RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

B. MONJARDET

Une autre preuve du théorème d'Arrow

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 12, nº 3 (1978), p. 291-296

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_3_291_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 12, n° 3, août 1978, p. 291 à 296)

UNE AUTRE PREUVE DU THÉORÈME D'ARROW (*)

par B. MONJARDET ([1])

Résumé. — *Nous donnons une démonstration courte de la version la plus classique du théorème d'Arrow. Venant après bien d'autres preuves, la nôtre est basée sur deux lemmes combinatoires indépendants des hypothèses du théorème. De plus, l'hypothèse de finitude de l'ensemble des votants n'est pas utilisée.*

1. INTRODUCTION

Nous donnons une démonstration de la version la plus classique du théorème d'Arrow [1]. Il est bien connu que les preuves de ce théorème reposent sur deux faits fondamentaux :

1° « neutralité » de la fonction d'agrégation et donc unicité de la famille $\mathscr{F}$ des « ensembles décisifs » [1, 5, 2, 3];

2° la famille $\mathscr{F}$ des ensembles décisifs est un ultrafiltre [5, 9, 6, 8].

Notre démonstration a pour but de préciser ce qui dans les preuves de ces deux résultats est indépendant des hypothèses du théorème (lemmes 1 et 2). Nous l'avions esquissée dans [9], pour le cas où les préférences des votants sont des ordres totaux. Le cas où les préférences sont des préordres totaux n'est pratiquement pas plus difficile à traiter, contrairement à une opinion répandue. D'autre part, notre démonstration n'utilise pas l'hypothèse de finitude de l'ensemble des votants. Elle permettrait donc de retrouver plus rapidement le résultat plus général de Kirman et Sondermann où cette hypothèse n'est pas faite [8]. On trouvera des exposés d'ensemble sur le théorème d'Arrow et ses développements dans, par exemple [4 et 11].

2. DÉFINITIONS ET NOTATIONS

On note $X = \{x, y; z, \ldots, n\}$ un ensemble dit des alternatives; on supposera toujours $n = |X|$ fini et supérieur ou égal à 3. On note $V = \{1, 2, \ldots, i, \ldots, v\}$ un ensemble dit des votants; on suppose $v = |V| \geqq 3$ et fini.

(*) Reçu octobre 1977.

([1]) Université Paris-V et E.H.E.S.S., Centre de Mathématique sociale, Paris.

Un préordre total R sur X est une relation binaire transitive, réflexive et totale; on note P sa partie antisymétrique (préférence stricte), I sa partie antisymétrique (indifférence) : $R=P+I$; on note $x\,R\,y$, $x\,P\,y$ ou $x\,I\,y$.

On note $\mathscr{P}$ l'ensemble des préordres totaux sur X. Un profil Π est un v-uple $(R_1, \ldots, R_i, \ldots, R_v)$ de préordres totaux, c'est-à-dire une application de V dans $\mathscr{P}$; les R_i sont appelés préférences individuelles des votants i; $R_i=P_i+I_i$. Soit A une partie de V; on note $\overline{A}$ la partie complémentaire de A. La notation $\Pi : (A : xyz; \overline{A} : tw)$ signifie que pour tout $i \in A$, $x\,P_i\,y$ et $y\,P_i\,z$, et que pour tout $i \in \overline{A}$, $t\,P_i\,w$.

On note $\mathscr{P}^v$ l'ensemble des profils Π. Une application f de $\mathscr{P}^v$ dans $\mathscr{P}$ sera dite une fonction d'agrégation des profils de préférences, ou encore une F.A.P.; si on veut rappeler ses ensembles de départ et d'arrivée, on écrira une $(\mathscr{P}^v, \mathscr{P})$-fonction d'agrégation. L'image d'un profil Π par une F.A.P. f est un préordre total $f(\Pi)$, appelé préférence agrégée. Dans la suite, la préférence agrégée $f(\Pi)$ est toujours notée R, avec $R=P+I$; $R'=f(\Pi')$.

Nous rappelons ci-dessous les propriétés des F.A.P. qui interviennent dans le théorème d'Arrow.

Soient R une relation sur X, x, y deux éléments distincts de X. On note $R_{\{x,y\}}$ la restriction de R à $\{x, y\}$.

Si Π est un profil, $\Pi_{\{x,y\}}$ est la restriction du profil Π à $\{x, y\}$, c'est-à-dire le profil $(P_{1,\{x,y\}}, \ldots, P_{i,\{x,y\}}, \ldots, P_{v,\{x,y\}})$.

Propriété binaire (Indépendance)

(B) Une F.A.P. f est binaire $\Leftrightarrow \forall \{x, y\}$, $\forall \Pi, \Pi'$, $[\Pi_{\{x,y\}}=\Pi'_{\{x,y\}}]$ implique $[R_{\{x,y\}}=R'_{\{x,y\}}]$.

Soit Π un profil; on pose $V_{xy}(\Pi)=\{i \in V : x\,P_i\,y\}$.

Propriété parétienne (Unanimité)

(U) Une F.A.P. f est parétienne $\Leftrightarrow \forall \Pi$, $V_{xy}(\Pi)=V$ implique $x\,P\,y$.

Fonction dictatoriale

Une F.A.P. f est dictoriale $\Leftrightarrow \exists\, i \in V$ tel que $\forall \Pi$, $\forall$ x, y, $x\,P_i\,y$ implique $x\,P\,y$. Nous appelons famille de parties de V un ensemble de parties de V; nous notons $\mathscr{F}$ une telle famille. Nous considérons ci-dessous certaines propriétés de telles familles :

(1) $\mathscr{F}$ est finissante $\Leftrightarrow \forall A \in \mathscr{F}$, $\forall B \subseteq V$, $B \supseteq A$ implique $B \in \mathscr{F}$;

(2) $\mathscr{F}$ est $\cap$-stable $\Leftrightarrow \forall A, B \in \mathscr{F}$, $A \cap B \in \mathscr{F}$;

(3) $\mathscr{F}$ est autoduale $\Leftrightarrow \forall A \subseteq V$, $A \in \mathscr{F}$ si et seulement si $\overline{A} \notin \mathscr{F}$.

Un filtre est une famille $\mathscr{F}$ vérifiant (1) et (2) et ne contenant pas la partie vide. Un filtre maximal ou ultrafiltre est un filtre non contenu dans un autre filtre. Il est bien connu [7] que pour V quelconque, un ultrafiltre est caractérisé par les conditions 1°, 2° et 3°, et que pour V ensemble fini, un ultrafiltre est la famille des parties de V contenant un élément i particulier de V. Nous notons $\mathscr{F}_i = \{ A \subseteqq V : i \in A \}$ un tel ultrafiltre.

3. THÉORÈME D'ARROW [1]

L'énoncé du théorème est le suivant :

Pour v fini, supérieur ou égal à 3, une $(\mathscr{P}^v, \mathscr{P})$-fonction d'agrégation binaire et parétienne est dictatoriale.

Nous commencerons par démontrer deux lemmes qui sont indépendants de la problématique d'Arrow.

DÉFINITION : Une relation binaire ρ sur un ensemble X est une clique si elle est antiréflexive ($\forall x$, on n'a pas $x \rho x$) et vérifie $x \rho y$, pour tout couple (x, y) avec x différent de y.

LEMME 1 : *Soit ρ une relation binaire antiréflexive sur X ($|X| \geqq 3$) vérifiant la propriété suivante :*

$x \rho y$ implique $\forall z \notin \{x, y\}$, $z \rho y$ et $x \rho z$;

alors si ρ est non vide, ρ est une clique.

Démonstration : ρ étant non vide, il existe (x, y) avec $x \rho y$:

$$x \rho y \;\Rightarrow\; \forall z \neq x, \quad x \rho z \;\Rightarrow\; \forall t \neq z, \quad t \rho z,$$

$$x \rho y \;\Rightarrow\; \forall t \neq y, \quad t \rho y \;\Rightarrow\; \forall z \neq t, \quad t \rho z.$$

Il reste à montrer $y \rho x$. Or si $z \notin \{x, y\}$ on a

$$x \rho y \Rightarrow x \rho z \;\Rightarrow\; y \rho z \;\Rightarrow\; y \rho x.$$

C.Q.F.D.

N.B. : Ce lemme est, par exemple, utilisé par Blau [3].

LEMME 2 : *Si $\mathscr{F}$ est une famille de parties d'un ensemble V ($v \geqq 3$) vérifiant les deux conditions* (3′) *et* (4) *suivantes, $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre.*

(3′) *$\forall A \subseteqq V$, $A \notin \mathscr{F}$ implique $\overline{A} \in \mathscr{F}$;*

(4) *$\forall A, B, C \in \mathscr{F}$, distinctes, $A \cap B \cap C \neq \emptyset$.*

Démonstration : Il faut montrer les propriétés (1), (2) et (3) d'un ultrafiltre. Remarquons que (3′) implique $\mathscr{F}$ différent de la famille vide Φ, et que (4) avec

$v \geqq 3$ implique $\emptyset \notin \mathscr{F}$. Soient A, $B \in \mathscr{F}$ distincts. Si $A \cap B \notin \mathscr{F}$, $\overline{A \cap B} \in \mathscr{F}$ par (3'). $\overline{A \cap B}$ est différent de A et B (sinon A ou B $= \emptyset$). Donc par (4), $A \cap B \cap (\overline{A \cap B}) \neq \emptyset$ ce qui est contradictoire. Donc $A \cap B \in \mathscr{F}$ et (2) est démontré.

Il en résulte que $\forall A$, $B \in \mathscr{F}$, $A \cap B \neq \emptyset$. Donc si $A \in \mathscr{F}$, $\bar{A} \notin \mathscr{F}$ et (3) est démontré.

Soient $A \in \mathscr{F}$ et $B \supset A$; si $B \notin \mathscr{F}$, on a par (3'), $\bar{B} \in \mathscr{F}$ et $\bar{B} \cap A = \emptyset$ ce qui est impossible. Donc $B \in \mathscr{F}$ et (1) est démontré.

N.B. : Ce lemme généralise un résultat de Guilbaud [5]. Sa démonstration n'utilise pas l'hypothèse de finitude de V et est donc valable pour un ensemble V infini. Il existe une autre démonstration valable seulement pour V fini. Elle consiste à considérer $A \in \mathscr{F}$ minimal, à montrer que $A = \{i\}$, puis que $\mathscr{F}$ égale l'ultrafiltre $\mathscr{F}_i$.

Démonstration du théorème : Soit f une $(\mathscr{P}^v, \mathscr{P})$-fonction d'agrégation (F.A.P.) indépendante et parétienne.

DÉFINITION : Soit $A \subseteqq V$; A est (x, y) décisif si et seulement si pour tout profil Π tel que $V_{xy}(\Pi) = A$ et $V_{yx}(\Pi) = \bar{A}$, on a $x P y$.

Puisque f est indépendante, on a la propriété (δ) suivante :

(δ) A est (x, y) décisif $\Leftrightarrow \exists \Pi$ tel que $V_{xy}(\Pi) = A$, $V_{yx}(\Pi) = \bar{A}$ et $x P y$.

On pose $\mathscr{F}_{xy} = \{$parties (x, y) décisive de $V\}$.

Neutralité : Soit z différent de x et y. Montrons $\mathscr{F}_{xy} \subseteqq \mathscr{F}_{xz}$. Soit $A \in \mathscr{F}_{xy}$. On considère un profil Π : $(A : xyz;\ \bar{A} : yzx)$. Par définition de A, $x P y$; par propriété parétienne (U), $y P z$; par transitivité de P, $x P z$. Par (δ), $A \in \mathscr{F}_{xz}$. On démontre de même $\mathscr{F}_{xy} \subseteqq \mathscr{F}_{zy}$.

Définissons une relation antiréflexive ρ_A sur X, par $x \rho_A y$ si et seulement si $A \in \mathscr{F}_{xy} (x \neq y)$. On vient de montrer que ρ_A vérifie les conditions du lemme 1. Il en résulte que pour tout $A \in \mathscr{F}_{xy}$, ρ_A est une clique donc que $\mathscr{F}_{xy} = \mathscr{F}_{zt}$, quels que soient les deux couples distincts (x, y) et (z, t). Autrement dit un ensemble A est (x, y) décisif si et seulement s'il est décisif pour tout couple. Nous appelons ensemble décisif un tel ensemble et nous notons $\mathscr{F}$ la famille des ensembles décisifs.

Avant de montrer que $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre, nous montrons un résultat préliminaire :

(μ) $\forall A \in \mathscr{F}$, $\forall \Pi$ tel que $V_{xy}(\Pi) \supseteqq A$, on a $x P y$.

Soit $z \notin \{x, y\}$. Soit un profil Π' tel que

$$\Pi'_{\{x,y\}} = \Pi_{\{x,y\}} \quad \text{et} \quad \Pi' : \ (A : xzy;\ \bar{A} : zxy).$$

Par définition de A, $x P' z$; par (U), $z P' y$; par transitivité $x P' y$; et par la propriété (B) $x P y$.

Ultrafiltre : Il suffit de montrer que $\mathscr{F}$ vérifie les propriétés du lemme 2.

Soit $A \subseteq V$ tel que $A \notin \mathscr{F}$. Soient x, y, z trois éléments distincts de X et un profil $\Pi : (A : xzy : \bar{A} : zyx)$. Par (U), $z P y$; par $A \notin \mathscr{F}$, $y R x$; par transitivité de R, $z R x$. Si $x R z$, on aurait par transitivité $y R z$, ce que contredit $z P y$. Donc $z P x$ et $\bar{A} \in \mathscr{F}$ par (δ). Donc (3′) est démontré.

Supposons qu'il existe A, B, $C \in \mathscr{F}$ distinctes et telles que $A \cap B \cap C = \emptyset$. Cette dernière condition permet de construire un profil Π : $(A = xy;\ B = yz;\ C = zx)$. Mais par (μ) on aurait alors $x P y$, $y P z$ et $z P x$ ce qui est impossible. Donc $\mathscr{F}$ vérifie (4) et est un ultrafiltre.

Puisque V est fini, $\mathscr{F} = \mathscr{F}_i$ et il résulte alors de (μ) que i est un dictateur.

C.Q.F.D.

N.B. : Si V n'est pas fini, la démonstration précédente subsiste et montre que $\mathscr{F}$ est un ultrafiltre. Mais un tel ultrafiltre n'est plus nécessairement de la forme $\mathscr{F} = \mathscr{F}_i$ (*voir* à ce sujet [8 et 6]).

BIBLIOGRAPHIE

1. K. J. Arrow, *Social Choice and Individual Values*, Wiley, New York, 1963. Traduction française : *Choix Collectif et Préférences Individuelles*, Calmann-Lévy, 1974.
2. J. H. Blau, *The existence of Social Welfare Functions*, Econometrica, n° 25, 1957, p. 302-313.
3. J. H. Blau, *A Direct Proof of Arrow's Theorem*, Econometrica, vol. 40, 1972, p. 61-67.
4. P. C. Fishburn, *The Theory of Social Choice*, Princeton University Press, 1973.
5. G. Th. Guilbaud, *Les théories de l'intérêt général et le problème logique de l'agrégation*, Économie appliquée, vol. 5, n° 4, 1952, et in *Éléments de la théorie des jeux*, Dunod, Paris, 1968. Traduction anglaise in *Readings in Mathématical Social Science*, P. F. Lazarsfeld et N. W. Henry, éd., Chicago, Science Research Association Inc., 1965.
6. B. Hansson, *The Existence of Group Preferences*, working paper n° 3, The Mathias Fremling Society, Lund, 1972, and Public Choice, 1976.
7. P. R. Halmos, *Lectures on Boolean Algebra*, Princeton, D. Van Nostrand Company, New York, 1963.
8. A. P. Kirman et D. Sondermann, *Arrow's Theorem, Many Agents, and Invisible Dictators*, J. Econ. Th., n° 5, 1972, p. 267-277.
9. B. Monjardet, *Remarques sur une classe de procédures de votes et les théorèmes de possibilité*, in *La Décision*, Colloque du C.N.R.S., Aix-en-Provence, 1967, p. 177-184.

10. B. MONJARDET, *An Axiomatic Theory of Tournament Aggregation*, Math. of Operations Research, vol. 3, n° 4, 1978.

11. B. MONJARDET, *L'apport de la théorie des votes à une théorie des groupes*, in Jeux, information et groupes, H. SCHLEICHER, éd. (à paraître).

12. R. WILSON, *The Game Theoretic Structure of Arrow's General Possibility Theorem*, J. Econ. Th., n° 5, 1972, p. 14-20.