RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

CHRISTIANE POUPARD

Une correspondance entre deux familles de transformations définies sur l'ensemble des extensions linéaires d'un ordre partiel

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 13, n° 2 (1979), p. 129-133

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1979__13_2_129_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 13, n° 2, mai 1979, p. 129 à 133)

UNE CORRESPONDANCE ENTRE DEUX FAMILLES DE TRANSFORMATIONS DÉFINIES SUR L'ENSEMBLE DES EXTENSIONS LINÉAIRES D'UN ORDRE PARTIEL (*)

par Christiane POUPARD ([1])

Résumé. — *Soit un ensemble fini sur lequel est défini un ordre partiel. Sur l'ensemble des extensions linéaires de cet ordre partiel, on considère deux familles de transformations, dont chacune est caractérisée par le choix d'un préordre total* α. *Les unes* (Π_α) *ont la signification de projections (applications sur des parties dont chaque élément est son propre transformé). Les autres* (Φ_α) *consistent à définir les éléments « les plus éloignés » dans un certain sens.*

Le résultat que nous établissons est

$$\Phi_\alpha^2 = \Pi_\alpha.$$

Abstract. — *On a finite partially ordered set, two families of transformations are defined, each of which is characterized by the choice of a total weak order* α. *The first* (Π_α) *have the meaning of projections (mappings into a subset each element of which is its own transform). The second* (Φ_α) *consist in defining the "remotest" element (in a certain sense).*

The main result is

$$\Phi_\alpha^2 = \Pi_\alpha.$$

Supposons que sur un ensemble fini E de cardinal n on ait défini un ordre partiel noté $\preceq$ et un préordre total R. On exprime par $A \prec B$ (resp. $A\hat{R}B$) une affirmation et une négation simultanées, à savoir l'affirmation de $A \preceq B$ (resp. ARB) et la négation de $A = B$ (resp. BRA) (*cf.* [1]).

On dira que le préordre total R est compatible avec l'ordre partiel $\preceq$ si

$$A \prec B \implies A\hat{R}B.$$

Le couple $(E, \preceq)$ peut être représenté par un graphe dont les arcs sont tous dirigés vers le bas de sorte que si $A \prec B$ alors A est figuré plus bas que le sommet B.

Si le préordre total R présente r classes (d'indifférence) les sommets du graphe représentatif du couple $(E, \preceq)$ peuvent alors être répartis sur r « niveaux » différents. Ces r niveaux peuvent être numérotés de 1 à r à partir du bas de sorte que le préordre total peut être défini comme une application surjective f de E dans l'ensemble totalement ordonné $\{1, 2, \ldots, r\}$ telle que

$$A \prec B \iff f(A) < f(B).$$

(*) Reçu juillet 1978.
([1]) Université Paris-VI.

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research, 0399-0842/1979/129/$ 4.00

On notera $\mathscr{P}_r$ l'ensemble des préordres totaux à r classes compatibles avec l'ordre partiel $\preceq$ et p_r son cardinal.

p_r n'est différent de 0 que si :

1° r est inférieur ou égal au cardinal n de E;

2° r est supérieur ou égal au nombre maximum k d'éléments d'une suite « strictement croissante » dans l'ordre partiel $\preceq$.

Comme l'on utilisera simultanément des éléments de $\mathscr{P}_n$, appelés extensions linéaires, et des éléments de $\mathscr{P}_k$ appelés « étagements », on réservera le terme « niveau » pour les éléments de $\mathscr{P}_n$ tandis que pour les éléments de $\mathscr{P}_k$ on remplacera le terme « niveau » par le terme « étage ».

Par exemple le graphe correspondant au couple $(E, \preceq)$ peut être celui représenté par la figure 1. Les figures 2 et 3 représentent alors respectivement une extension linéaire et un étagement.

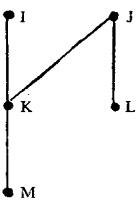


Figure 1

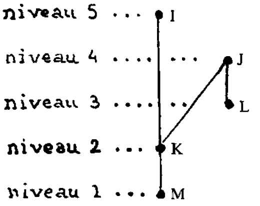


Figure 2

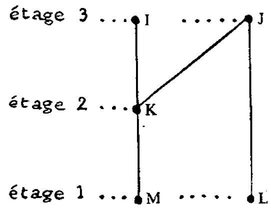


Figure 3

Définissons les applications de l'ensemble $\mathscr{P}_n$ dans lui-même que nous nous proposons de faire intervenir :

1) Soit α un *étagement* donné.

Pour tout i de 1 à k désignons par n_i le cardinal de $\alpha^{-1}(i)$, ensemble des sommets du graphe $(E, \preceq)$ se trouvant à l'étage i.

Notons $\Pi_{a/\alpha}$ et appelons projection relativement à α d'une extension linéaire a l'extension linéaire obtenue à partir de a de la façon suivante : on effectue un tassement des numéros de niveaux par étage c'est-à-dire que l'on remplace les numéros de niveaux des n_i sommets se trouvant au i-ième étage (relativement à α) par les nouveaux numéros consécutifs

$$n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+1, \quad \ldots, \quad n_1+n_2+\ldots+n_i$$

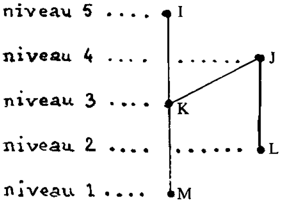
et cela de telle façon que cette transformation respecte pour chaque étage l'ordre des niveaux.

Nous notons Π_α et appelons « projection relativement à α » l'application de l'ensemble $\mathscr{P}_n$ dans lui-même qui à une extension linéaire a fait correspondre $\Pi_{a/\alpha}$:

$$\Pi_\alpha : \quad a \rightarrow \Pi_{a/\alpha}.$$

(bien entendu les projections de ce type sont en nombre égal à p_k).

Par exemple supposons que l'extension linéaire a et l'étagement α soient ceux cités précédemment. Alors $\Pi_{a/\alpha}$ est l'extension linéaire suivante :

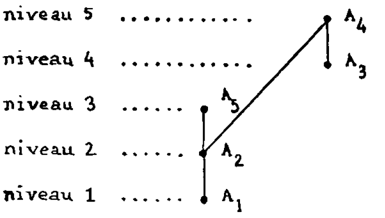


2) Soit une extension linéaire a.

Rebaptisons les éléments de E $A_1, A_2, \ldots, A_n$ dans l'ordre croissant des niveaux de a.

Tout préordre total à r classes compatible avec $\preceq$ sera noté par une suite de n termes indiquant les niveaux successifs de $A_1, A_2, \ldots, A_n$; en particulier les extensions linéaires de E seront notées par des permutations et a sera notée par la permutation identique.

Si l'on choisit par exemple comme extension linéaire de référence l'extension linéaire a de la figure 2, on notera (1, 2, 4, 5, 3) l'extension linéaire dont la représentation graphique est la suivante :



Parmi les p_n permutations obtenues de cette façon on s'intéressera à celles présentant un maximum de décrochements (comme dans [2] nous disons que la permutation $u=(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ de $\{1, 2, \ldots, n\}$ présente un décrochement relativement au couple (i, j) avec $i<j$ si $u_j=u_i-1$).

Les permutations de ce type sont au nombre de p_k. En effet étant donné les conditions de croissance imposées aux numéros de niveaux des sommets d'une même chaine, on s'assure facilement qu'un étagement α étant choisi, on obtient une permutation présentant un maximum de décrochements en donnant aux sommets se trouvant au i-ième étage (relativement à α) les numéros de niveaux suivants :

$$n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+1, \qquad \ldots, \qquad n_1+n_2+\ldots+n_i \qquad (n_i=\operatorname{card}\alpha^{-1}(i)),$$

de telle façon que les numéros de niveaux de deux sommets A_p et A_q (avec $p<q$) du i-ième étage soient respectivement p' et q' avec $p'>q'$.

La permutation obtenue ainsi présente un nombre de décrochements égal à la somme :

$$(n_1-1)+(n_2-1)+\ldots+(n_k-1),$$

donc $n-k$ décrochements (*cf.* [3]).

Soit a_α^* l'extension linéaire « représentée » par cette permutation.

Nous considérons l'application Φ de l'ensemble $\mathscr{P}_n$ dans lui-même qui, à une extension linéaire a, fait correspondre a_α^* :

$$\Phi_\alpha: \quad a \to a_\alpha^*.$$

Montrons que l'on a alors $\Phi_\alpha^2=\Pi_\alpha$.

En effet soit α un étagement donné et soit a une extension linéaire.

Par l'application Φ_α les numéros de niveaux des sommets se trouvant à l'étage i (relativement à α) sont remplacés par

$$n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+1, \qquad \ldots, \qquad n_1+n_2+\ldots+n_i,$$

de telle façon que si les numéros de niveaux de deux sommets étaient initialement p et q avec $p<q$ ils sont remplacés respectivement par p' et q' avec $p'>q'$.

Si l'on applique Φ_α à l'extension linéaire obtenue les numéros de niveaux des sommets se trouvant à l'étage i sont toujours globalement

$$n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+1, \qquad \ldots, \qquad n_1+n_2+\ldots+n_i,$$

mais placés de telle façon que si deux numéros de niveaux étaient p' et q' avec $p'>q'$ ils deviennent respectivement p'' et q'' avec $p''<q''$.

Par conséquent par l'application Φ_α^2 les numéros des sommets se trouvant à l'étage i (relativement à α) sont remplacés par

$$n_1+n_2+\ldots+n_{i-1}+1, \qquad \ldots, \qquad n_1+n_2+\ldots+n_i,$$

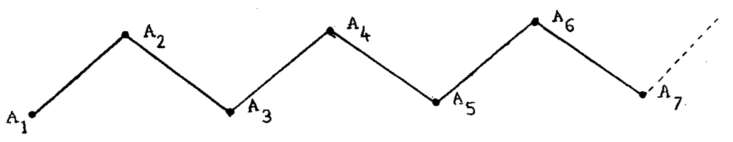
de telle façon que si deux sommets avaient initialement pour numéros de niveaux p et q avec $p<q$ ils ont pour numéros de niveaux après transformation p'' et q'' avec $p''<q''$.

Ceci exprime que l'image de a par Φ_α^2 est $\Pi_{a/\alpha}$ et entraîne le résultat annoncé.

Considérons pour terminer le cas particulier où la relation d'ordre partiel définie sur l'ensemble $E=\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ est la suivante :

$$\forall i \in \left\{1, 2, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]\right\}, \quad A_{2i-1} < A_{2i}, \qquad A_{2i+1} < A_{2i}.$$

Le graphe associé est du type suivant :



Il lui correspond un seul étagement et par conséquent il existe dans ce cas une seule application « projection » et une seule application Φ.

D'autre part il existe autant d'extensions linéaires qu'il y a de permutations up-down de $\{1, 2, \ldots, n\}$.

En effet à une extension linéaire donnée on peut faire correspondre et ceci de façon bijective, une permutation up-down : celle obtenue en lisant sur la représentation graphique de l'extension linéaire, les numéros de niveaux de gauche à droite.

Si l'on confond l'extension linéaire et la permutation up-down correspondante, la notion de projection introduite ici sur un ensemble d'extensions linéaires se confond avec la notion de projection introduite précédemment (*cf.* [2]) sur un ensemble de permutations up-down.

Cette remarque est également valable en ce qui concerne les applications Φ.

On retrouve ainsi le résultat

$$\Phi^2 = \Pi$$

établi dans [2].

BIBLIOGRAPHIE

1. G. Kreweras, *Les préordres totaux compatibles avec un ordre partiel*, Math. Sc. Hum., vol. 53, 1976.
2. C. Poupard, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 286, série A, 1978, p. 1087.
3. R. P. Stanley, *Ordered Structures and Partitions*, Memoirs of the American Mathematical Society, n° 119, 1972.