

Y. BARAN-MARSZAK

D. ENCAOUA

## **Calcul numérique d'un équilibre général avec distorsion fiscale. I**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 13, n° 3 (1979),  
p. 253-273

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1979\\_\\_13\\_3\\_253\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_3_253_0)

© AFCET, 1979, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## CALCUL NUMÉRIQUE D'UN ÉQUILIBRE GÉNÉRAL AVEC DISTORSION FISCALE. I (\*)

par Y. BARAN-MARSZAK et D. ENCAOUA <sup>(1)</sup> <sup>(2)</sup>

La longueur de cet article a nécessité que sa publication soit découpée en deux parties présentées dans deux numéros successifs de cette revue.

La première partie présente un modèle d'équilibre général avec fiscalité. Après avoir démontré l'existence de l'équilibre par application d'un théorème de point fixe, cette partie présente des algorithmes de calcul numérique de points fixes d'applications continues définies dans un convexe compact de  $R^n$  à valeurs dans lui-même.

La deuxième partie présente une adaptation de ces algorithmes au calcul de l'équilibre du modèle considéré et donne les résultats obtenus pour diverses variantes numériques du modèle.

**Résumé.** — *Le but de cet article est de présenter un modèle économique d'allocation de ressources avec fiscalité et d'en déterminer numériquement l'équilibre par application d'algorithmes de calcul introduits par les travaux de H. Scarf. Le modèle économique retenu concerne un système composé de deux pays ou régions dans lesquels les activités de production et de commerce se réalisent en présence de distorsions fiscales représentées par des impôts directs, indirects, droits de douane et transferts sociaux.*

*La fiscalité introduit un enrichissement du modèle théorique de l'équilibre concurrentiel et permet en outre d'étudier l'influence de plusieurs systèmes de taxation sur les résultats de l'équilibre.*

*La première partie présente le modèle d'équilibre général avec fiscalité dont une spécification numérique sera envisagée à la deuxième partie. Après avoir démontré l'existence de l'équilibre par application d'un théorème de point fixe, on présente dans cette partie une description des algorithmes de calcul numérique de points fixes d'applications continues.*

*La deuxième partie présente une adaptation de ces algorithmes au calcul de l'équilibre du modèle considéré et donne les résultats numériques obtenus pour diverses spécifications numériques.*

*La longueur de l'article a nécessité sa publication dans deux numéros successifs de la revue. Le découpage qui en résulte correspond aux deux parties mentionnées.*

**Abstract.** — *An economic model of resource allocation with fiscality is presented here and its equilibrium is computed by using numerical algorithms first introduced by H. Scarf.*

*The economic model relates to two countries in which trade and production are affected by fiscal distortions as direct and indirect taxes, tariffs and social transfers. Different values of taxes are considered and their impact upon the economic equilibrium is measured.*

*As the existence of economic equilibrium depends of a fixed point theorem, the paper contains a description of different algorithms used for computation of continuous mappings fixed points and for related problems.*

*The length of this paper induced its publication in two separate issues of this review.*

(\*) Reçu juillet 1976.

(<sup>1</sup>) Les auteurs remercient M. Michael Jerison, Department of Economics, Suny at Albany, New York, des remarques et suggestions adressées à la version révisée de cet article. Ils restent néanmoins seuls responsables des éventuelles erreurs qui subsistent.

(<sup>2</sup>) Centre de Mathématiques économiques, Université de Paris-I.

## INTRODUCTION

La théorie de l'équilibre général de Walras a joué un rôle important dans la science économique, en tant que cadre conceptuel d'analyse de l'interdépendance générale des comportements des divers agents d'un système économique. Ce n'est pas tant le réalisme de ses hypothèses — loin s'en faut — ni la pertinence des principes de politique économique qui s'en dégagent qui ont rendu célèbre ce cadre d'analyse. Son importance réside plutôt dans la conceptualisation de la notion d'équilibre général pour traduire le lien entre les actions de divers agents d'une économie décentralisée. Si les marchés des biens et services, fonctionnant de manière concurrentielle, sont censés transmettre aux agents économiques du système des séries d'informations qui leur permettent d'ajuster leurs plans d'activité jusqu'à en assurer la cohérence d'ensemble, la question s'est posée de la possibilité, pour un organe central de planification, disposant d'informations détaillées concernant les agents économiques, de se substituer au marché en envoyant des signaux — sous forme de prix — qui, adoptés par les agents, permettraient d'assurer une cohérence globale sur tous les marchés.

Deux voies d'approche de ce problème ont été considérées :

- l'une est établie en termes de procédures de planification qui simulent plus ou moins les ajustements que des marchés concurrentiels réaliseraient face aux comportements des divers agents. Les procédures dites de « tatonnement walrasien » sont un exemple caractéristique de ce type d'approche;
- l'autre approche, inspirée directement des théorèmes d'existence d'un équilibre général, consiste à évaluer numériquement les prix qui réalisent l'égalité des offres et des demandes sur les marchés des différents biens.

Cette seconde approche, de tendance plus récente, trouve son origine dans les travaux de H. Scarf [5, 6]. Des procédures de calcul numérique ont été utilisées pour obtenir des approximations d'équilibres économiques dans le cadre de modèles très simples d'économies d'échange ou d'économies productives dans lesquelles la production est représentée par un modèle linéaire de type Léontieff ou von Neumann.

Dans le cadre de ce type de modèles, Shoven et Whalley [7, 8] ont introduit un système de taxes fiscales et, par application de l'algorithme de Scarf <sup>(3)</sup>, démontré l'existence de l'équilibre général.

Depuis les travaux de Scarf, d'autres algorithmes, utilisant les mêmes concepts ont été développés par Eaves [2] et Kuhn et MacKinnon [3]. Ces derniers

---

<sup>(3)</sup> L'algorithme de Scarf donne une démonstration constructive du lemme de Sperner [6], démonstration dont il faut trouver le fondement original dans l'algorithme de Lemke Howson [4] pour calculer les stratégies d'équilibre d'un jeu bimatrixiel à somme non nulle.

travaux permettent d'aboutir à des résultats d'une bonne précision sur des modèles qui, même s'ils restent de taille modeste, permettent d'intégrer un certain nombre de spécificités de la théorie économique. Dans cet article, nous présenterons un modèle général d'équilibre avec distorsion fiscale, susceptible de recevoir plusieurs variantes, afin d'évaluer numériquement l'influence de chacune d'elles à l'équilibre.

Le système économique considéré est composé de deux pays (ou deux régions d'un même pays où la fiscalité ne serait pas identique) technologiquement liés, dans lesquels un système de fiscalité directe et indirecte modifie la distribution des revenus. Les recettes fiscales sont intégralement versées aux résidents selon un système de coefficients de transfert, modifiant ainsi la répartition des revenus. De ce fait, la décentralisation par les prix qui caractérise habituellement les systèmes concurrentiels est à présent insuffisante. Supposons que les prix de tous les biens et les montants globaux des transferts soient fixés. Les transactions qui peuvent avoir lieu à ces conditions font alors apparaître des offres et demandes sur les marchés des différents biens, ainsi que des recettes fiscales globales dégagées à partir de ces transactions. Ceci conduit alors à définir l'équilibre du système économique à partir d'un système de prix et de transferts globaux tels que :

- les marchés de chacun des biens soient équilibrés;
- les budgets des deux pays soient équilibrés, i.e. le montant des recettes fiscales collectées soit égal au montant des transferts versés <sup>(4)</sup>.

Par la modification des caractéristiques du système fiscal, le modèle retenu permet d'étudier l'influence de plusieurs variantes de politique économique :

- effet de l'appropriation publique de profits des entreprises;
- abolition des barrières douanières;
- modification de la politique des transferts;
- changement de types de fiscalité indirecte.

Dans une première partie, nous présentons le modèle et démontrons l'existence d'un équilibre général. Dans une seconde partie, nous décrivons l'algorithme utilisé pour déterminer une solution numérique. Dans une troisième partie nous explicitons l'application numérique et les résultats obtenus.

---

<sup>(4)</sup> Shafer et Sonnenschein (Internat. Econ. Rev., vol. 17, n° 3, octobre 1976) ont étudié l'existence de l'équilibre général dans une économie comportant des distorsions fiscales et des externalités. Le traitement général de la fiscalité, qui permet de retrouver la formulation de notre modèle comme cas particulier, amène néanmoins les auteurs à formuler une hypothèse (*f*), p. 604, qui impose pour tout vecteur de production et consommation réalisable, et pour tout système de prix hors taxes, que le montant des transferts versés soit égal au montant des recettes fiscales collectées. Dans le cadre restrictif de notre modèle, l'existence de l'équilibre général ne requiert pas une telle hypothèse.

## I. LE MODÈLE

Le cadre général du modèle a brièvement été esquissé en introduction. Explicitons ses caractéristiques en présentant les notations employées.

### Pays

Les deux pays sont indicés par  $i \in \{1, 2\}$ .

### Biens

Les biens sont indicés par  $l \in L = L_1 \cup L_2$ , où  $L_i$  désigne l'ensemble des biens détenus ou produits par les résidents du pays  $i$ . Dans chaque pays on distingue les biens finaux (demandés par les consommateurs), les biens intermédiaires (demandés par les producteurs), et les facteurs primaires de production (possédés par les agents consommateurs et non produits). On suppose qu'il n'y a pas de mobilité des facteurs de production entre les deux pays.

### Consommateurs

Les consommateurs sont indicés par  $m \in M = M_1 \cup M_2$  et distingués par leur pays de résidence. Ils peuvent demander des biens finaux nationaux ou importés.

### Producteurs

Les producteurs sont indicés par  $j \in J = J_1 \cup J_2$  et distingués également par leur pays de résidence. Ils peuvent utiliser des biens intermédiaires locaux ou importés. Néanmoins ils ne peuvent utiliser que les facteurs de production disponibles dans leur pays de résidence.

### Système de prix

Le système de prix est représenté par un vecteur  $p \in \mathbf{R}^L$ . L'interprétation du système de prix  $p$  varie suivant le type de fiscalité étudiée.

### Impôts indirects

Deux types de fiscalité indirecte ont été considérés dans ce modèle.

Le premier concerne des contributions indirectes, applicables à chaque transaction d'achat et répercutées immédiatement sur le client. Le second concerne une taxe sur le chiffre d'affaires du type de la Taxe sur la Valeur Ajoutée.

Explicitons séparément les notations utilisées dans chacun de ces deux cas.

1) Dans le premier cas, si un *bien final*  $l$  est acheté en quantité  $x_l$  par un consommateur, en désignant par  $s_l$  le montant de la taxe *ad valorem* sur le bien  $l$ , la dépense de ce consommateur est  $p_l(1+s_l)x_l$  dont la partie  $p_l x_l$  va au producteur de bien  $l$  et la partie  $p_l s_l x_l$  est versée au pays de résidence du consommateur.

De même si le producteur de bien final  $l$  utilise la quantité  $y_h$  de *facteur primaire* ou de *bien intermédiaire* pour produire la quantité  $y_l$ , en désignant par  $t_h$  le montant de la taxe sur le bien  $h$ , le profit du producteur s'écrit  $p_l y_l - p_h(1+t_h)y_h$  dont la partie  $p_h t_h y_h$  est versée au pays d'appartenance du producteur. Ainsi si le bien intermédiaire  $h$  est importé, cette quantité correspond à un droit de douane.

Un bien intermédiaire d'un producteur étant éventuellement un output d'un autre producteur, il devient nécessaire — du point de vue des notations — d'indiquer le vecteur des taxes à la production par l'indice du producteur. On peut également homogénéiser les notations en adoptant les conventions suivantes : les outputs étant comptés positivement et les inputs négativement, le signe de  $t_h^j$  est tel que  $t_h^j y_h^j \geq 0$ . Le profit du producteur  $j$  s'écrit alors dans ces conditions :  $\sum_{l \in L} p_l y_l^j (1 - t_l^j)$ . Le vecteur des prix  $p$  peut donc s'interpréter dans ce cas comme des prix de marché hors taxes.

2) Dans le cas de la fiscalité indirecte de type T.V.A., les notations peuvent devenir plus homogènes.

Si on note  $T$  la matrice diagonale de dimensions  $L \times L$  où l'élément diagonal de la ligne  $h$  est  $1 - t_h$  (avec  $0 \leq t_h \leq 1$ ), le vecteur des prix à la production devient  $Tp$ , où  $p$  désigne à présent le vecteur des prix à la consommation. Les seuls indices  $h$  pour lesquels  $t_h > 0$  sont à présent les biens finaux et les biens intermédiaires.

Quant aux facteurs primaires, ils peuvent supporter des charges indirectes (les cotisations sociales peuvent être économiquement assimilables à des impôts indirects) qui ne sont pas déductibles des autres impôts indirects.

## Impôts directs

### 1) Des consommateurs

Les consommateurs disposent de ressources initiales en facteurs de production. Nous avons supposé, dans l'application numérique que les demandes des consommateurs ne portent que sur les biens finaux et non sur les facteurs primaires. Ceci revient à supposer par exemple qu'il n'y a pas de désutilité du facteur travail. Les facteurs sont rénumérés au prix de marché et chaque consommateur paie alors un impôt sur cette partie de son revenu. On

peut supposer également que le taux de l'impôt n'est pas le même selon la nature du facteur. Si nous représentons alors par  $c$  le vecteur de  $\mathbf{R}^{L+}$  qui représente les taux d'impôts directs auxquels sont soumis les consommateurs on peut écrire le revenu net issu des ressources initiales de l'agent  $m$  :

$$\sum_{l \in L} p_l (1 - c_l) w_l^m,$$

où  $w_l^m$  représente la ressource initiale en facteur  $l$  de l'agent  $m$ .

On pourrait également envisager des impôts progressifs sur le revenu, en ne considérant pas des taux uniformes  $c_l$ , mais des taux par tranches de revenus. Cette variante, concevable d'un point de vue numérique, n'a néanmoins pas été formalisée.

## 2) Des producteurs

L'assiette de l'impôt direct des producteurs est le bénéfice après paiement des impôts indirects. Si on désigne alors par  $d^j \in \mathbf{R}^+$  le taux de l'impôt direct du producteur  $j$ , le profit net après paiement des impôts indirects et directs du producteur  $j$  s'écrit :  $(1 - d^j) \sum_{l \in L} p_l y_l^j (1 - t_l^j)$  dans le cas du premier type de fiscalité indirecte et  $(1 - d^j) T p y^j$  dans le cas de la fiscalité de type T.V.A.

Remarquons ici que nous pourrions inclure la fiscalité directe représentée par le système de taux  $d^j$  dans la fiscalité indirecte du premier type représentée par les coefficients  $t_l^j$ . Il est néanmoins intéressant pour l'application numérique de distinguer les deux types de taxes pour isoler les effets de chacun d'eux.

## Distribution des profits

Deux variantes ont été envisagées dans ce modèle.

### 1) Économie de propriété privée

Les consommateurs sont actionnaires des diverses entreprises et les profits nets de celles-ci leurs sont alors distribués selon des parts données par des coefficients  $b^{jm}$  vérifiant :

$$b^{jm} \geq 0, \quad \forall j \in J, \quad \forall m \in M \quad \text{et} \quad \sum_{m \in M} b^{jm} = 1, \quad \forall j \in J.$$

Le nombre  $b^{jm}$  représente la part de profits réalisés par le producteur  $j$  allouée au consommateur  $m$ . On supposera dans ce cas que le consommateur  $m$  ne paie pas d'impôts sur la partie de son revenu issue des profits, puisque les entreprises se sont déjà acquittées de l'impôt direct sur les bénéfices.

### 2) Économie de propriété publique

Les profits des producteurs sont intégralement versés à leur pays de résidence venant ainsi augmenter les recettes fiscales de celui-ci; cette variante revient à

considérer que les taux d'impôts sur les bénéfices des producteurs (coefficients  $d$ ) sont de 100 %.

### Coefficients de transfert des recettes fiscales

Les recettes fiscales d'un pays sont versées aux résidents de ce pays selon des coefficients de transfert  $a^m \geq 0$  tels que  $\sum_{m_i \in M_i} a^{m_i} = 1$ ,  $i = 1, 2$ . Ainsi si le pays 1 réalise des transferts globaux d'un montant  $R_1$  l'agent  $m_1$  percevra  $a^{m_1} R_1$ .

Explicitons à présent les « règles de comportement » des agents dans le modèle.

#### a) Consommateurs

Le consommateur  $m$  dispose d'un préordre de préférences sur l'espace des biens, préordre représenté par une fonction d'utilité  $U^m$  définie sur l'ensemble des consommations possibles  $(\mathbf{R}^L)^+$ . Dans le cas d'une fiscalité indirecte du premier type et d'une économie de propriété privée la contrainte de budget de l'agent  $m_1$  du pays 1 (pays ayant réalisé des transferts globaux d'un montant  $R_1$ ) s'écrit :

$$\sum_{l \in L} p_l (1 + s_l) x_l^{m_1} \leq \sum_{l \in L} p_l (1 - c_l) w_l^{m_1} + \sum_{j \in J} b^{j m_1} (1 - d^j) \sum_{l \in L} p_l y_l^j (1 - t_l^j) + a^{m_1} R_1.$$

#### b) Producteurs

Le producteur  $j$  dispose d'un ensemble de production  $Y^j$  et cherche à maximiser son profit après paiement des impôts indirects. Dans le cas d'une fiscalité indirecte du premier type, le producteur  $j$  cherche à résoudre le programme

$$\text{Max}_{y^j \in Y^j} \sum_{l \in L} p_l y_l^j (1 - t_l^j).$$

#### c) Recettes fiscales des deux pays

Pour un système fiscal donné chaque pays se contente de percevoir des impôts et de les redistribuer. Le système fiscal est donc un paramètre de notre modèle et non pas une variable de décision. On peut donner l'expression du montant des impôts collectés dans les deux pays. Par exemple dans le pays 1, on a pour une fiscalité indirecte du premier type

$$I_1(p, R_1) = \sum_{m_1 \in M_1} \sum_{l \in L} [p_l s_l x_l^{m_1} + p_l c_l w_l^{m_1}] + \sum_{j_1 \in J_1} \sum_{l \in L} [p_l y_l^{j_1} t_l^{j_1} + d^{j_1} p_l y_l^{j_1} (1 - t_l^{j_1})].$$

Remarquons ici que les recettes fiscales du pays  $i$  dépendent du montant global  $R_i$  des transferts versés aux résidents de ce pays. En effet, les demandes de ces derniers sont fonction de leur revenu dont une composante est issue des transferts.



Nous allons alors nous placer dans les conditions d'un *équilibre de marché* au sens de Arrow-Hahn [1], c'est-à-dire dans le cas où les fonctions d'offre et de demande globales sont à valeurs uniques, lorsqu'elles sont définies. Plus précisément, nous supposons vérifiées toutes les hypothèses assurant que :

1° les fonctions de demande globale  $x(p, R_1, R_2)$  sont définies dans  $\overset{\circ}{A}_L \times (\mathbf{R}^2)^+$  (où  $\overset{\circ}{A}_L$  est l'intérieur relatif de  $A_L$ ) et éventuellement dans un ensemble incluant  $\overset{\circ}{A}_L \times (\mathbf{R}^2)^+$ . Elles sont continues en tout point  $(p, R_1, R_2)$  en lequel elles sont définies. Les contraintes de budget sont supposées saturées à l'équilibre de chaque consommateur.

2° les fonctions d'offre globale  $y(p)$  sont définies et continues dans  $A_L$ . Nous supposons en particulier que les ensembles de production sont *bornés* et qu'ils contiennent chacun le vecteur 0;

3° nous supposons <sup>(5)</sup> de plus, comme Arrow-Hahn [1], qu'en les points  $p^0 \in A_L \setminus \overset{\circ}{A}_L$ , en lesquels la fonction d'excès de demande globale  $Z$  n'est pas définie

$$\sum_i Z_i(p, R_1, R_2) \xrightarrow[p \rightarrow p^0]{} +\infty, \quad \forall (R_1, R_2) \in (\mathbf{R}^2)^+.$$

Avant de donner la définition de l'équilibre de ce système économique, on peut écrire l'expression de la loi de Walras.

Si on désigne par  $Z(p, R_1, R_2)$  la fonction d'excès de demande globale à valeurs dans  $\mathbf{R}^L$ , on obtient :

$$p \cdot Z(p, R_1, R_2) + I_1(p, R_1) + I_2(p, R_2) = R_1 + R_2.$$

L'homogénéité de degré 0 en  $(p, R_1, R_2)$  des contraintes de budget des consommateurs nous permet de prendre la règle de normalisation

$$p \in A_L = \left[ p \in \mathbf{R}^L \middle/ \sum_{i \in L} p_i = 1 \right].$$

De plus nous pouvons prendre  $(R_1, R_2) \in (\mathbf{R}^2)^+$ .

Donnons à présent la définition de l'équilibre du système économique considéré.

<sup>(5)</sup> Cette hypothèse pourrait être remplacée par la suivante : il existe un nombre  $S_1 > 0$  tel que en tous les points  $(p^0, R_1, R_2)$  en lesquels  $Z(p, R_1, R_2)$  n'est pas définie, il existe un voisinage  $V(p^0, R_1, R_2) = V^0$  tel que

$$\sum_i Z_i(p, R_1, R_2) > S_1, \quad \forall (p, R_1, R_2) \in V^0.$$

DÉFINITION :  $[p^*, R_1^*, R_2^*, (x^m)^*_{m \in M}, (y^j)^*_{j \in J}]$  est un équilibre si les conditions suivantes sont vérifiées :

- 1°  $p^* \in A_L$ ;  $(R_1^*, R_2^*) \in (\mathbb{R}^2)^+$ ;
- 2°  $(x^m)^*$  réalise l'équilibre de l'agent  $m$  pour  $(p^*, R_1^*, R_2^*)$  donnés;
- 3°  $(y^j)^*$  réalise l'équilibre de l'agent  $j$  pour  $p^*$  donné;
- 4°  $I_1(p^*, R_1^*) = R_1^*$  et  $I_2(p^*, R_2^*) = R_2^*$ ;
- 5°  $Z(p^*, R_1^*, R_2^*) \leq 0$ .

Remarquons alors que d'après 4° et la loi de Walras on a :  $p^* Z(p^*, R_1^*, R_2^*) = 0$ .

Afin de démontrer l'existence de l'équilibre, nous allons montrer qu'il suffit de rechercher  $(p, R_1, R_2)$  dans un sous ensemble compact de  $A_L \times (\mathbb{R}^2)^+$ .

En utilisant les expressions de  $I_1(p, R_1) + I_2(p, R_2)$  et celle de la loi de Walras, on peut obtenir la majoration suivante, dans le cas d'une fiscalité indirecte du premier type :

$$\forall p \in A_L, \quad I_1(p, R_1) + I_2(p, R_2) < K + s(R_1 + R_2), \quad \forall (R_1, R_2) \in (\mathbb{R}^2)^+,$$

où  $s = \max_{l \in L} s_l$  et  $K = a(c + s) + b(t + s + b)$ .

Dans l'expression de  $K$  les différents paramètres désignent :

$$\begin{aligned} a &= \max_{l \in L} \sum_{m \in M} w_l^m; & b &= \max_{l \in L} \sum_{j \in J} |y_l^j|; & c &= \max_{l \in L} c_l, \\ t &= \max_{j \in J, l \in L} |t^j|; & d &= \max_{j \in J} d^j. \end{aligned}$$

Supposons que  $s$  soit strictement inférieur à 1.

Comme à l'équilibre on doit avoir  $I_1(p^*, R_1^*) = R_1^*$  et  $I_2(p^*, R_2^*) = R_2^*$ , pour la règle de normalisation  $p \in A_L$  choisie, il ne peut exister d'équilibre en dehors de l'ensemble  $A_L \times \Delta$ , où

$$\Delta = \left\{ (R_1, R_2) / R_1 \geq 0, R_2 \geq 0 \text{ et } R_1 + R_2 \leq \frac{K}{1-s} \right\}.$$

La figure ci-après (fig. 1) illustre cette propriété.

Nous chercherons ainsi un équilibre  $(p^*, R_1^*, R_2^*)$  dans  $A_L \times \Delta$ .

Nous allons à présent définir une fonction dont le point fixe est l'équilibre recherché. La fonction d'excès de demande  $Z(p, R_1, R_2)$  n'est pas continue dans  $A_L \times \Delta$  mais seulement dans  $A_L^0 \times \Delta$ . D'après l'hypothèse 3°, en les points  $p^0 \in A_L$  en lesquels la fonction d'excès de demande n'est pas définie, on a

$$\sum_{l \in L} Z_l(p, R_1, R_2) \rightarrow +\infty \quad p \rightarrow p^0.$$

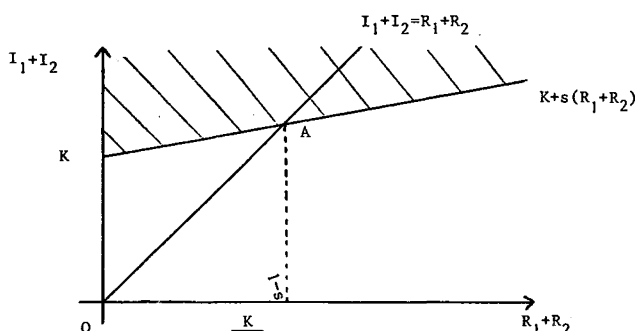


Figure 1. — L'équilibre appartient nécessairement au segment  $OA$ .

Soit alors l'application  $S$  de  $A_L \times \Delta$  dans  $\overline{\mathbf{R}}$  (où  $\overline{\mathbf{R}}$  désigne la droite achevée) :

$$S(p, R_1; R_2) = \begin{cases} \sum_{i \in L} Z_i(p, R_1, R_2) & \text{si } Z(p, R_1, R_2) \text{ est définie,} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit un nombre  $S_1 > 0$  choisi à l'avance. Définissons alors l'application continue  $f$  de  $A_L \times \Delta$  à valeurs dans  $[0, 1]$  de la façon suivante :

$$f(p, R_1, R_2) = \begin{cases} 0 & \text{si } S(p, R_1, R_2) \leq 0, \\ 1 & \text{si } S(p, R_1, R_2) < S_1, \\ S(p, R_1, R_2)/S_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Considérons enfin l'application  $M$  de  $A_L \times \Delta$  à valeurs dans  $\mathbf{R}^L$ , définie par :

$$M_i(p, R_1, R_2) = \begin{cases} [1 - f(p, R_1, R_2)] \text{Max}(0, Z_i(p, R_1, R_2)) + f(p, R_1, R_2) & \text{si } Z(p, R_1, R_2) \text{ est définie,} \\ 1 & \text{si } Z(p, R_1, R_2) \text{ n'est pas définie.} \end{cases}$$

L'application  $M$  est continue dans  $A_L \times \Delta$ . En effet, lorsque  $p \rightarrow p^0$  pour lequel  $Z(p, R_1, R_2)$  n'est pas définie, alors il existe un voisinage de  $p^0$ ,  $V(p^0)$  tel que  $S(p, R_1, R_2) > S_1$ ,  $\forall p \in V(p^0)$ . L'application  $M$  reste égale à  $e$  dans tout le voisinage  $V(p^0)$ , où  $e = (1, \dots, 1) \in \mathbf{R}^L$ . De plus  $I_1(p, R_1, R_2)$  et  $I_2(p, R_1, R_2)$  sont définies et continues dans  $A_L \times \Delta$ . En effet la saturation de la contrainte de budget permet de définir la valeur de la demande en tout point.

L'application continue  $F$  de  $A_L \times \Delta$  à valeurs dans  $A_L \times \Delta$  définie par

$$(p, R_1, R_2) \rightarrow \left[ \frac{p + M(p, R_1, R_2)}{1 + \sum_i M_i(p, R_1, R_2)}, I_1(p, R_1), I_2(p, R_2) \right]$$

admet bien un point fixe et on montre aisément que c'est un équilibre du système économique considéré.

## II. ALGORITHMES DE CALCUL D'APPROXIMATIONS DE POINTS FIXES. OBTENTION D'UN ÉQUILIBRE APPROCHÉ

Avant de décrire l'algorithme utilisé, nous donnerons quelques notations et définitions empruntées à H. Scharf [6].

### 1) Notations et définitions

Soit  $\mathcal{N}$  l'ensemble des entiers naturels.

Soit  $N \subset \mathcal{N} : N = \{1, \dots, n\}$ . Nous désignerons par  $\{e^i\}_{i \in N}$  les vecteurs de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$ .

#### *Simplexe*

Un simplexe de dimension  $n-1$  est l'enveloppe convexe de  $n$  vecteurs affinement indépendants  $x^{j_1}, \dots, x^{j_n}$  de  $\mathbf{R}^n$ . On dira que  $x^{j_1}, \dots, x^{j_n}$  sont les sommets de ce simplexe.

On notera  $A_N$  le simplexe unité de  $\mathbf{R}^n : A_N = \text{conv}(e^1, \dots, e^n)$ .

#### *Faces d'un simplexe*

Soit un simplexe de dimension  $n-1$  défini comme enveloppe convexe de ses sommets  $x^{j_1}, \dots, x^{j_n}$ . Une face de ce simplexe est l'enveloppe convexe d'un sous ensemble de  $\{x^{j_1}, \dots, x^{j_n}\}$ . Ainsi, pour  $S \subseteq N$  avec  $|S| = s$ ,  $\text{conv}(\{x^{j_i}\}_{i \in S})$  est un simplexe de dimension  $s-1$ .

Pour les faces de dimension  $n-2$  de  $A_N$  nous utiliserons la notation  $x^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , où  $x^i = \text{conv}(e^1, \dots, e^{i-1}, e^{i+1}, \dots, e^n)$ . On peut aussi écrire :  $x^i = \{x \in A_N / x_i = 0\}$ .

Grille régulière de  $A_N$  de pas  $\delta = 1/D$ , où  $D \in \mathcal{N}$ .

On notera

$$G = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in A_N / x_i = m_i/D, m_i \in \mathcal{N}, \sum_{i \in N} m_i = D \right\},$$

l'ensemble des points de la grille régulière de  $A_N$  de pas  $1/D$ . Désignons par  $\tilde{G}$  l'ensemble  $\tilde{G} = GU\{x^1, \dots, x^n\}$ ; la grille  $G$  est constituée de points que nous noterons  $x^j$ ,  $j$  variant de  $n+1$  à  $|\tilde{G}|$ . ( $|G| = |\tilde{G}| - n$ ).

La figure 2 donne un exemple de grille régulière pour  $n=3$  et  $D=4$ .

On peut montrer [2, 6] que  $G$  engendre une *partition simpliciale* de  $A_N$ . Nous nous contenterons ici d'en énoncer les propriétés nécessaires à la compréhension des algorithmes.

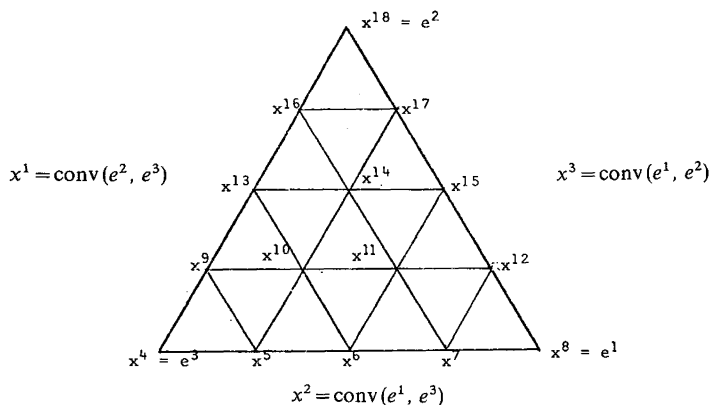


Figure 2

### Propriétés de la partition simpliciale engendrée par $G$

Soit  $S \subseteq N : S = \{l_1, \dots, l_s\} = N \setminus \{i_1, \dots, i_{n-s}\}$ ;  $S \neq \emptyset$ .

Nous désignerons par  $A_S$  le simplexe de dimension  $s-1$ ,  $A_S = \text{conv}(\{e^j\}_{j \in S})$ .  $A_S$  est une face de  $A_N$ ; plus précisément  $A_S$  est l'intersection des faces  $x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-s}}$  chacune de dimension  $n-2$ .

Désignons par  $\Sigma_S$  l'ensemble des simplexes de  $A_S$  de dimension  $s-1$ , appartenant à la *partition simpliciale* engendrée par les points de  $A_S \cap G$ . On peut illustrer cette notion à l'aide de la figure 2 où  $N = \{1, 2, 3\}$ , dans laquelle  $\Sigma_N$  est constitué de tous les triangles dont l'intérieur ne contient aucun point de la grille. De même  $\Sigma_{\{1,3\}}$  est constitué des quatre segments  $[x^4, x^5]$ ,  $[x^5, x^6]$ ,  $[x^6, x^7]$  et  $[x^7, x^8]$ .

On sait caractériser les simplexes de  $\Sigma_S$  [2], [6]. Pour cela numérotions les vecteurs  $x^{j_1}, \dots, x^{j_s}$  de  $A_S \cap G$  de façon à ce que  $x^{j_1} < x^{j_2} < \dots < x^{j_s}$  <sup>(6)</sup> et notons  $X^{j_i}$ ,  $i = 1, \dots, S$ , les vecteurs à composantes entières de  $\mathbf{R}^s$  définis par

$$X^{j_i} = (X_1^{j_i}, \dots, X_s^{j_i}), \quad \text{où} \quad X_r^{j_i} = D x_{i_r}^{j_i}, \quad r = 1, \dots, s.$$

Le simplexe  $\text{conv}(x^{j_1}, \dots, x^{j_s}) \in \Sigma_S$  si et seulement si il existe une permutation  $\beta$  de  $\{1, \dots, s\}$  telle que

$$X^{j_i} = X^{j_{i-1}} + q^{\beta(i)}, \quad i = 1, \dots, s \quad (7),$$

<sup>(6)</sup>  $x$  et  $x'$  étant deux vecteurs de  $\mathbf{R}^n$  on définit :

$$x < x' \Leftrightarrow \exists i_0 \text{ tel que } x_i = x'_i, \quad \forall i < i_0 \text{ et } x_{i_0} < x'_{i_0}.$$

<sup>(7)</sup> Dans cette égalité, les indices sont à considérer modulo  $s$  ( $j_0 = j_s$ ).

où  $q^k$  est la  $k$ -ième colonne de la matrice carrée de dimension  $s$  :

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & -1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & & 1 \\ 1 & 0 & 0 & & -1 \end{bmatrix}$$

Considérons maintenant  $\Sigma = \bigcup_{S \subseteq N, S \neq \emptyset} \Sigma_S$ .

Pour préciser les sommets  $x^{j_1}, \dots, x^{j_s}$  d'un élément de  $\Sigma_S$  et caractériser le fait que ces sommets sont dans  $A_S$  on notera  $\sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_s}, x^{i_1}, \dots, x^{i_{n-s}})$  le simplexe  $\text{conv}(x^{j_1}, \dots, x^{j_s})$ ; ainsi un élément de  $\Sigma$  sera désigné par la notation  $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_n})$ , où

$$\begin{cases} \{k_1, \dots, k_n\} \subset \{1, \dots, |\tilde{G}|\}, \\ \{k_1, \dots, k_n\} \neq N. \end{cases}$$

On peut énoncer les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉ 1 : Les éléments de  $\Sigma_N$  constituent un recouvrement de  $A_N$  : si  $x \in A_N \exists x^{j_1}, \dots, x^{j_n} \in G$  tels que  $\sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n}) \in \Sigma_N$  et  $x \in \sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n})$ .

PROPRIÉTÉ 2 : L'intersection de deux éléments de  $\Sigma$  est soit vide, soit une face commune à ces deux éléments.

PROPRIÉTÉ 3 : Lorsque  $D$  tend vers l'infini le diamètre des éléments de  $\Sigma$  tend vers zéro (diamètre de  $\sigma = \max_{\substack{x \in \sigma \\ y \in \sigma}} \|x - y\|$ ).

*Simplexes adjacents. Opération de « remplacement » d'un simplexe  $\sigma \in \Sigma$ . Chemins dans  $\Sigma$*

On dira que deux simplexes de  $\Sigma_S$  sont adjacents s'ils ont  $s-1$  sommets communs.

Plus généralement on dira que les deux simplexes  $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_n})$  et  $\sigma(x^{k'_1}, \dots, x^{k'_n})$  de  $\Sigma$  sont adjacents si

$$|\{k_1, \dots, k_n\} \cap \{k'_1, \dots, k'_n\}| = n-1.$$

Soit  $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_i}, \dots, x^{k_n}) \in \Sigma$ . L'opération de « remplacement » de  $x^{k_i}$  consiste à trouver  $x^{k'_i} \in \tilde{G}$  tel que

$$\begin{aligned} & x^{k'_i} \neq x^{k_i}, \\ & \sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_{i-1}}, x^{k'_i}, x^{k_{i+1}}, \dots, x^{k_n}) \in \Sigma. \end{aligned}$$

Les deux simplexes  $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_i}, \dots, x^{k_n})$  et  $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k'_i}, \dots, x^{k_n})$  sont alors adjacents.

On peut montrer [5, 6] que deux situations sont possibles :

- si  $\{k_1, \dots, k_n\} \setminus \{k_i\} \subset N$  il n'existe pas  $x^{k'_i} \in \tilde{G}$  répondant à la question.
- sinon  $x^{k'_i}$  existe et est unique.

Pour illustrer ces notions on peut considérer les simplexes adjacents suivants de la figure 2 :

$$\begin{array}{lll} \sigma(x^{10}, x^{11}, x^{14}) & \text{et} & \sigma(x^{11}, x^{14}, x^{15}), \\ \sigma(x^{11}, x^{12}, x^{15}) & \text{et} & \sigma(x^3, x^{12}, x^{15}), \\ \sigma(x^2, x^7, x^8) & \text{et} & \sigma(x^2, x^3, x^8). \end{array}$$

On dira que les simplexes  $\sigma_1, \dots, \sigma_m \in \Sigma$  forment un chemin si  $\sigma_i$  est adjacent à  $\sigma_{i+1}$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, m-1\}$ .

*Règle de label scalaire. Ensembles complètement labellés*

Considérons une application  $l$  de  $\tilde{G}$  dans  $N$ . On dira qu'un simplexe  $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_n}) \in \Sigma$  est complètement labellé si  $\{l(x^{k_1}), \dots, l(x^{k_n})\} = N$ .

## 2) Simplexes complètement labellés et approximation de points fixes

Soit  $f$  une application continue de  $A_N$  dans lui-même. Un point fixe de  $f$  est un point  $x^* \in A_N$  tel que  $f(x^*) = x^*$ .

Considérons la règle de label scalaire  $l$  définie par

$$\begin{aligned} l: G &\rightarrow N, \\ x = (x_1 \dots x_n) &\rightarrow l(x) = k, \end{aligned}$$

si

$$f_k(x) - x_k \geq 0 \quad \text{et} \quad f_i(x) - x_i < 0, \quad \forall i < k.$$

Un tel indice  $k$  existe toujours car  $\sum_{i \in N} x_i = 1$ ,  $\forall x \in G$ . Il résulte de l'uniforme continuité de  $f$  sur le compact  $A_N$  que, pour un pas de grille suffisamment petit, tout point d'un simplexe complètement labellé de  $\Sigma_N$  pourra être considéré comme un point fixe approché de  $f$ .

La démonstration ci-dessous est due à H. Scarf [6].

L'application  $f$  est uniformément continue sur le compact  $A_N$ ; donc  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta' > 0$  tel que

$$\|x - y\| < \delta' \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}.$$

Soit

$$\delta = \min \left( \delta', \frac{\varepsilon}{2(n-1)} \right);$$

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}.$$

Considérons une grille régulière  $G$  de pas  $1/D < \delta$ ; soit  $\sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n})$  un élément complètement labellé de  $\Sigma_N$ . Quels que soient  $x, x' \in \sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n})$  on a

$$\|x - x'\| \leq \frac{1}{D} < \delta \quad \text{donc} \quad \|f(x) - f(x')\| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)}.$$

Fixons  $x \in \sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n})$ . Ordonnons les vecteurs  $x^{j_1}, \dots, x^{j_n}$  de façon à ce que  $l(x^{j_i}) = i$ .

On peut écrire :

$$f_i(x) - x_i = f_i(x) - f_i(x^{j_i}) + f_i(x^{j_i}) - x_i^{j_i} + x_i^{j_i} - x_i$$

et comme  $x^{j_i}$  a reçu le label  $i$  on a

$$f_i(x) - x_i \geq f_i(x) - f_i(x^{j_i}) + x_i^{j_i} - x_i.$$

Or

$$x \in \sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n}), \quad x^{j_i} \in \sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n})$$

$$\Rightarrow |f_i(x) - f_i(x^{j_i})| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)} \quad \text{et} \quad |x_i^{j_i} - x_i| < \frac{\varepsilon}{2(n-1)},$$

donc

$$f_i(x) - x_i \geq -\frac{\varepsilon}{n-1} > -\varepsilon.$$

Mais de plus

$$f_i(x) - x_i = - \sum_{\substack{j \in N \\ j \neq i}} (f_j(x) - x_j) \Rightarrow f_i(x) - x_i \leq \frac{(n-1)\varepsilon}{(n-1)} = \varepsilon,$$

donc,  $\forall i \in N$  on a  $|f_i(x) - x_i| \leq \varepsilon$  et

$$\|f(x) - x\| = \max_{i \in N} |f_i(x) - x_i| \leq \varepsilon.$$

Ainsi tout point  $x$  d'un simplexe complètement labellé  $\sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n})$  de  $\Sigma_N$  construit à l'aide d'une grille régulière de pas

$$\frac{1}{D} < \min \left( \delta', \frac{\varepsilon}{2(n-1)} \right)$$

est tel que  $\|f(x) - x\| < \varepsilon$  et est un point fixe approché de  $f$  au sens suivant :  $x$  est voisin de son image par  $f$ .



Remarquons que de tels points ne sont pas nécessairement voisins d'un point fixe de  $f$ ; pour illustrer ceci considérons le graphe d'une application continue de  $[0, 1]$  dans lui-même dont  $\hat{x}$  est le point fixe :

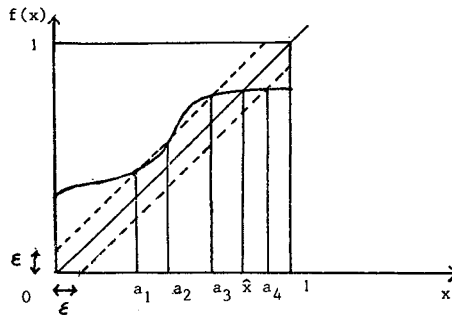


Figure 3

Soit  $\varepsilon > 0$ . Tout point  $a \in [a_1, a_2] \cup [a_3, a_4]$  est tel que  $\|f(a) - a\| \leq \varepsilon$ .

Remarquons enfin que d'autres règles de label scalaire conduisent à des approximations de points fixes; la règle  $l'$  ci-dessous en est un exemple :

$$x \rightarrow l'(x) = k \quad \text{si} \quad \begin{cases} x_k > 0, \\ f_k(x) - x_k \leq f_i(x) - x_i, & \forall i \in N, \\ k \leq i & \text{si } f_k(x_k) - x_k = f_i(x) - x_i. \end{cases}$$

### 3) Construction d'un simplexe complètement labellé. Lemme de Scarf

Le lemme suivant est dû à Scarf [6] :

Soit  $l$  une règle de label scalaire,  $l : \tilde{G} \rightarrow N$  satisfaisant à  $l(x^i) = i, \forall i \in N$ . Il existe un simplexe  $\sigma(x^{j_1}, \dots, x^{j_n}) \in \Sigma$  complètement labellé.

L'algorithme suivant fournit une démonstration constructive de ce lemme, cet algorithme permet de déterminer un chemin dans  $\Sigma$  aboutissant à un simplexe complètement labellé.

Dans la description de l'algorithme ci-dessous on désigne par  $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_n})$  le simplexe courant dans  $\Sigma$ .

#### Départ

On prend comme premier simplexe du chemin le simplexe  $\sigma(x^j, x^2, \dots, x^n)$ , où  $x^j = (1, 0, \dots, 0)$ , c'est-à-dire  $\{k_1, \dots, k_n\} = \{j, 2, \dots, n\}$ .

On a  $\{l(x^{k_2}), \dots, l(x^{k_n})\} = \{2, \dots, n\}$ .

*Itération**Phase 1 :*

- calcul du label de  $x^{k_1}$  : soit  $i = l(x^{k_1})$ ;
- si  $i = 1$   $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_n})$  est complètement labellé; l'algorithme se termine;
- sinon il existe un et un seul  $k_i \in \{k_2, \dots, k_n\}$  tel que  $l(x^{k_i}) = i$ .

*Phase 2 :*

- « remplacement » de  $x^{k_i}$ , soit  $x^l$  le point de  $\tilde{G}$  qui « remplace »  $x^{k_i}$ ;
- retour à la phase 1 après avoir remplacé  $\{k_1, \dots, k_n\}$  par  $\{l, k_2, \dots, k_{i-1}, k_1, k_{i+1}, \dots, k_n\}$  c'est-à-dire en étant passé au seul simplexe  $\sigma(x^{k_1}, \dots, x^{k_n})$  adjacent au précédent tel que

$$\{l(x^{k_1}), \dots, l(x^{k_n})\} = \{2, \dots, n\}.$$

La démonstration du lemme consiste à montrer que cet algorithme ne peut pas cycler; l'idée de la démonstration trouve son origine dans l'article de Lemke Howson [4].

*Remarque*

L'algorithme décrit présente l'inconvénient suivant : le résultat obtenu pour une grille de pas  $\delta$  ne peut être utilisé en vue du calcul d'une solution pour une grille de pas  $\delta' < \delta$ . Des algorithmes utilisant les mêmes concepts, mais pouvant être démarrés en n'importe quel simplexe de  $\Sigma_N$  ont été développés. Ces derniers permettent, en travaillant sur des grilles successives de pas décroissant, d'affiner progressivement les solutions et ainsi d'obtenir des approximations de points fixes correspondant à un pas de grille  $\delta$  à un coût moins élevé qu'à l'aide de l'algorithme original de Scarf.

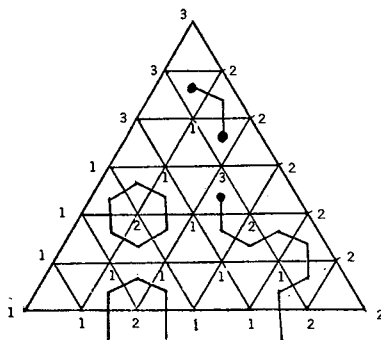
**4) Algorithme de Kuhn et Mac-Kinnon***a) Préliminaires*

Soit  $G$  une grille régulière de  $A_N$  de pas  $\delta = 1/D$ .

Soit  $l$  une règle de label scalaire  $l : G \rightarrow N$  telle que  $l(x) \neq i$  si  $x_i = 0$  (la règle  $l'$  décrite au paragraphe 2 en est un exemple).

Considérons les chemins formés d'éléments de  $\Sigma_N$  et tels que l'ensemble des labels communs à deux quelconques simplexes consécutifs soit  $\{1, \dots, n-1\}$ . On démontre [3, 9] que seuls les cas illustrés par la figure 4 sont possibles.

Ainsi, s'il n'existe qu'un seul simplexe de  $\Sigma_N$  dont  $n-1$  sommets sont situés sur la frontière de  $A_N$  et tel que l'ensemble des labels de ces  $n-1$  sommets soit  $\{1, \dots, n-1\}$ , alors le chemin issu de ce simplexe et tel que l'ensemble des



**Figure 4** (Les numéros figurant à côté des points de  $G$  indiquent les labels de ces points.)

labels des différents simplexes le constituant soit  $\{1, \dots, n-1\}$  aboutit nécessairement à un simplexe complètement labellé de  $\Sigma_N$ .

L'algorithme de Kuhn et Mac-Kinnon [3] utilise ce résultat.

Cet algorithme passe par l'intermédiaire d'une grille régulière  $G'$  de pas  $1/(D+1)$  dans le simplexe unité  $A'$  de  $R^{n+1}$  :

$$x \in G' \Leftrightarrow \exists X_1, \dots, X_{n+1} \in \mathcal{N} \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{i=n+1} X_i = D+1,$$

tels que

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}) = \left( \frac{X_1}{D+1}, \dots, \frac{X_{n+1}}{D+1} \right).$$

Soit  $\Sigma'$  l'ensemble des simplexes de dimension  $n$  de la partition simpliciale de  $A'$  engendrée par  $G'$ .

Soient

$$\begin{aligned} A^0 &= \{x \in A' / x_{n+1} = 0\}, \\ A^1 &= \left\{ x \in A' / x_{n+1} = \frac{1}{D+1} \right\}, \\ A^2 &= \left\{ x \in A' / x_{n+1} = \frac{2}{D+1} \right\}. \end{aligned}$$

Soit  $L$  la règle de label dans  $(A^0 \cup A^1 \cup A^2) \cap G'$  définie de la façon suivante :

— si  $x \in A^2 \cap G'$  :

$$L(x) = n+1;$$

— si  $x \in A^1 \cap G'$  :

$$x = \left( \frac{X_1}{D+1}, \dots, \frac{X_n}{D+1}, \frac{1}{D+1} \right) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = D;$$

soit  $\hat{x} = (X_1/D, \dots, X_n/D)$ ;  $\hat{x} \in G$ . On prendra alors  $L(x) = l(\hat{x})$ ;

— si  $x \in G' \cap A^0$  :

$$x = \left( \frac{X_1}{D+1}, \dots, \frac{X_n}{D+1}, 0 \right) \quad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{i=n} X_i = D+1.$$

Pour déterminer le label d'un tel  $x$  on fixe un point  $\hat{w} \in G$  :

$$\hat{w} = \left( \frac{W_1}{D}, \dots, \frac{W_n}{D} \right) \quad \text{avec} \quad W_i \in \mathcal{N}, \quad \sum_{i=1}^{i=n} W_i = D.$$

On définit alors  $L(x)$  par :  $L(x) = k$  si

$$\begin{aligned} X_k - W_k &\geq X_i - W_i, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}; \\ k &\leq i \quad \text{si} \quad X_k - W_k = X_i - W_i. \end{aligned}$$

La règle de label  $L$  satisfait à  $L(x) \neq k$  si  $x_k = 0$  (car  $\sum_{i=1}^{i=n} (X_k - W_k) = 1$ ).

#### b) Algorithme

Pour un pas de grille fixé à l'avance  $1/D$  on désire obtenir un élément de  $\Sigma_N$  complètement labellé pour la règle  $l$ .

Dans la description de l'algorithme ci-dessous :

- $1/D$  désigne le pas de la grille  $G$  sur  $A_N$  de l'étape en cours;
- $\hat{w} = W/D$  est le point de  $G$  définissant la règle de label  $L$  sur  $G' \cap A^0$ ;
- $y$  désigne le sommet dont on cherche le label dans le simplexe courant  $\sigma$  de  $\Sigma'$  construit à l'aide de  $G'$ .

##### b 1) Initialisation

*Donnée d'une grille de départ* : on donne à  $D$  une valeur initiale  $D^0$ .

*Choix d'un point de départ*  $\hat{w}^0$  de la grille régulière de  $A'_N$  de pas  $1/D^0$ ;  $\hat{w}^0 = (W_1^0/D^0, \dots, W_n^0/D^0)$ , on peut prendre par exemple pour  $W_i^0$  des approximations entières de  $D^0/n$ . Soit  $W' = (W^0, 1)$ .

b 2) *Obtention d'un simplexe de  $\Sigma_N$  (construit à l'aide de  $G$ ) complètement labellé pour la règle  $l$ .*

b 2 a) *Construction du simplexe de départ de  $\Sigma'$  [construit à l'aide de la grille  $G'$  de pas  $1/(D+1)$ ].*

On construit le simplexe de dimension  $n$  de la partition simpliciale de  $A'$  engendrée par  $G'$  ayant  $n$  sommets situés sur la frontière de  $A'$  et tel que l'ensemble des labels de ces  $n$  sommets soit  $\{1, \dots, n\}$ .

Kuhn et Mac-Kinnon [3] ont montré que seul le simplexe construit de la façon suivante possède ces deux propriétés :

définissons pour  $j = 1, \dots, n+1$  les vecteurs

$$X^j = (X_1^j, \dots, X_{n+1}^j),$$

par

$$X_i^j = W'_i + \delta_{ij} - \delta_{i, n+1}$$

(où  $\delta_{ij} = 1$  si  $i = j$ ,  $\delta_{ij} = 0$  sinon).

On a  $X^{n+1} = W'$ .

$\sigma = \text{conv} [X^1/(D+1), \dots, X^n/(D+1), W'/(D+1)]$  est un simplexe de  $\Sigma'$  et  $X^j/(D+1) \in A^0 \cap G'$  pour  $j \in \{1, \dots, n\}$ . On a de plus  $L[X^j/(D+1)] = j$ ,  $j = 1, \dots, n$ .

On donne à  $y$  la valeur  $W'/(D+1)$ .

b 2 b) *Parcours d'un chemin dans  $\Sigma'$  jusqu'à obtention d'un simplexe complètement labellé pour la règle  $L$ .*

*Phase 1* : calcul de  $k = L(y)$ ;

- si  $k = n+1$  aller à b 3;
- sinon soit  $z$  l'unique sommet de  $\sigma$  tel que  $z \neq y$  et  $L(z) = k$ .

*Phase 2* :

- « remplacement » de  $z$ ; soit  $z'$  le point de  $G'$  qui remplace  $z$ ;
- retourner à la phase 1 après avoir remplacé  $y$  par  $z'$ .

b 3) *Redémarrage*

On a obtenu un simplexe  $\sigma \in \Sigma'$  complètement labellé pour la règle  $L$ . Comme tous les points de  $A^2 \cap G'$  ont pour label  $n+1$  il n'y a qu'un seul sommet de  $\sigma$  dans  $A^2$ . La caractérisation des simplexes d'une partition simpliciale engendrée par une grille régulière donnée au paragraphe 1 nous assure alors qu'une face de dimension  $n-1$  de  $\sigma$  appartient à  $A^1$ . Cette face constitue un simplexe complètement labellé de  $\Sigma_N$ .

Sinon on retourne en b 2 après avoir remplacé  $D$  par  $\rho D$  (où  $\rho$  est un entier  $> 1$ ) et engendré un nouveau vecteur  $W$  tel que  $\sum_{i=1}^{i=n} W_i = D$  et tel que  $\hat{w} = W/D$  appartienne au simplexe complètement labellé précédemment obtenu.

La figure ci-dessous illustre l'étape b 2 correspondant à  $D=7$  dans le cas où  $n=2$ .

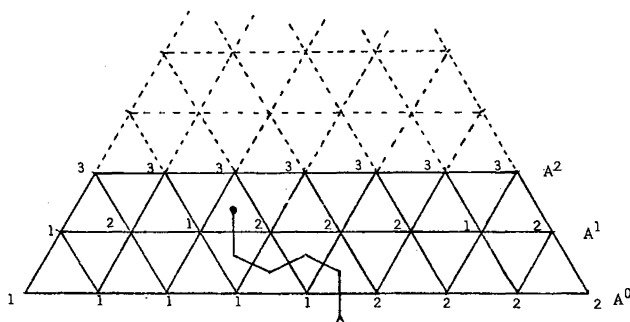


Figure 5

### BIBLIOGRAPHIE

1. ARROW et HAHN, *General Comptitive Analysis*, Holden Day, San Francisco, 1971.
2. EAVES, *Homotopies for Computation of Fixed Points*, Mathematical Programming, vol. 3, n° 1, 1972.
3. KUHN et M. KINNON, *Sandwich Method for Finding Fixed Points*, J. Opt. Theor. and Appl., vol. 17, n° 3/4, 1975.
4. LEMKE et HOWSON, *Equilibrium Points of Bimatrix Games*, S.I.A.M. J. Appl. Math., vol. 12, n° 2, 1964.
5. SCARF, *The Approximation of Fixed Points of a Continuous Mapping*, S.I.A.M. J. Appl. Math., vol. 15, n° 5, 1967.
6. SCARF et HANSEN, *Computation of Economic Equilibria*, Yale University Press, New Haven, 1973.
7. SHOVEN et WHALLEY, *A General Equilibrium Calculation of the Effects of Differential Taxation of Income from Capital in the U.S.*, J. Public Economics, n° 1, 1972.
8. SHOVEN et WHALLEY, *General Equilibrium with Taxes: A Computational Procedure and an Existence Proof*, Rev. Economic Studies, vol. 40, 1973.
9. EAVES et SCARF, *The Solutions of Systems of Piecewise Linear Equations*, Math. Operat. Res., vol. 1, n° 1, 1976.
10. BARAN-MARSZAK et ENCAOUA, *Détermination numérique de solutions d'un jeu dans l'ensemble de négociations*, Cahiers du Séminaire d'Économétrie, C.N.R.S., 3<sup>e</sup> trimestre 1979.