

B. LEMAIRE

**Brèves communications. Une démonstration directe
de la formule de Pollaczek-Khintchine**

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 12, n°2 (1978),
p. 229-231

http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_2_229_0

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Brèves Communications

**UNE DÉMONSTRATION DIRECTE
DE LA FORMULE DE POLLACZEK-KHINTCHINE (*)**

par B. LEMAIRE ⁽¹⁾

Résumé. — On donne une démonstration directe de la formule de Pollaczek-Khintchine qui exprime l'attente moyenne pour la file M/G/1 fondée sur l'emploi des méthodes de conservation.

LEMME : Pour la file M/G/1 en régime transitoire ou permanent, la probabilité $p_n(t)$ (notée p_n en régime permanent) pour que n clients soient présents dans le système à l'instant t est égale à la probabilité $q_n(t)$ (notée q_n en régime permanent) pour que, lors de son arrivée dans le système, un nouveau client y trouve n clients déjà présents.

Démonstration [1, 3] :

$$\begin{aligned} q_n(t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \Pr \{ n \text{ clients présents à } t \mid \text{une arrivée entre } t \text{ et } t+h \} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Pr \{ \text{une arrivée entre } t \text{ et } t+h \mid n \text{ clients à } t \} \cdot \Pr \{ n \text{ clients à } t \}}{\Pr \{ \text{une arrivée entre } t \text{ et } t+h \}} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[\lambda h + 0(h)] \cdot p_n(t)}{\lambda h + 0(h)} = p_n(t). \end{aligned}$$

Car la loi de Poisson des arrivées, de taux noté λ , est un processus à accroissements indépendants : les arrivées dans l'intervalle $[t, t+h]$ ne sont pas conditionnées par celles survenues entre 0 et t .

Comme le remarque Krakowski [3], cette propriété est fautive pour les files limitées à N clients. En effet, pour $n = N$, on a en régime permanent : $q_N = 0$ et $p_N \neq 0$; on peut montrer que : $q_n = p_n / (1 - p_N)$ pour le cas M/M/1.

FORMULE DE POLLACZEK-KHINTCHINE

Nous donnons ci-dessous une démonstration directe de cette formule, qui précise une preuve de Krakowski [3]. Nous supposons que le régime permanent existe et est atteint.

(*) Manuscrit reçu en novembre 1977.

(1) Maître Assistant au C.N.A.M., Laboratoire de Recherche Opérationnelle.

Tout nouveau client, lors de son arrivée dans le système, trouve l'une des situations suivantes :

S_0 : il n'y a aucune unité dans le système; le guichet est donc libre et le nouvel arrivant y entre immédiatement : son temps d'attente, noté $E(T_f | 0)$, est nul. La probabilité de trouver cette situation est q_0 ;

S_1 : il y a un seul client dans le système, qui est donc au guichet. Notons $E(R)$ la durée moyenne du restant du service à lui donner. Si la loi du service est exponentielle, tout se passe comme si ce service venait de commencer lorsque survient le nouvel arrivant, et : $E(R) = 1/\mu$. Dans le cas général, on peut établir que : $E(R) = E(X^2)/2E(X) = (1/2)\mu E(X^2)$, où $E(X) = 1/\mu$ est la durée moyenne des services, et $E(X^2)$ le moment d'ordre deux de la densité des services. [C'est un résultat de la théorie du renouvellement ([1], t. 1, p. 169-174).] L'attente moyenne sera alors : $E(T_f | 1) = E(R)$. La probabilité de trouver cette situation est q_1 ;

S_2 : il y a deux clients dans le système : l'un est au guichet et devra compléter son service, provoquant ainsi une attente de durée moyenne $E(R)$; l'autre est dans la file et subira un service complet, de durée moyenne $1/\mu$. Donc, l'attente moyenne sera : $E(T_f | 2) = E(R) + 1/\mu$. La probabilité de trouver cette situation est q_2 ;

...

S_n : il y a n clients dans le système : un au guichet, d'où une attente moyenne $E(R)$, et $(n-1)$ dans la file pour l'ensemble desquels la durée totale moyenne d'occupation du guichet sera : $(n-1)/\mu$.

Donc l'attente moyenne pour le nouvel arrivant sera :

$$E(T_f | n) = E(R) + \frac{n-1}{\mu}.$$

....

Finalement, l'espérance mathématique $E(T_f)$ du temps d'attente s'obtient par application du théorème des probabilités totales :

$$\begin{aligned} E(T_f) &= \sum_{n=0}^{\infty} E(T_f | n) \cdot q_n = \sum_{n=1}^{\infty} \left[E(R) + \frac{n-1}{\mu} \right] \cdot q_n \\ &= E(R)(1-q_0) + \frac{E(v_a)}{\mu}, \end{aligned}$$

où $E(v_a)$ représente la longueur moyenne de la file, mais observée uniquement lors des instants d'arrivées des clients. Notons que la relation ci-dessus est valable dans le cas G/G/1.

Particularisons la au cas M/G/1; alors $p_n = q_n$, d'où :

$$E(T_f) = E(R)(1-p_0) + \frac{E(v)}{\mu},$$

où :

$$E(v) = \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) p_n$$

est la longueur moyenne de la file.

La formule de Little ([1], p. 15-17) relie $E(T_f)$ à $E(v)$:

$$E(v) = \lambda \cdot E(T_f).$$

D'autre part, $1-p_0$ est la probabilité que le guichet soit actif; la loi de conservation des clients ([2], [6]), permet de trouver : $1-p_0 = \lambda/\mu$. En effet, le taux λ des arrivées dans le système doit être égal, en régime permanent, à celui des sorties puis qu'il n'y a ni génération spontanée ni disparition de clients dans le système!; ce dernier n'est autre que le produit du taux de service μ par la probabilité $1-p_0$ que le guichet serve.

En substituant $E(v)$, $(1-p_0)$ et $E(R)$ dans l'expression de $E(T_f)$, il vient :

$$E(T_f) = \frac{\lambda}{\mu} \frac{1}{2} \mu E(X^2) + \frac{\lambda}{\mu} E(T_f),$$

$$E(T_f) = \frac{\lambda E(X^2)}{2(1-\lambda/\mu)}.$$

C'est la formule de Pollaczek-Khintchine.

BIBLIOGRAPHIE

0. A. Y. KHINTCHINE, *Mathematisches uber die Erwartung von einem öffentlichen Schalter*, Math. Sbornik, vol. 39, 1932, p. 73-84 (en russe, résumé en allemand).
1. L. KLEINROCK, *Queuing Systems*, 2 tomes, Wiley, 1976.
2. M. KRAKOWSKI, *Conservation Methods in Queuing Theory*, R.A.I.R.O., série verte, vol. V1, 1973, p. 63-83.
3. M. KRAKOWSKI, *Arrival and Departure Processes in Queues, Pollaczek-Khintchine Formula for Bulk Arrival and Bounded Systems*, R.A.I.R.O., série verte, vol. V1, 1974, p. 45-56.
4. B. LEMAIRE, *Méthode de conservation et blocage dans les files d'attente*, R.A.I.R.O., série verte, vol. V4, 1977, p. 363-377.
5. B. LEMAIRE, *Files d'attente : théorie et applications à la R.O.*, Cours polycopié du C.N.A.M., Laboratoire de R.O., 1976-1977.
6. B. LEMAIRE, *Théorème de conservation des clients*, note de recherche, Laboratoire de R.O., C.N.A.M., juillet 1977.
7. F. POLLACZEK, *Über eine Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie; III*, Math. Zeitschrift, tome 32, 1930, p. 64-100 et p. 729-750.