i-1} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k) \cap \mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p)\right]=1 \tag{9}$$

et si $i=q_0$, l'unique élément de l'ensemble :

$$\bigcap_{k=1}^{i=1} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k).$$

Preuve : On garde la notation $E_j=\bigcap_{k=1}^{j} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k)$ utilisée pour démontrer la proposition 2. D'après cette proposition, pour une stratégie quelconque d'ordre q, on a :

$$\tau_q(S)=1$$

d'où avec la définition de q_0 :

$$q \geqq q_0.$$

Il suffit donc, pour établir la proposition 3 de construire une stratégie d'ordre q_0. On utilise pour cela la méthode qui a permis d'établir la proposition 2, en montrant par récurrence que la stratégie correspondante existe, avec à chaque étape du jeu :

$$\tau_{q_0-i}(E_i)=1. \tag{10}$$

Pour le premier coup, on sait que :

$$\tau_{q_0}(S)=\min_s \max_p \tau_{q_0-1}(\mathscr{P}_s^{-1}(p))=1.$$

Il existe donc $s_1 \in S$ tel que :

$$\max_p \tau_{q_0-1}(\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p))=1.$$

On joue alors un tel s_1 au premier coup. Si p_1 est la réponse obtenue, on a :

$$\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1) \neq \emptyset \qquad \text{et} \qquad \tau_{q_0-1}(\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1)) \leqq 1$$

d'où compte tenu de (2) :

$$\tau_{q_0-1}(\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1))=1$$

c'est-à-dire la relation (10) pour $i=1$.

Au i-ième coup, ($i<q_0$) supposons que l'on ait joué la suite des coups : $s_1, \ldots, s_{i-1}$ pour lesquels on a obtenu les réponses respectives : $p_1, \ldots, p_{i-1}$, et faisons l'hypothèse de récurrence selon laquelle la relation (10) est vérifiée aux étapes précédentes. Alors :

$$\tau_{q_0-(i-1)}(E_{i-1})=\min_s \max_p \tau_{q_0-i}[E_{i-1}\cap\mathscr{P}_s^{-1}(p)]=1.$$

Il existe donc $s_i\in S$ tel que :

$$\max_p \tau_{q_0-i}[E_{i-1}\cap\mathscr{P}_{s_i}^{-1}(p)]=1.$$

On joue alors un tel s_i au i-ième coup. Si p_i est la réponse obtenue, on a :

$$E_i\neq\emptyset \qquad \text{et} \qquad \tau_{q_0-i}(E_i)\leqq 1$$

d'où, compte tenu de (2) :

$$\tau_{q_0-i}(E_i)=1$$

c'est-à-dire la relation (10) qui se trouve ainsi établie par récurrence pour tout $i<q_0$.

Au q_0-ième coup, on a donc :

$$\tau_{q_0-(q_0-1)}(E_{q_0-1})=|E_{q_0-1}|=1.$$

On choisit alors, pour s_{q_0}, l'unique élément de E_{q_0-1} qui n'est autre que l'élément s_* cherché.

La méthode indiquée permet ainsi de construire au moins une stratégie optimale. Réciproquement, en vertu de la proposition 2, toute stratégie optimale peut être construite par cette méthode.

REMARQUE 1 : Il peut arriver que, pour certaines suites de coups et de réponses $|E_{i-1}|=1$ pour $i<q_0$. Il serait alors maladroit de ne pas choisir pour s_i l'unique élément de E_{i-1} (bien que la stratégie reste optimale pour tout autre choix). La partie considérée peut alors se terminer au i-ième coup, avec $i<q_0$.

De même, il peut arriver qu'une réponse p_i soit le point p_* pour $i<q_0$, auquel cas la partie considérée se termine encore au i-ième coup puisque $s_i=s_*$.

REMARQUE 2 : On obtient un type particulier de stratégies optimales de la façon suivante.

Au i-ième coup, après avoir joué successivement les coups : $s_1, \ldots, s_{i-1}$ pour lesquels on a obtenu les réponses respectives $p_1, \ldots, p_{i-1}$ différentes de p_*, on sait que :

$$s_* \in \bigcap_{k=1}^{i-1} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k) = E_{i-1}.$$

On définit alors q_{i-1} comme le plus petit indice q tel que :

$$\tau_q(E_{i-1}) = 1.$$

D'après ce qui précède, $q_{i-1} \leqq q_0 - (i-1)$.

On joue alors au i-ième coup :

– si $q_{i-1} > 1$, un élément $s_i \in S$ tel que

$$\max_p \tau_{q_{i-1}-1}(E_{i-1} \cap \mathscr{P}_s^{-1}(p)) = 1;$$

– si $q_{i-1} = 1$, l'unique élément $s_i = s_*$ de l'ensemble E_{i-1}.

D'après la remarque finale du paragraphe 2.2, cette stratégie consiste à minimiser à chaque coup le nombre maximum de coups restant à jouer. Ainsi au i-ième coup, le nombre maximum de coups restant à jouer est q_{i-1}. On a donc :

$$q_i \leqq q_{i-1} - 1.$$

Une telle stratégie est évidemment optimale, et, parmi les stratégies optimales, c'est l'une de celles qui exploitent au mieux, à chaque coup, les informations acquises aux étapes antérieures de la partie.

3. ESTIMATION DE q_0

La détermination de l'ordre q_0 des stratégies optimales est en général impossible du fait de la complexité des calculs qu'elle entraîne. On peut cependant en obtenir une estimation en calculant une minoration q_1 de q_0 et en construisant une stratégie particulière, non nécessairement optimale, d'ordre q_2. Alors :

$$q_1 \leqq q_0 \leqq q_2.$$

On obtient la minoration q_1 en posant :

$$\pi = |P| - 1,$$

où P est l'ensemble des points p, et en raisonnant comme suit.

Une stratégie d'ordre q permet de jouer de façon à atteindre tous les éléments de S en un maximum de q coups. Pour cela elle spécifie la suite des coups à jouer : $s_1, \ldots, s_i, \ldots$ où s_i est fonction de $s_1, \ldots, s_{i-1}$ et des points $p_1, \ldots, p_{i-1}$ obtenus en réponse aux coups précédents. Au premier coup on ne peut atteindre que s_1. Au deuxième coup, suivant le point p_1 obtenu en réponse à s_1, on ne peut atteindre qu'un maximum de π éléments de S. Au troisième coup, suivant les points p_1 et p_2 obtenus en réponse à s_1 et s_2, on ne peut atteindre qu'un maximum de π^2 éléments de S.

On peut donc atteindre en q coups un maximum de :

$$1+\pi+\ldots+\pi^{q-1}=\frac{\pi^q-1}{\pi-1}$$

éléments de S, d'où nécessairement :

$$|S|=\tau_1(S)\leqq\frac{\pi^q-1}{\pi-1}, \tag{11}$$

ce qui permet d'obtenir une borne inférieure de l'ordre des stratégies optimales. On peut améliorer ce résultat en considérant non plus S mais $\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1)$. Si le point obtenu en réponse au premier coup est p_1, on ne pourra atteindre aux coups suivants que des éléments de $\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1)$ et cela en au plus $q-1$ coups. On en déduit, par un raisonnement analogue au précédent,

$$|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p_1)|\leqq\frac{\pi^{q-1}-1}{\pi-1},$$

et, ce résultat étant valable pour tout p_1,

$$\tau_2(S)\leqq\max_p|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)|\leqq\frac{\pi^{q-1}-1}{\pi-1}. \tag{12}$$

(11) se déduit de (12) car, si q vérifie (12) et si $s_1\in S$ vérifie :

$$\tau_2(S)=\max_p|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)|,$$

on a :

$$|S|=1+\sum_{p\neq p_*}|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)|\leqq 1+\pi\tau_2(S)\leqq 1+\pi\frac{\pi^{q-1}-1}{\pi-1}=\frac{\pi^q-1}{\pi-1}.$$

q vérifie donc (11) s'il vérifie (12), et la minoration de q_0 donnée par (12) est au moins aussi bonne que celle donnée par (11).

La stratégie particulière utilisée est construite de la façon suivante. Après avoir joué i coups : $s_1, \ldots, s_i$ pour lesquels on a obtenu en réponses les points : $p_1, \ldots, p_i$ différents de p_*, on sait que :

$$s_* \in \bigcap_{k=1}^{i} \mathscr{P}_{s_k}^{-1}(p_k) = E_i.$$

Au coup suivant, si $|E_i| = 1$ on joue l'unique élément s_* de E_i, et si $|E_i| > 1$ on joue l'un des $s \in S$ qui minimise :

$$\max_p |\mathscr{P}_s^{-1}(p) \cap E_i|.$$

Pour le premier coup, on prend :

$$E_0 = S.$$

4. APPLICATIONS

Dans le cas du jeu du Mastermind, S est l'ensemble des n-uplets

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \qquad \text{où} \quad s_i \in \{1, \ldots, m\}.$$

C'est donc un ensemble à m^n éléments.

La fonction $\mathscr{P}$ est définie de la façon suivante. Pour $1 \leqq r \leqq m$, soit $n_r(s)$ le nombre de fois où l'entier r apparaît dans la suite s.

Si

$$s = (s_1, \ldots, s_n) \qquad \text{et} \qquad s' = (s'_1, \ldots, s'_n), \qquad \mathscr{P}(s, s') = (p_1, p_2)$$

où :

$$\begin{cases} p_1 \text{ est le nombre de fois où } s_i = s'_i, \\ p_1 + p_2 = \sum_{r=1}^{m} \inf[n_r(s), n_r(s')]. \end{cases}$$

p_1 est le nombre d'éléments de s' se retrouvant dans s à la même place; $p_1 + p_2$ est le nombre d'éléments se retrouvant à la fois dans s et dans s' à une place quelconque.

On vérifie facilement que :

$$p_1 + p_2 \leqq n \qquad \text{et} \qquad \text{le point } (n-1,\ 1) \text{ n'est jamais atteint.}$$

On en déduit que :

$$|P| = 2 + 3 + \ldots + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Pour : $n=m=4$, on a :

$$|S|=\tau_1(S)=256, \qquad \pi=|P|-1=13.$$

(11) donne alors :

$$q_0 \geqq 4.$$

La stratégie particulière construite est alors d'ordre 4, qui est donc l'ordre des stratégies optimales du jeu considéré. Cette stratégie optimale est donnée à la fin de ce paragraphe par la suite des coups s qu'elle fait jouer et des points correspondants $p=(p_1, p_2)$ obtenus en réponse.

On joue ainsi 3211 au premier coup. Si le point alors obtenu est (0, 1), on joue 4244 au deuxième coup. Puis, si le point alors obtenu est (1, 2), on joue 4121 au troisième coup. Enfin, si le point alors obtenu est (0, 2), la seule possibilité est de jouer 2442 au quatrième et dernier coup, ce qui donne $p_*=(4, 0)$, de sorte que $s_*=2442$ (*voir* la sixième ligne de la première colonne).

Remarque : La stratégie optimale ainsi obtenue n'est pas unique. On en obtient d'autres en permutant entre eux soit les entiers 1, 2, 3, 4 utilisés pour former les éléments de S, soit les places 1, 2, 3, 4 occupées par les entiers constituant chaque élément de S. Dans les deux cas, la permutation est la même pour tous les $s \in S$. Par exemple, la transposition de 1 et 2 donnera pour 3411, 3422 si elle s'applique aux chiffres et 4311 si elle s'applique aux places. On peut, bien entendu, combiner ces deux procédés.

Pour : $n=4$, $m=6$, on a, avec $\pi=13$,

$$\begin{cases} \tau_1(S)=|S|=1296, \\ \tau_2(S)=\min\limits_s \max\limits_p |\mathscr{P}_s^{-1}(p)|=256. \end{cases}$$

Dans le calcul de $\tau_2(S)$, le minimum est atteint pour $s=s_1=1122$, à une permutation près. $|\mathscr{P}_{s_1}^{-1}(p)|$ est maximum pour :

$$p=(0, 0), \qquad (1, 0) \qquad \text{et} \qquad (0, 1),$$

(11) et (12) donnent respectivement :

$$q_0 \geqq 4 \qquad \text{et} \qquad q_0 \geqq 5.$$

La stratégie particulière construite est d'ordre 5, qui est donc l'ordre des stratégies optimales du jeu considéré. Faute de place, on ne donne pas ici cette stratégie optimale.

3211	11	4141	02	2412	04	1224	40
3211	11	4141	02	2412	11	3424	40
3211	11	4141	03	2414	40		
3211	11	4141	04	1414	40		
3211	11	4141	10	4232	40		
3211	11	4141	10	4232	10	3133	40
3211	11	4141	10	4232	12	3342	40
3211	11	4141	10	4232	13	2243	40
3211	11	4141	10	4232	22	4223	40
3211	11	4141	10	4232	30	4233	40
3211	11	4141	11	3422	02	4313	40
3211	11	4141	11	3422	03	4234	40
3211	11	4141	11	3422	11	3134	40
3211	11	4141	11	3422	12	1242	40
3211	11	4141	11	3422	21	2421	40
3211	11	4141	11	3422	30	3442	40
3211	11	4141	12	4412	40		
3211	11	4141	12	4412	04	1244	40
3211	11	4141	12	4412	11	1114	40
3211	11	4141	12	4412	21	4314	40
3211	11	4141	12	4412	30	4413	40
3211	11	4141	20	4331	40		
3211	11	4141	20	4331	04	3143	40
3211	11	4141	20	4331	11	4243	40
3211	11	4141	21	2441	40		
3211	11	4141	21	2441	12	3144	40
3211	11	4141	21	2441	21	4431	40
3211	11	4141	21	2441	22	4421	40
3211	11	4141	22	1441	40		
3211	11	4141	22	1441	04	4114	40
3211	11	4141	30	1141	40		
3211	11	4141	30	1141	20	4341	40
3211	12	2312	40				
3211	12	2312	02	1412	03	4131	40
3211	12	2312	02	1412	04	4121	40
3211	12	2312	02	1412	11	1131	40
3211	12	2312	02	1412	12	1121	40
3211	12	2312	02	1412	21	1431	40
3211	12	2312	02	1412	22	1421	40
3211	12	2312	03	3123	40		
3211	12	2312	03	3123	03	1234	40
3211	12	2312	03	3123	12	1243	40
3211	12	2312	03	3123	13	1233	40
3211	12	2312	03	3123	30	3124	40
3211	12	2312	04	1223	40		
3211	12	2312	11	4113	40		
3211	12	2312	11	4113	03	1331	40
3211	12	2312	11	4113	04	1341	40
3211	12	2312	11	4113	12	2141	40
3211	12	2312	11	4113	22	1413	40
3211	12	2312	11	4113	30	1113	40
3211	12	2312	12	3132	40		
3211	12	2312	12	3132	03	4321	40
3211	12	2312	12	3132	11	2121	40
3211	12	2312	12	3132	12	2431	40
3211	12	2312	12	3132	30	3142	40
3211	12	2312	13	3122	40		
3211	12	2312	13	3122	13	1232	40
3211	12	2312	20	1412	40		
3211	12	2312	20	1412	13	2114	40
3211	12	2312	20	1412	20	1313	40
3211	12	2312	20	1412	21	1314	40
3211	12	2312	20	1412	22	4112	40
3211	12	2312	20	1412	30	1112	40
3211	12	2312	21	2413	40		
3211	12	2312	21	2413	12	2331	40
3211	12	2312	21	2413	13	2341	40
3211	12	2312	22	2321	40		
3211	12	2312	30	4312	40		
3211	12	2312	30	4312	20	2112	40
3211	12	2312	30	4312	21	2313	40
3211	12	2312	30	4312	22	2314	40
3211	13	1312	40				
3211	13	1312	04	2131	40		
3211	13	1312	13	2113	40		
3211	13	1312	22	1321	40		
3211	20	1414	00	2212	10	3233	40
3211	20	1414	00	2212	11	3223	40
3211	20	1414	00	2212	20	3232	40
3211	20	1414	00	2212	21	3222	40
3211	20	1414	01	3242	40		
3211	20	1414	01	3242	10	3331	40
3211	20	1414	01	3242	11	2221	40
3211	20	1414	01	3242	30	3243	40
3211	20	1414	02	2241	40		
3211	20	1414	02	2241	20	3341	40
3211	20	1414	02	2241	22	4221	40
3211	20	1414	03	4241	40		
3211	20	1414	10	3224	40		
3211	20	1414	10	3224	10	3313	40
3211	20	1414	10	3224	11	2212	40
3211	20	1414	10	3224	30	3234	40
3211	20	1414	11	4212	40		
3211	20	1414	11	4212	02	3431	40
3211	20	1414	11	4212	11	3244	40
3211	20	1414	12	4111	40		
3211	20	1414	12	4111	11	3441	40
3211	20	1414	20	3413	40		
3211	20	1414	20	3413	10	1111	40
3211	20	1414	20	3413	11	2214	40
3211	20	1414	20	3413	22	3314	40
3211	20	1414	21	4214	40		
3211	20	1414	22	4411	40		
3211	20	1414	30	3414	40		
3211	20	1414	30	3414	20	1411	40
3211	21	3141	40				
3211	21	3141	02	1212	40		
3211	21	3141	02	1212	21	2213	40
3211	21	3141	03	4213	40		
3211	21	3141	03	4213	21	1214	40
3211	21	3141	11	3312	40		
3211	21	3141	11	3312	02	1221	40
3211	21	3141	11	3312	03	2231	40
3211	21	3141	12	3412	40		

```
3211 40
3211 00 4444 40
3211 01 4244 02 2422 40
3211 01 4244 10 4333 40
3211 01 4244 11 4433 40
3211 01 4244 12 4121 02 2442 40
3211 01 4244 12 4121 11 2424 40
3211 01 4244 12 4121 20 4422 40
3211 01 4244 20 4343 40
3211 01 4244 20 4343 22 4334 40
3211 01 4244 21 4443 40
3211 01 4244 21 4443 21 1444 40
3211 01 4244 21 4443 22 4434 40
3211 01 4244 22 4121 02 2444 40
3211 01 4244 22 4121 11 4442 40
3211 01 4244 22 4121 20 4424 40
3211 01 4244 30 4144 40
3211 01 4244 30 4144 30 4344 40
3211 02 2144 40
3211 02 2144 01 1333 40
3211 02 2144 02 4332 40
3211 02 2144 02 4332 12 1433 40
3211 02 2144 02 4332 22 4323 40
3211 02 2144 02 4332 30 4322 40
3211 02 2144 03 4432 40
3211 02 2144 03 4432 20 1422 40
3211 02 2144 03 4432 22 4423 40
3211 02 2144 10 2432 12 2323 40
3211 02 2144 10 2432 20 2333 40
3211 02 2144 10 2432 21 2322 40
3211 02 2144 10 2432 30 2332 40
3211 02 2144 11 1343 40
3211 02 2144 11 1343 02 2432 40
3211 02 2144 11 1343 11 2423 40
3211 02 2144 11 1343 12 2433 40
3211 02 2144 11 1343 13 4133 40
3211 02 2144 11 1343 22 1334 40
3211 02 2144 12 4342 40
3211 02 2144 12 4342 03 1434 40
3211 02 2144 12 4342 12 1443 40
3211 02 2144 12 4342 20 4122 40
3211 02 2144 12 4342 22 4324 40
3211 02 2144 13 1442 40
3211 02 2144 13 1442 22 1424 40
3211 02 2144 20 2342 40
3211 02 2144 20 2342 20 2122 40
3211 02 2144 20 2342 21 2334 40
3211 02 2144 20 2342 22 2324 40
3211 02 2144 20 2342 30 2343 40
3211 02 2144 21 4143 40
3211 02 2144 21 4143 03 2434 40
3211 02 2144 21 4143 13 1344 40
3211 02 2144 21 4143 21 2443 40
3211 02 2144 21 4143 22 4134 40
3211 02 2144 22 4142 40
3211 02 2144 22 4142 22 4124 40
3211 02 2144 30 4332 01 1144 40
3211 02 2144 30 4332 02 2124 40
3211 02 2144 30 4332 11 2142 40
3211 02 2144 30 4332 12 2344 40
3211 03 1342 40
3211 03 1342 03 2123 40
3211 03 1342 03 2123 30 2133 40
3211 03 1342 04 4123 40
3211 03 1342 04 4123 13 2134 40
3211 03 1342 11 1133 40
3211 03 1342 12 2132 40
3211 03 1342 12 2132 11 1124 40
3211 03 1342 12 2132 20 1134 40
3211 03 1342 13 4132 40
3211 03 1342 13 4132 04 1423 40
3211 03 1342 13 4132 13 2143 40
3211 03 1342 20 1122 40
3211 03 1342 21 1323 40
3211 03 1342 21 1323 20 1143 40
3211 03 1342 22 1432 40
3211 03 1342 22 1432 13 1324 40
3211 03 1342 30 1332 40
3211 03 1342 30 1332 20 1142 40
3211 03 1342 30 1332 30 1322 40
3211 04 1132 40
3211 04 1132 22 1123 40
3211 10 1434 00 2222 40
3211 10 1434 01 4222 40
3211 10 1434 01 4222 22 2242 40
3211 10 1434 02 4242 40
3211 10 1434 02 4242 10 3343 40
3211 10 1434 10 3333 40
3211 10 1434 10 3333 00 2224 40
3211 10 1434 11 4224 40
3211 10 1434 11 4224 22 2244 40
3211 10 1434 11 4224 30 4244 40
3211 10 1434 12 4441 40
3211 10 1434 12 4441 11 3344 40
3211 10 1434 12 4441 20 3443 40
3211 10 1434 20 3433 40
3211 10 1434 20 3433 22 3334 40
3211 10 1434 21 4414 40
3211 10 1434 21 4414 21 3444 40
3211 10 1434 30 3434 40
3211 11 4141 40
3211 11 4141 00 2232 40
3211 11 4141 00 2232 02 3323 40
3211 11 4141 00 2232 12 3322 40
3211 11 4141 00 2232 20 3332 40
3211 11 4141 00 2232 22 2223 40
3211 11 4141 00 2232 30 2233 40
3211 11 4141 01 3432 40
3211 11 4141 01 3432 10 1222 40
3211 11 4141 01 3432 12 2234 40
3211 11 4141 01 3432 13 3324 40
3211 11 4141 01 3432 22 3423 40
3211 11 4141 01 3432 30 3422 40
3211 11 4141 02 2412 40
```

```
3211 21 3141 12 3412 04 4231 40
3211 21 3141 12 3412 11 1311 40
3211 21 3141 12 3412 21 2411 40
3211 21 3141 13 4311 40
3211 21 3141 20 3321 40
3211 21 3141 20 3321 11 2111 40
3211 21 3141 21 3113 40
3211 21 3141 21 3113 02 1241 40
3211 21 3141 21 3113 11 3421 40
3211 21 3141 22 3114 40
3211 21 3141 30 3131 40
3211 22 3112 40
3211 22 3112 04 1231 40
3211 22 3112 13 1213 40
3211 22 3112 13 1213 13 2311 40
3211 22 3112 22 3121 40
3211 30 3341 10 1211 40
3211 30 3341 10 1211 30 2211 40
3211 30 3341 11 3212 40
3211 30 3341 11 3212 20 4211 40
3211 30 3341 12 3213 40
3211 30 3341 12 3213 30 3214 40
3211 30 3341 20 3111 40
3211 30 3341 20 3111 20 3221 40
3211 30 3341 21 3231 40
3211 30 3341 21 3231 20 3411 40
3211 30 3341 30 3241 40
3211 30 3341 30 3241 20 3311 40
```

BIBLIOGRAPHIE

1. S. Vajda, *The Theory of Games and Linear Programming*, Methuen, London, 1961.