RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

J. ABADIE

D. ROBERT

Une application du gradient réduit généralisé à un modèle macro-économique

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 12, nº 3 (1978), p. 297-309

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_3_297_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 12, n° 3, août 1978, p. 297 à 309)

UNE APPLICATION DU GRADIENT RÉDUIT GÉNÉRALISÉ A UN MODÈLE MACRO-ÉCONOMIQUE (*)

par J. ABADIE [1] et D. ROBERT [2]

Résumé. — *On se propose dans cette étude de montrer sur un cas concret que la méthode du Gradient Réduit Généralisé peut permettre de résoudre le problème de commande optimale posé par la recherche de la solution d'un modèle macro-économique multisectoriel non linéaire.*

INTRODUCTION

Un modèle macro-économique multisectoriel à long terme constitue une technique d'aide à la décision efficace dans le domaine de la planification.

Une méthodologie couramment employée, l'étude de scénarios, conduit en général à une multitude de possibilités. Il peut s'avérer plus intéressant de lui substituer des études de croissance optimale. La problématique est alors simple : trouver un équilibre économique rendant maximum, au sens d'un critère, la rentabilité du système productif pendant l'intervalle de temps considéré.

Dans les paragraphes suivants nous décrivons le modèle utilisé et les équations non linéaires mises en œuvre, nous rappelons les principes de la méthode du Gradient Réduit Généralisé (GRG) et nous étudions quelques formulations de la fonction d'utilité.

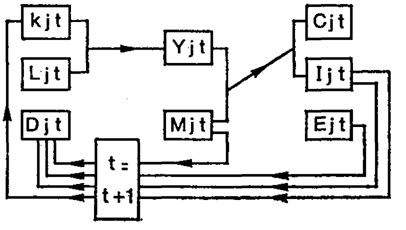
Les données numériques proviennent des prévisions faites en 1972 pour le troisième plan quinquenal de la Corée du Sud.

LE MODÈLE

Nous considérons un modèle dynamique sur 24 ans comportant trois secteurs (Agriculture, Industrie, Services) dont une première formulation se trouve dans un article de D. Kendrick et L. Taylor [8]. C'est un modèle

(*) Manuscrit reçu juin 1977.
[1] Électricité de France.
[2] Étudiant à Paris-IX-Dauphine

néoclassique auquel est ajouté la balance du commerce extérieur. Il peut se représenter sous la forme d'un mécanisme de cycle annuel entre t_0 et T :



L'indice j représente le secteur et l'indice t le temps; K, stocks de capitaux; L, main-d'œuvre; D, dette extérieure; Y, production; M, importation; E, exportation; I, investissements; C, consommation.

Au temps t on connaît dans chaque secteur j le stock de capitaux K_{jt} et le nombre de travailleurs L_{jt} ainsi que la dette extérieure D_t.

On calcule la production Y_{jt} à l'aide de K_{jt} et L_{jt}. Les relations vectorielles de distribution définissent l'égalité entre les moyens Y_{jt} et M_{jt} et les emplois C_{jt}, I_{jt} et E_{jt}. Ces emplois correspondent pour une partie à une augmentation des stocks de capitaux à l'année $t+1$ et permettent de calculer la dette étrangère à cette même date.

La fonction de production

Nous considérons une fonction de production à élasticité de substitution constante que l'on formule de la façon suivante :

$$Y_{jt} = \tau_j (1+\nu_j)^t (\beta_j K_{jt}^{-\rho_j} + (1-\beta_j) L_{jt}^{-\rho_j})^{-1/\rho_j},$$

où ν_j est le taux de progrès technique neutre au sens de Hicks; ρ_j, un paramètre lié à l'élasticité de substitution par la relation $\sigma_j = 1/(1-\rho_j)$; τ_j, un paramètre d'échelle.

La relation de distribution

Cette relation représente l'équilibre des emplois et des ressources tenant compte du commerce extérieur. Sous forme matricielle elle s'écrit

$$Y_t + M_t = A\,Y_t + BI_t + E_t + C_t,$$

A, matrice de Léontief; B, matrice des coefficients de capitaux dont seule la deuxième ligne est non nulle, les investissements productifs n'étant supposés provenir que du secteur 2. Les valeurs nécessaires pour le démarrage de l'algorithme de calcul se déterminent à partir d'interpolation et d'extrapolations de M_{jt}, I_{jt} et E_{jt} prévues pour 1972, 1976 et 1981.

Nous supposons que les importations et les exportations globales ont une croissance nulle pour un temps infini, et que leur taux de croissance peut s'exprimer sous la forme d'une fonction homographique.

En ce qui concerne les investissements I_{jt} nous supposerons qu'ils croissent linéairement en fonction du temps.

Accumulation de capital

L'accumulation de capital dans chaque secteur peut s'écrire :

$$K_{jt+1} = (1-\lambda_j)K_{jt} + g_j(I_{jt}, K_{jt}),$$

λ_j, coefficient d'amortissement du capital.
En reprenant la formulation de R. Dorfman [6] nous exprimons g_j sous la forme

$$g_j(I_{jt}, K_{jt}) = \mu_j K_{jt}\left(1 - \frac{1}{(1+(0,5\, I_{jt}/\mu_{jt} K_{jt}))^2}\right),$$

ce qui permet de tenir compte de la rentabilité marginale décroissante de l'investissement, tendant vers zéro lorsque celui-ci atteint la proportion μ_j du capital K_{jt}.

La balance des paiements

En considérant la différence entre les importations et les exportations, il est possible d'exprimer la dette extérieure de la façon suivante :

$$D_{t+1} = (1+\theta)\, D_t + h_t(M_{jt}, I_{jt}, E_{jt}),$$

$$h_t = -\sum_{j=1}^{3} (E_{jt} - \pi_j I_t - M_{jt}),$$

où θ, taux d'intérêt; π_j, propension marginale à importer pour former du capital.

La formulation du modèle

Notre problème revient à rechercher l'optimum d'une fonction d'utilité ξ qui sera défini dans les paragraphes suivants.
Pour qu'il existe une solution acceptable il faut, au temps final, que la dette

extérieure D_T soit fixée à une valeur finie et que les stocks de capitaux K_{jT} dans chaque secteur j aient une valeur non nulle.

Le problème s'énnonce alors :

Max ξ.

Sous les contraintes

$$K_{jt+1}=(1-\lambda_j)K_{jt}+g_j(K_{jt},\, I_{jt}),$$
$$D_{t+1}=(1+\theta)\, D_t+h(I_{jt},\, M_{jt}),$$

vérifiant :

$$\sum_{j=1}^{3} L_{jt}=\left(\sum_{j=1}^{3} L_{j1}\right)(1+\alpha)^{t-1},$$
$$C_{jt}\geqq 0, \qquad I_{jt}\geqq 0,$$
$$K_{jt}\leqq \bar{K}_{jT},$$
$$L_{j1},\ K_{j1},\ D_1 \ \text{connus},$$
$$\bar{K}_{jT},\ \bar{D}_T \ \text{imposés},$$

Les exportations sont supposées exogènes.
Les consommations, variables intermédiaires, sont calculées à partir des relations de distribution et de la fonction de production.

Le problème possède $k = 8$ vecteurs de commande

$$u_t=\{I_{1t},\, I_{2t},\, I_{3t},\, L_{2t},\, L_{3t},\, M_{1t},\, M_{2t},\, M_{3t}\}$$

et $m = 5$ vecteurs d'état

$$x_t=\{\xi, K_{1t}, K_{2t}, K_{3t},\, D_t\}$$

ce qui correspond à un total de 304 variables.

MÉTHODE NUMÉRIQUE

Nous ne donnons ici qu'une idée de la méthode du Gradient Réduit Généralisé que l'on trouvera décrite dans "Application of the GRG algorithm to optimal control problems" J. Abadie [2].

Les équations du paragraphe précédent peuvent s'écrire sous la forme simplifiée

$$\operatorname{Max} \varphi_T(x_T)+\sum_{t=1}^{T-1} \varphi_t(x_t,\, u_t), \tag{1}$$

sous les contraintes

$$\left.\begin{array}{lll} x_{t+1} = f_t(x_t, u_t) & t = 1 \ldots T-1, & (2)\\ \alpha_t \leqq u_t \leqq \beta_t & t = 1 \ldots T-1, & (3)\\ a_t \leqq x_t \leqq b_t & t = 1 \ldots T. & (4) \end{array}\right\}$$

Les conditions pour que le vecteur $\{x, u\}$ soit solution du problème s'écrivent en utilisant les conditions de Kühn et Tücker. On fait correspondre aux contraintes (2), (3) et (4) respectivement les vecteurs ψ_t, χ_t et ω_t et l'on obtient :

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_t = -\psi_{t-1} + \psi_t \dfrac{\partial f_t}{\partial x_t}, & (5)\\ \omega_T = -\psi_{T-1} + \dfrac{d\varphi_T}{dx_T}, & (6)\\ \chi_t = \dfrac{\partial \varphi_t}{\partial u_t} + \psi_t \dfrac{\partial f_t}{\partial u_t}. & (7) \end{array}\right\}$$

Le principe du GRG est alors de définir une base de n-variables que l'on calcule par la relation (2) en fonction des m autres appelées indépendantes. Cette base est constituée par l'ensemble d'indices $i \in I_t$ et $j \in J_{t-1}$ tels que :

si $\alpha_{it} < x_{it} < b_{it}$ alors $i \in I_t$;

si $\left\{\begin{array}{c} \alpha_{jt-1} < u_{jt-1} < b_{jt-1}, \\ u_{jt-1} \text{ est appelé à remplacer un } x_{it},\ i \notin I_t \end{array}\right\}$ alors $j \in I_{t-1}$.

si l'on pose

$$\left.\begin{array}{ll} \omega_{it} = 0 & \text{si } i \in I_t \\ \chi_{jt-1} = 0 & \text{si } j \in J_{t-1} \end{array}\right\}$$

les équations (5), (6) et (7) correspondantes permettent de calculer ψ_{T-1}, ψ_{T-2}, ..., ψ_1.

Il est alors possible de calculer ω_{it}, $i \notin I_t$ et χ_{jt-1}, $j \notin I_{t-1}$ qui forment un vecteur appelé gradient.

La méthode du GRG revient à rechercher à partir de ce vecteur gradient une meilleure direction pour la convergence de la solution. On détemine alors un nouveau point $\{x, u\}$ par translation des variables indépendantes le long de ce vecteur.

On itère jusqu'à ce que la translation devienne inférieure à une quantité fixe.

UNE PREMIÈRE SOLUTION RÉALISABLE

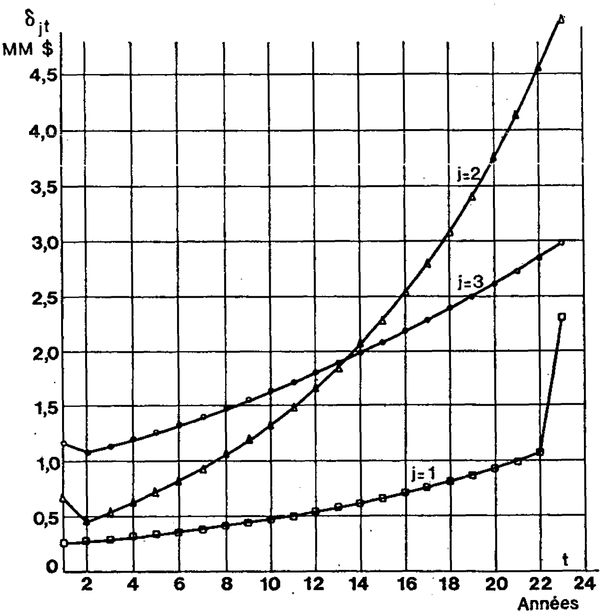
L'algorithme de recherche du maximum de la fonction d'utilité ne peut être mis en œuvre que si l'on connaît une solution vérifiant l'ensemble des contraintes. Or nous calculons les stocks de capitaux et la dette étrangère à partir des équations d'état et de leurs valeurs initiales d'une part, et d'autre part nous fixons ces mêmes valeurs au temps final $T(\bar{K}_{jT}$ et $\bar{D}_T)$.

Afin d'obtenir une première solution nous cherchons à résoudre le problème

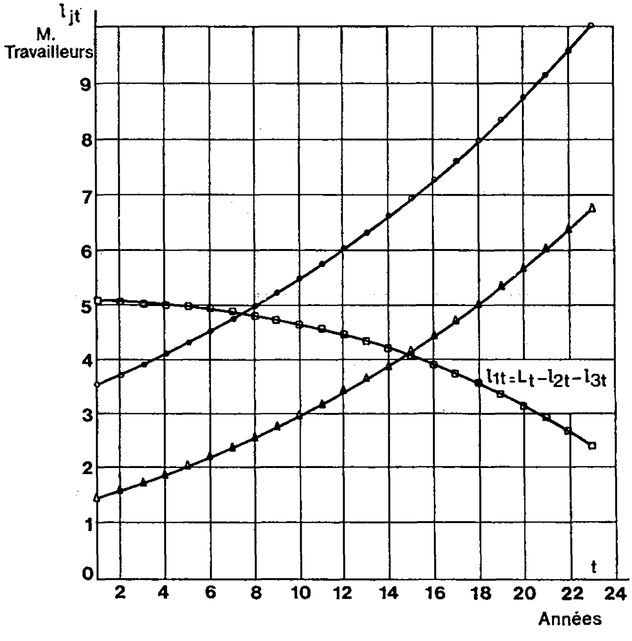
$$\left.\begin{array}{c}\operatorname{Min} \sum_{j=1}^{3} m_j (K_{jT} - \bar{K}_{jT})^2 + m_4 (D_T - \bar{D}_T)^2, \\ \text{Sous les mêmes contraintes.}\end{array}\right\}$$

Cela est possible moyennant quelques modifications mineures du code de calcul.

Les courbes obtenues constituent la première solution que nous pouvons comparer avec celles que nous traçons après optimisation. Cette étude aidera le décideur dans le choix d'une utilisation plus rentable des moyens de production.



Investissements dans chaque secteur.



Main-d'œuvre dans chaque secteur.

LE PREMIER MODÈLE

Dans notre premier modèle nous reprenons comme D. Kendrick et L. Taylor une fonction d'utilité basée sur la consommation entre les temps $t = 1$ et T :

$$\xi_0 = \sum_{t=1}^{T-1} \frac{1}{(1+z+\eta)^t} \sum_{j=1}^{3} a_j C_{jt}^{b_j},$$

z, taux d'escompte; η, taux de croissance démographique.

(i) La fonction d'utilité converge assez vite (32 itérations) vers la valeur $\xi_0 = -57{,}60$. On doit cependant continuer le calcul afin d'obtenir la convergence des variables de commande (80 itérations, $\xi_0 = -57{,}65$), condition nécessaire pour obtenir une solution complète exploitable économiquement. Ceci s'explique par le fait que les investissements ou les importations peuvent être assimilés à des expressions discrètes de la dérivée par rapport au temps des stocks de capitaux ou de la dette extérieure.

(ii) Contrairement à D. Kendrick et L. Taylor et comme J. Abadie et M. Bichara dans leur étude nous obtenons sur ce nouveau modèle une solution économiquement inacceptable si l'on poursuit suffisamment longtemps les itérations. Les difficultés qui apparaissent sont de deux sortes :

a_1) la dette extérieure passe, au milieu de l'intervalle de temps, par un maximum très important (45 MM de dollars) par rapport à valeur finale (8 MM de dollars);

a_2) le deuxième type d'anomalie correspond aux points singuliers que l'on observe au temps $t = 2$ sur les courbes de main-d'œuvre $L(t)$, les valeurs $L(1)$ étant connues et donc fixées en 1972.

(iii) Nous constatons par ailleurs que l'optimum est assez « plat », ce qui correspond à une convergence rapide vers une valeur du critère assez voisine du maximum. Il semble alors possible de modifier la formulation de la fonction d'utilité.

L'INTRODUCTION DE PÉNALITÉS SUR LES VARIABLES

Pour résoudre la difficulté a_2 correspondant aux sauts observés sur les courbes représentant chacune des variables de commande I_{jt} (investissement), L_{jt} (main-d'œuvre) ou M_{jt} (importation) nous introduisons un système de pénalisation quadratique. La nouvelle fonction d'utilité peut s'écrire :

$$\operatorname{Max} \xi_1 = \xi_0 - \sum_{t=1}^{T-1} \left[\sum_{j=1}^{3} \delta_j (I_{jt+1} - \gamma_j I_{jt})^2 + \sum_{j=1}^{2} \delta_{j+3} (L_{jt+1} - \gamma_{j+3} L_{jt})^2 + \sum_{j=1}^{3} \delta_{j+5} (M_{jt+1} - \gamma_{j+5} M_{jt})^2 \right].$$

Les coefficients de pénalisation δ_j peuvent être interprétés économiquement comme des coûts de reconversion ou de réadaptation des moyens de production. Nous avons trouvé de façon heuristique que des valeurs de δ_i voisines de 0,2 permettaient de résoudre la difficulté a_2 sans perturber sensiblement la recherche du maximum sur ξ_0. Le modèle présente de plus une très grande stabilité par rapport aux variations sur cette valeur.

Les coefficients γ_j correspondent à l'évolution souhaitable au cours du temps de chacune des variables de commande. Nous n'avons considéré ici que des valeurs égales à 1, notre but se limitant à supprimer les sauts observés.

LA PRISE EN COMPTE DE LA CONSOMMATION FUTURE

Afin de pallier la difficulté a_1 nous introduisons dans la fonction économique les consommations g_t dans chaque secteur j pour des temps t supérieurs à l'horizon T, en supposant qu'elles restent constantes

$$\left.\begin{array}{l} \xi_0' = \sum_{t=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{3} \frac{1}{(1+z_j+\eta)^t} a_j C_{jt}^{b_j}, \\ C_{jt} = C_{jT-1}, \qquad \forall t \geqq T, \\ z_j = z, \qquad \forall t < T, \end{array}\right\}$$

z_j, taux d'escompte évalués pour $t \geqq T$.

Les valeurs numériques des z_j sont telles que les consommations soient croissantes pour $t = T-1$ et que la solution reste stable pendant les premières années.

Nous obtenons alors les résultats suivants :

(i) Le PNB croît en moyenne de 9,6 % par an durant les cinq premières années, au lieu de 9 % dans la première solution;

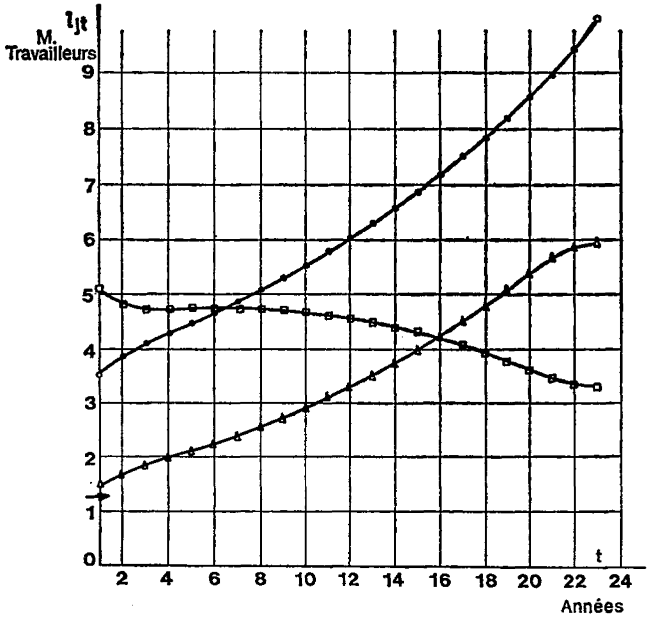
(ii) le transfert de main-d'œuvre du secteur 1 vers les secteurs 2 et 3 est moins important que prévu;

(iii) l'importation dans le secteur 1 diminue ce qui est en accord avec le désir politique de « self sufficiency » agricole, et les courbes sont très voisines des courbes initiales;

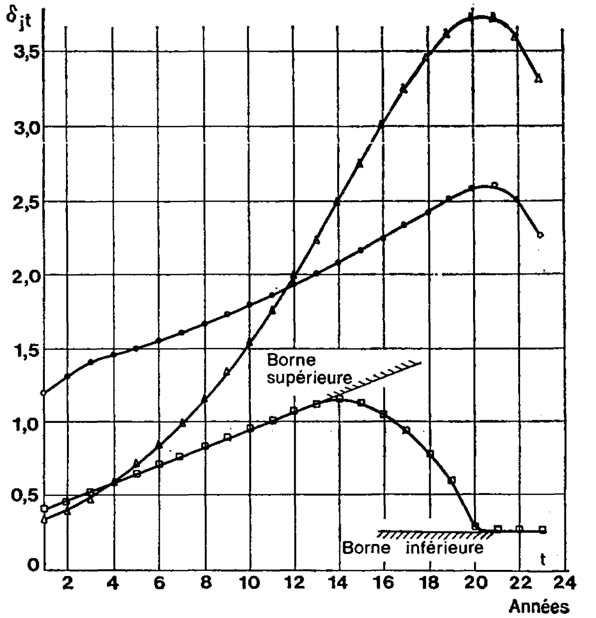
(iv) on a intérêt à laisser croître la dette extérieure;

(v) l'investissement dans le secteur primaire est maximal les cinq premières années, compte tenu de la borne supérieure que l'on a imposé. L'hypothèse selon laquelle seul le secteur 2 crée des investissements productifs ne semble pas acceptable dans notre modèle, ce qui nous a conduit à fixer une borne supérieure sur les investissements.

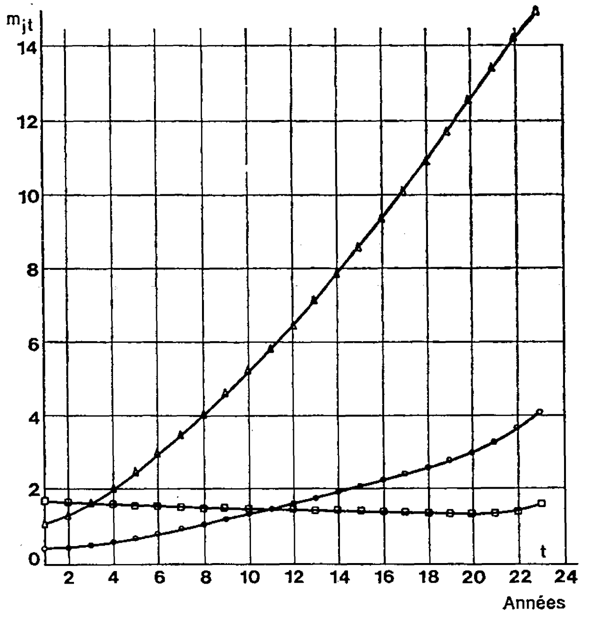
Nous avons enfin vérifié que le modèle était stable par rapport à l'horizon T. Sur l'intervalle de temps ($t = 1$, $t = 5$) la solution obtenue est assez indépendante des conditions finales sur les stocks de capitaux K_{jT}, $j = 1, 3$, la valeur de la dette extérieure et la durée T de l'étude.



Main-d'œuvre dans chaque secteur.



Investissements.



Importations.

CONCLUSION

L'utilisation d'un modèle macro-économique dans le domaine de la planification présuppose un certain nombre de conditions :

– les mécanismes mis en jeu doivent être simples, et les équations qu'ils font intervenir sont à coefficients constants;

– le nombre de secteurs est limité par le temps calcul disponible et les données initiales;

– les crises internationales et les décisions politiques *a posteriori* ne peuvent être prises en compte.

Ces hypothèses étant remplies, le résultat d'une telle étude peut constituer une première esquisse dans le processus de planification, toute liberté étant laissée au décideur pour choisir un certain nombre de paramètres.

La méthode du Gradient Réduit Généralisé est alors une méthode très performante pour résoudre ce problème numériquement difficile.

ANNEXE

VALEURS NUMÉRIQUES

Paramètres

$$\eta = .015, \qquad z = .045,$$

$$z_1 = .45, \qquad z_2 = .180, \qquad z_3 = .135,$$

$$\alpha = .03, \qquad \gamma_j = .2, \qquad {}_j = 1{,}8.$$

Secteur	1	2	3
a	.40	.28	.32
b	.86	.85	.79
μ	.03	.04	.03
λ	.98	.96	.90
τ	.85	2.80	1.60
ν	.050	.040	.025
β	.35	.30	.20
ρ	—.16	.11	.66
π	0.	.33	0.

$$A = \begin{bmatrix} .10 & .95 & .99 \\ .93 & .56 & .92 \\ .97 & .79 & .68 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ .43 & .80 & .12 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Conditions aux limites (valeurs en milliards de dollars 1972)

$$\xi_1 = 0,$$

$$K_{11} = 2.91, \qquad K_{1T} = 12.00,$$

$$K_{21} = 6.25, \qquad K_{2T} = 30.00,$$

$$K_{31} = 3.24, \qquad K_{3T} = 12.45,$$

$$D_1 = .674, \qquad D_T = 8.00,$$

Main-d'œuvre (millions)

$$L_1 = 5.073, \qquad L_2 = 1.424, \qquad L_3 = 3.529.$$

Exportations

exportations totales

$$\varepsilon_t = 2.241 \times (1+\tau_t) \qquad \text{où} \quad \tau_t = 29.4/(10 \times t + 153.)$$

$$E_{1t} = \varepsilon_t \times (.16 \times t + .25)/(3.26\,t + 18.7),$$

$$E_{3t} = \varepsilon_t \times (.16 \;\; t + 3.84)/(3.18\,t + 12.7),$$

$$E_{2t} = \varepsilon_t - E_{1t} - E_{3t}.$$

BIBLIOGRAPHIE

Documentation Générale

1. J. ABADIE (ed.), *Non Linear Programming*, North Holland, 1967.
2. J. ABADIE (ed.), *Integer and non Linear Programming*, North Holland, 1970.
3. J. ABADIE et M. BICHARA, *Résolution numérique de certains problèmes de commande optimale*, R.A.I.R.O., juillet 1972.
4. I. ADELMANN (ed.), *Practical Approaches to Development Planning*, The John Hopkins Press, Baltimore, 1969.
5. M. BICHARA, *Sur la résolution de certains problèmes de commande optimale par la méthode du gradient réduit généralisé*, Thèse de 3e cycle, 1971.
6. R. DORFMAN, P. A. SAMUELSON et R. M. SOLOW, *Linear Programming and Economic Analysis*, Mac Graw Hill, 1958.
7. N. GASTINEL, *Analyse numérique linéaire*, Herman, Paris, 1966.
8. D. KENDRICK et L. TAYLOR, *Numerical Solution of Nonlinear Planning Models*, Econometrica, mai 1970.
9. L. STOLERU, *L'équilibre et la croissance économiques*, Dunod, Paris, 1970.

Documentation Sud-Coréenne

10. *Actualité de Corée*, nº 4, Revue du service de l'information de l'ambassade.
11. *Development of Korean Economy*, Samhwa Publishing Company.
12. *Economie Coréenne. Ajourd'hui et Demain*, Ministère de l'Économie Nationale, décembre 1973.
13. *l'Économie Coréenne. Développement, Investissement et Commerce*, Government of the Republic of Korea, 1971.
14. *Industry*, Korean Background Series, 1972.
15. *Investment Guildline. Korea Machinery Industry*, Ministry of Commerce and Industry, 1975.
16. *Guide to Investment in Korea*, Economic Planning Board, 1974 et 1975.
17. *Plan de développement des industries lourdes et chimiques*, Bureau de Planification, octobre 1973.
18. *Stastitical Handbook of Korea*, Economic Planning Board, 1973.
19. *The Third Five Year Economic Plan*, 1972-1976, Government of the Republic of Korea, 1971.