

DIDIER DUBOIS

HENRI PRADE

## **Algorithmes de plus courts chemins pour traiter des données floues**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 12, n° 2 (1978),  
p. 213-227

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1978\\_\\_12\\_2\\_213\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_2_213_0)

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## ALGORITHMES DE PLUS COURTS CHEMINS POUR TRAITER DES DONNÉES FLOUES <sup>(1)</sup>

par Didier DUBOIS et Henri PRADE <sup>(2)</sup>

---

*Résumé. — L'application de concepts flous (sous-ensemble flou, fonction de variables floues, graphes flous) à des problèmes de plus courts chemins où les données ne sont connues que de façon incertaine, est envisagée dans cet article. La méthode est présentée, discutée, illustrée dans le cadre désormais classique du P.E.R.T. Des résultats simples d'algèbre floue (addition de nombres flous, recherche du plus grand ou du plus petit nombre dans une famille de nombres flous) sont énoncés et utilisés; ils facilitent, considérablement les calculs et permettent d'envisager des applications à des problèmes de taille pratique. Un exemple montre en quoi peut être utile l'approche floue quand on veut réaliser simplement une affectation de trafic multichemins dans un réseau de voirie. Enfin, les différences entre variable aléatoire et variable floue sont brièvement présentées, et les avantages de l'approche floue sur l'approche probabiliste sont établis dans le cas du P.E.R.T. — ce qui permet alors d'étudier la stabilité d'un ordonnancement sans contraintes cumulatives.*

### INTRODUCTION

De plus en plus, de nombreuses disciplines scientifiques abordent des problèmes où les données ne sont connues que de façon incertaine et où éventuellement les comportements d'opérateurs humains doivent être pris en compte. La recherche opérationnelle et l'automatique ne font pas exception. Pour modéliser le caractère vague de certaines informations, il a d'abord été fait appel aux statistiques et à la théorie des probabilités.

Ces méthodes n'ont pas toujours apporté les résultats escomptés; les modèles probabilistes conduisent souvent à de trop grandes masses de calcul dans le cadre de cas réels; la simulation est alors le seul recours. D'ailleurs, les probabilités sont relativement inadaptées à représenter la connaissance seulement approchée des données lorsque l'incertain ne résulte pas d'un phénomène purement aléatoire, mais plutôt déterministe et mal connu. Cependant les modèles déterministes, s'ils fournissent parfois plus facilement

---

<sup>(1)</sup> Manuscrit reçu mai 1977.

<sup>(2)</sup> O.N.E.R.A.-C.E.R.T.-D.E.R.A./E.N.S.A.E. (Département d'Études et de Recherches en Automatique), Toulouse.

des solutions, se prêtent mal à l'évaluation, de la stabilité, et de la robustesse de celles-ci.

Depuis les premiers travaux de L. A. Zadeh (1965) [13], les concepts flous, destinés à évaluer ce type d'imprécision mal pris en compte par les probabilités, ont suscité de nombreuses recherches. Le livre de A. Kaufmann [6] fait le point sur celles-ci et expose la théorie des sous-ensembles flous — en français! Cette discipline étant récente, elle a à ce jour fait l'objet de peu d'applications en automatique, malgré les travaux de Mamdani et Assilian [8], et de Kickert et Van Nauta Lemke [7] par exemple, et encore moins en recherche opérationnelle malgré la timide tentative en ordonnancement de Stoica et Scarlat [10].

Le présent article montre ce que peuvent devenir les algorithmes de plus courts chemins, quand les données sont des sous-ensembles flous. Ce type d'algorithmes est un des plus anciennement utilisés dans la recherche opérationnelle, et s'applique dans de nombreux domaines (recherche de dates au plus tôt, au plus tard pour un projet, affectation de trafic, etc.), on trouvera la description de ces algorithmes pour des données précises dans l'ouvrage de B. Roy [9].

Une première partie sera consacrée aux rappels théoriques nécessaires à l'introduction des concepts flous utilisés. La seconde en présente l'application aux algorithmes de plus courts chemins, et énonce quelques résultats d'algèbre floue propres à faciliter le calcul. Dans la troisième partie, des exemples d'illustration sont fournis. La conclusion expose les avantages de l'approche floue sur l'approche probabiliste pour ces applications, note que le flou permet de généraliser les incertitudes sur la mesure des grandeurs et discute brièvement la différence de nature entre variable floue et variable aléatoire.

## 1. RAPPELS

### 1.1. Sous-ensemble flou

Soit  $E$  un ensemble classique utilisé comme référentiel. On appelle sous-ensemble flou de  $E$  l'ensemble des couples  $\{(x, \mu(x))\}$ ,  $\forall x \in E$  où  $\mu$  est une application de  $E$  dans  $[0, 1]$ . Cette définition généralise celle d'un sous-ensemble classique, pour lequel on restreint les valeurs de  $\mu$  à l'ensemble  $\{0, 1\}$ . On notera  $\mu_A$  la fonction caractéristique du sous-ensemble flou  $A$ . On écrit, avec L. A. Zadeh:

$$A = \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n$$

pour  $E$  fini =  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ou

$$A = \int_E \mu(x)/x$$

pour  $E$  infini.

## 1.2. Nombre flou

On appellera nombre flou de valeur moyenne  $n$ , noté  $\tilde{n}$ , un sous-ensemble flou de  $\mathbf{R}$  dont la fonction caractéristique  $\mu_{\tilde{n}}$  est croissante au sens large sur  $(-\infty, n]$ , vaut 1 en  $n$ , est décroissante au sens large sur  $[n, +\infty)$ .

Un nombre réel classique  $n$  aura une fonction caractéristique telle que  $\mu_n(x) = 0, \forall x \neq n$ .

Une fonction caractéristique en créneau rectangulaire représente la mesure d'une grandeur dans son intervalle d'incertitude.

Une fonction caractéristique « en cloche » modélise un nombre flou  $\tilde{n}$  valant environ  $n$ ; le nombre  $\tilde{n}$  sera d'autant plus précis que la courbe  $\mu_{\tilde{n}}$  sera « pointue ».

Dans tous les cas,  $\mu_{\tilde{n}}(x)$  représentera la valeur de vérité de la proposition «  $\tilde{n}$  vaut  $x$  ».

## 1.3. Fonction de variables floues

A partir de toute fonction  $f$  de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{R}$  qui à  $(x_1 \dots x_n) \in \mathbf{R}^n$  associe  $y = f(x_1 \dots x_n)$ , on peut induire une fonction  $\tilde{f}$  de  $\mathcal{P}(\mathbf{R})^n$  dans  $\mathcal{P}(\mathbf{R})$  où  $\mathcal{P}(\mathbf{R})$  est l'ensemble des parties floues sur  $\mathbf{R}$ , dont la restriction à l'ensemble des nombres réels classiques coïncide avec  $f$ , de la façon suivante, comme l'ont proposé un certain nombre d'auteurs dont Gaines [4] :

Au  $n$ -uplet de sous-ensembles flous  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  on associe le sous-ensemble flou  $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  de fonction caractéristique  $\mu_{\tilde{y}}$  définie par

$$\forall t \in \mathbf{R}, \mu_{\tilde{y}}(t) = \max_{t=f(s_1, \dots, s_n)} \min(\mu_{\tilde{x}_1}(s_1), \dots, \mu_{\tilde{x}_n}(s_n)).$$

Pour justifier intuitivement cette formule on peut remarquer que la fonction caractéristique d'un produit cartésien de sous-ensembles flous  $\tilde{x}_1 \times \tilde{x}_2 \times \dots \times \tilde{x}_n$  est donnée par la formule

$$\forall (s_1, \dots, s_n) \in \mathbf{R}^n, \mu_{\tilde{x}_1 \times \dots \times \tilde{x}_n}(s_1, \dots, s_n) = \min(\mu_{\tilde{x}_1}(s_1), \dots, \mu_{\tilde{x}_n}(s_n));$$

la valeur de  $\mu_{\tilde{y}}(t)$  correspond à la plus grande des valeurs  $\mu_{\tilde{x}_1 \times \dots \times \tilde{x}_n}(s_1, \dots, s_n)$  des réalisations possibles de  $t$  à l'aide de  $(s_1, \dots, s_n)$  par  $f$ .

### 1.4. Graphe de Berge flou [5]

Un graphe de Berge flou est un graphe de Berge  $G = (N, A)$  (où  $N$  est l'ensemble des nœuds et  $A$  l'ensemble des arcs) où chaque liaison  $i-j$  entre deux nœuds  $i$  et  $j$  est plus ou moins forte, c'est-à-dire qu'à chaque  $(i, j) \in A$  on associe la valeur  $\mu_A(i, j) \in [0, 1]$  qui traduit le poids de la liaison ou sa vraisemblance; dans le cas le plus général, on peut imaginer que les nœuds n'ont pas tous la même importance, et que pour chaque nœud  $i$  on connaît la valeur  $\mu_N(i) \in [0, 1]$ .

## 2. ALGORITHMES DE PLUS COURTS CHEMINS POUR DES DONNÉES FLOUES

Il serait fastidieux de passer en revue tous les algorithmes de plus courts chemins; ils ont en commun de ne nécessiter que des additions et des comparaisons (recherche d'un plus petit ou d'un plus grand élément). Pour adapter ces algorithmes à des données floues, il suffit donc de savoir comment on additionne et on compare des nombres flous. Nous allons prendre pour exemple l'un des algorithmes les plus anciens et les plus simples : l'algorithme de Ford pour le P.E.R.T.

### 2.1. Rappel de l'algorithme de Ford

Soit  $G = (N, A)$  un graphe orienté connexe sans circuit;  $N$  représente l'ensemble des tâches d'un projet,  $A$  les contraintes de précédence entre ces tâches.

Soient  $P(i)$  et  $S(i)$  l'ensemble des nœuds qui précèdent immédiatement  $i$  et qui suivent  $i$ , respectivement.  $r_i$  est la date au plus tôt de début,  $d_i$  la date au plus tard de fin de la tâche  $i$  de durée  $p_i$ .

L'algorithme consiste à appliquer les formules suivantes :

$$r_i = \max_{j \in P(i)} (r_j + p_j), \quad \forall i \in N,$$

$$d_i = \min_{k \in S(i)} (d_k - p_k), \quad \forall i \in N$$

sur l'ensemble des nœuds, dans un ordre arbitraire *a priori*, jusqu'à convergence (ce qui a lieu en un nombre fini de coups).

### 2.2. Énoncé du problème flou

Quelles sont les données susceptibles d'être floues ?

- les  $p_i$  qui valuent les nœuds peuvent être des nombres flous;
- $N$  et  $A$  peuvent être chacun des sous-ensembles flous de  $E$ , et  $E^2$  respectivement;  $E$ , ensemble maximal des nœuds envisageables.

Ces possibilités peuvent s'interpréter par exemple dans le cas du P.E.R.T. :

- les durées des tâches ne sont connues que de façon approximative, elles valent « environ  $p_i$  »; les données sont donc des nombres flous  $p_i$ ;
- les contraintes de précédence sont plus ou moins strictes, leur importance est évaluée sur  $[0, 1]$  par exemple.  $A$  est un sous-ensemble flou de  $E^2$ ;
- certaines tâches sont plus ou moins indispensables à la bonne réalisation du projet. Cependant cet aspect peut être partiellement pris en compte en regroupant les tâches secondaires avec des tâches principales, et en jouant sur les  $p_i$ , c'est-à-dire en utilisant les  $\tilde{p}_i$ ; de plus, alors qu'on peut attribuer un sens à la violation partielle d'une contrainte de précédence, il est difficilement concevable, en général, d'effectuer partiellement une tâche; en définitive, elle sera ou non effectuée. En revanche la violation partielle de contraintes de précédence peut être interprétée comme la possibilité d'un certain chevauchement.

Il est donc nécessaire de savoir additionner deux nombres flous et d'en prendre le maximum ou le minimum.

### 2.3. Résultats d'algèbre floue

La formulé d'extension de fonction de variables réelles du 1.3 donne pour l'addition, notée  $\tilde{m} \oplus \tilde{n}$ , de deux nombres flous  $\tilde{m}$  et  $\tilde{n}$  de fonctions caractéristiques  $\mu_{\tilde{m}}$  et  $\mu_{\tilde{n}}$  et de valeurs moyennes  $m$  et  $n$  :

$$\mu_{\tilde{m} \oplus \tilde{n}}(Z) = \max_{Z=x+y} \min(\mu_{\tilde{m}}(x), \mu_{\tilde{n}}(y)).$$

On démontre (voir [3]) que  $\tilde{m} \oplus \tilde{n}$  est aussi un nombre flou, que sa valeur moyenne est  $m+n$ .

De plus, si les fonctions caractéristiques  $\mu_{\tilde{n}}$  et  $\mu_{\tilde{m}}$  se déduisent l'une de l'autre par une translation, parallèle à l'axe du référentiel  $Ox$ , de vecteur de longueur  $|m-n|$ , et une affinité orthogonale d'axe parallèle à l'axe des valeurs de vérité  $Oy$ , on peut très facilement obtenir  $\mu_{\tilde{m} \oplus \tilde{n}}$ .

Soit :

$$\left. \begin{aligned} \mu_{\tilde{m}}(x) &= S\left(\frac{x-m}{\alpha}\right) \quad \text{sur } (-\infty, m] \\ &= D\left(\frac{x-m}{\beta}\right) \quad \text{sur } [m, +\infty) \end{aligned} \right\} \alpha \text{ et } \beta > 0,$$

où  $S$  et  $D$  sont deux fonctions paires, chacune pouvant être la fonction caractéristique d'un nombre flou de valeur moyenne nulle.

On dit que  $\tilde{m}$  est de type «  $S-D$  ». On voit qu'un nombre flou  $\tilde{m}$  de type donné est caractérisé par trois nombres :

- sa valeur moyenne  $m$ ;
- les quantités  $\alpha, \beta$ , appelées *étalement à gauche et étalement à droite respectivement*; plus ces nombres sont grands, plus  $m$  est flou.

Dans la suite les nombres flous considérés seront de même type et on les notera symboliquement  $\tilde{m} = (m, \alpha, \beta)$ .

On démontre (cf. [3]) qu'étant donné deux nombres flous  $(m, \alpha, \beta)$  et  $(n, \gamma, \delta)$  de même type, on a

$$\tilde{m} \oplus \tilde{n} = (m, \alpha, \beta) \oplus (n, \gamma, \delta) = (m+n, \alpha+\gamma, \beta+\delta),$$

$\tilde{m} \oplus \tilde{n}$  est encore de type «  $S-D$  ».

On voit qu'avec peu d'hypothèses sur  $\tilde{m}$  et  $\tilde{n}$ , – en particulier  $S$  et  $D$  sont des fonctions quelconques – l'addition de deux nombres flous peut se ramener à trois additions classiques.

Compte tenu que l'on a

$$-(m, \alpha, \beta) = (-m, \beta, \alpha).$$

Si  $(m, \alpha, \beta)$  est de type «  $S, D$  » alors son « opposé » est de type «  $D, S$  »; la formule de la soustraction est donc

$$(m, \alpha, \beta) \ominus (n, \gamma, \delta) = (m-n, \alpha+\delta, \beta+\gamma),$$

où  $\tilde{m}$  et  $\tilde{n}$  sont respectivement de types «  $S, D$  » et «  $D, S$  ».

Soient  $\widetilde{\max}(\tilde{m}, \tilde{n})$  et  $\widetilde{\min}(\tilde{m}, \tilde{n})$  le plus grand et le plus petit de deux nombres flous,  $\tilde{m}$  et  $\tilde{n}$ . On démontre [3] que ce sont aussi des nombres flous, de valeur moyenne  $\max(m, n)$  et  $\min(m, n)$ . En toute rigueur, les nombres flous résultants ne sont pas forcément de type «  $S-D$  ».

Deux formules d'approximation existent, qui fournissent des valeurs d'appartenance résultantes exactes autour de la valeur moyenne, l'étendue de ce domaine dépendant de l'abscisse des points d'intersection de  $\mu_m$  et  $\mu_n$ .

En général si  $n > m$  :

$$\widetilde{\max}((m, \alpha, \beta), (n, \gamma, \delta)) = (n, \gamma, \delta).$$

Mais si  $n \simeq m$  une bonne approximation sera plutôt

$$\widetilde{\max}((m, \alpha, \beta), (n, \gamma, \delta)) = (\max(m, n), \min(\alpha, \gamma), \max(\beta, \delta))$$

formule exacte pour  $m = n$ .

Des expressions analogues existent pour  $\widetilde{\min}$ .

Les trois opérations présentées sont commutatives et associatives.

REMARQUE : Un réel non flou  $n$  s'écrit symboliquement  $(n, 0, 0)$  (nombre flou d'étalements nuls).

## 2.4. Application à l'algorithme de Ford

a)  $A$  et  $N$  sont des sous-ensembles classiques; les  $p_i$  sont flous.

Les formules de l'algorithme de Ford deviennent :

$$\tilde{r}_i = \max_{j \in P(i)} (\tilde{r}_j \oplus \tilde{p}_j), \quad \forall i \in N, \quad (\text{I})$$

$$\tilde{d}_i = \min_{k \in S(i)} (\tilde{d}_k \ominus \tilde{p}_k), \quad \forall i \in N. \quad (\text{II})$$

Le nombre  $p_i$  sera supposé de type «  $S-D$  »,  $\forall i$ , et caractérisé par sa valeur moyenne  $p_i$ , et des étalements à gauche et à droite  $\alpha_i$  et  $\beta_i$ . Si pour l'opération max on utilise les formules d'approximation définies plus haut, on voit que les nombres  $\tilde{r}_i$  et  $-\tilde{d}_i$  seront eux aussi des nombres flous de type «  $S-D$  ».

On remarquera que pour appliquer effectivement les formules (I) et (II) il faut connaître *a priori* les  $r_i$  des nœuds  $i$  sans prédécesseurs et les  $\tilde{d}_i$  des nœuds sans successeurs, c'est-à-dire en termes de P.E.R.T. les dates de début au plus tôt des tâches initiales, et l'horizon du projet. Ceux-ci seront aussi des nombres flous de type «  $S-D$  » et «  $D-S$  » respectivement.

b)  $N$  est un sous-ensemble classique;  $A$  est un sous-ensemble flou de  $N^2$ ;  $p_i \in \mathbb{R}$ .

Dans ce cas  $P(i)$  et  $S(i)$  deviennent des sous-ensembles flous respectivement de l'ensemble des prédécesseurs envisageables de  $i$  et de l'ensemble des successeurs envisageables de  $i$ ,  $\Pi(i)$  et  $\Sigma(i)$  :

$$\forall j \in \Pi(i), \quad \mu_{P(i)}(j) = \mu_A(j, i),$$

$$\forall k \in \Sigma(i), \quad \mu_{S(i)}(k) = \mu_A(i, k).$$

Pour utiliser l'algorithme sur de telles données il est nécessaire d'utiliser la décomposition en niveaux des sous-ensembles flous envisagés.

On note

$$P_\alpha(i) = \{j \in \Pi(i) \mid \mu_{P(i)}(j) \geq \alpha\}$$

et

$$S_\alpha(i) = \{k \in \Sigma(i) \mid \mu_{S(i)}(k) \geq \alpha\},$$

$P_\alpha(i)$  est le sous-ensemble classique de niveau  $\alpha$  associé à  $P(i)$ . Les formules de l'algorithme de Ford deviennent, pour le niveau  $\alpha$  :

$$r_i^\alpha = \max_{j \in P_\alpha(i)} (r_j^\alpha + p_j^\alpha), \quad (\text{III})$$

$$d_i^\alpha = \min_{k \in S_\alpha(i)} (d_k^\alpha - p_k). \quad (\text{IV})$$



Et on aura donc par définition

$$\mu_{r_i}(r_i^\alpha) \geq \alpha,$$

$$\mu_{d_i}(d_i^\alpha) \geq \alpha.$$

Soit

$$K_i^\alpha = \{k \mid k \in P_\alpha(i) \text{ et } r_i^\alpha = r_k^\alpha + p_k\}.$$

La valeur de  $\mu_{r_i}(r_i^\alpha)$  est donnée par la formule :

$$\mu_{r_i}(r_i^\alpha) = \max_{k \in K_i^\alpha} \min(\mu_{r_k}(r_k^\alpha), \mu_{P(i)}(k)).$$

Une formule analogue existe pour  $\mu_{d_i}(d_i^\alpha)$ .

Ces formules résultent de l'application du principe exposé au 1.3 à 3 et 4.

Si  $\mu_{r_i}(r_i^\alpha)$  est grand, cela signifie que la date de début au plus tôt de la tâche  $i$  est conditionnée par des contraintes de précédence importantes. Le graphe de niveau  $\alpha$  correspond à un problème de P.E.R.T. ordinaire. Si la valuation d'un chemin est la plus petite des valuations des contraintes de précédence qui le forment,  $\mu_{r_i}(r_i^\alpha)$  est la plus grande des valuations des chemins  $0-i$  de longueur  $r_i^\alpha$ , dans le graphe de niveau  $\alpha$ , 0 étant la tâche fictive initiale.

Il est facile de vérifier que  $\mu_{r_i}$  peut aussi se calculer à l'aide de la formule

$$\mu_{r_i}(x) = \max_{\alpha \in [0, 1]} \min(\alpha, \mu_{r_i^\alpha}(x)), \quad (V)$$

où  $\mu_{r_i^\alpha}$  est la fonction caractéristique du singleton classique  $\{r_i^\alpha\}$ . Ce n'est autre que la formule de recomposition d'un sous-ensemble flou à l'aide de ses sous-ensembles classiques de niveau  $\alpha$ ,  $\alpha$  variant entre 0 et 1.

Il est clair que

$$\forall (\alpha; \alpha') \in [0, 1]^2, \quad \alpha > \alpha' \rightarrow r_i^\alpha \leq r_i^{\alpha'}$$

et

$$d_i^\alpha \geq d_i^{\alpha'}.$$

c)  $N$  est classique,  $A$  est flou ainsi que les  $p_i$ .

En travaillant sur les graphes classiques  $G_\alpha(N, A_\alpha)$  où  $A_\alpha$  est le sous-ensemble classique de niveau  $\alpha$  de  $A$ , on peut appliquer les formules (I), (II) pour calculer  $\tilde{r}_i^\alpha$  et  $\tilde{d}_i^\alpha$  qui deviennent des nombres flous.  $\mu_{r_i^\alpha}$  se calcule en étendant la formule V au cas où  $\mu_{r_i^\alpha}(x) \in [0, 1]$  :

$$\mu_{r_i^\alpha}(x) = \max_{\alpha \in [0, 1]} \min(\alpha, \mu_{r_i^\alpha}^\alpha(x)).$$

Le cas où  $N$  est flou pourrait se traiter de façon analogue au cas où  $A$  est flou, mais comme il a été dit au 2.2, il ne semble pas qu'il y ait d'interprétations intéressantes. De plus l'interprétation du 3.4 c, suppose que les significations

de  $\alpha$  et de  $\mu_{\tilde{p}_i}(x)$  sont comparables; c'est sans doute le cas en termes de vraisemblance.

### 3. EXEMPLES ILLUSTRATIFS

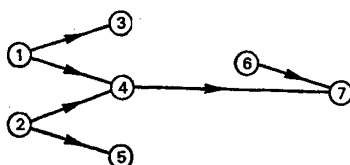
Deux exemples sont proposés, spécifiques de deux aspects du problème de plus court ou plus long chemin dans un graphe :

- recherche de dates au plus tôt et au plus tard sur un projet;
- comparaison de chemins de mêmes origine et extrémité.

#### 3.1. Recherche de dates au plus tôt et au plus tard dans un projet

Considérons l'exemple à sept tâches suivant :

- le graphe des contraintes de précédence est représenté ci-dessous :



– le tableau ci-après, donne pour chaque tâche  $i$  sa durée moyenne  $p_i$ , ses étalements à gauche  $\alpha_i$  et à droite  $\beta_i$ , l'intervalle  $[a_i, b_i]$  de disponibilité des moyens nécessaires à la tâche  $i$ . Seuls les  $\tilde{p}_i$  sont flous, de type « SD » avec

$$S(x) = e^{-x^2} \quad \text{et} \quad D(x) = \max(0, 1 - x^2).$$

$i$	$p_i$	$\alpha_i$	$\beta_i$	$a_i$	$b_i$
1.....	3	1	1,5	0	10
2.....	3	1	1,5	0	10
3.....	4	0	0	2	10
4.....	3	1	1,5	0	10
5.....	4	0	0	4	10
6.....	3	1	1,5	1	10
7.....	4	0	0	4	10

Les données floues de cet exemple sont toutes égales et ont comme représentation :

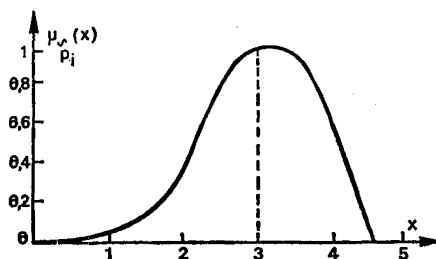


Figure 1. — Courbe.

Les résultats sont résumés dans le tableau suivant, qui fournit sur l'horizon  $[0, 10]$  les valuations des valeurs éventuelles de  $r_i$  et  $d_i$  :

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$r_1 \dots$	1	0									
$d_1 \dots$		0	0,6	1	0,4	0					
$r_2 \dots$	1	0									
$d_2 \dots$		0	0,6	1	0,4	0					
$r_3 \dots$		0	0,4	1	0,6	0					
$d_3 \dots$										0	1
$r_4 \dots$		0	0,4	1	0,6	0					
$d_4 \dots$						0	1	0			
$r_5 \dots$				0	1	0					
$d_5 \dots$										0	1
$r_6 \dots$	0	1	0								
$d_6 \dots$						0	1	0			
$r_7 \dots$			0	0,1	0,4	0,8	1	0,9	0,6	0	
$d_7 \dots$										0	1

Le cas où les intervalles de disponibilité des moyens sont flous, se traiterait de la même façon : les  $r_i$  et  $d_i$  sont alors initialisés avec des valeurs  $\tilde{a}_i$  et  $\tilde{b}_i$  floues.

### 3.2. Comparaison de chemins dans un graphe

Quand dans un graphe, les valuations des arcs sont des nombres flous, il est possible d'évaluer la distance la plus courte entre deux nœuds donnés. Cependant, il n'existe plus, à proprement parler de chemin que l'on peut qualifier de plus court.

En effet soient  $i_0$  et  $i_d$  deux nœuds et  $\mathcal{C}$  l'ensemble des chemins  $P_k$  allant de  $i_0$  à  $i_d$ . Le graphe est supposé non flou. Les valuations des arcs seront des nombres flous  $\tilde{t}_{ij}$  évaluant le temps de parcours entre  $i$  et  $j$ .  $\tilde{t}_{ij}$  est de type «  $S-D$  » et défini par  $(t_{ij}, \alpha_{ij}, \beta_{ij})$ .

Soit  $P_k$  un chemin allant de  $i_0$  à  $i_d$ . La durée  $\tilde{d}_k$  du trajet utilisant le chemin  $P_k$  est un nombre flou de type «  $S-D$  »  $(d_k, \alpha_k, \beta_k)$  tel que

$$d_k = \sum_{ij \in P_k} \tilde{t}_{ij},$$

$$\alpha_k = \sum_{ij \in P_k} \alpha_{ij} \quad \text{et} \quad \beta_k = \sum_{ij \in P_k} \beta_{ij}.$$

Il est donc très facile d'obtenir la fonction caractéristique  $\mu_k$  de  $\tilde{d}_k$ ,  $\forall k : P_k \in \mathcal{C}$ .

Étant donné une estimation  $d$  de la durée du trajet entre  $i_0$  et  $i_d$  sur  $P_k$ , la valeur de vérité de l'affirmation «  $d_k$  vaut  $d$  » est  $\mu_k(d)$ . Il existe un chemin (éventuellement plusieurs) pour lequel l'estimation  $d$  est la plus vraisemblable : le chemin  $P_q$  tel que

$$\mu_q(d) \geq \mu_k(d), \quad \forall k.$$

On peut appeler « plus court chemin » dans le graphe, entre  $i_0$  et  $i_d$  le chemin  $P$ , tel que  $\mu_r(d^*) = 1$  pour la petite estimation  $d^*$  possible. Mais il se peut qu'on puisse trouver  $P_k$  tel que  $\mu_k(d^*)$  soit très proche de 1. (On peut remarquer que  $d^*$  est la valeur moyenne de  $\min_{P_k \in \mathcal{C}} \tilde{d}_k$ ).

Ainsi l'approche floue permet, étant donnée une estimation de la durée du trajet entre  $i_0$  et  $i_d$  de classer les chemins par ordre de vraisemblance de l'affirmation «  $d_k$  vaut  $d$  », nuancant ainsi la notion trop tranchée de plus court chemin.

*Exemple numérique : fig. 2.*

Soit le graphe de la figure où on a indiqué en kilomètres les longueurs des arcs, qui sont non floues et notées  $l_{ij}$ . Sur chaque arc on connaît approximativement la vitesse qu'on peut y réaliser. Les vitesses sont donc des nombres flous de type  $S-D$  avec

$$S(x) = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{et} \quad D(x) = 1-x^2, \quad |x| \leq 1.$$



que la plus petite durée  $d$  pour laquelle il existe un chemin  $k$  tel que  $\mu_k(d^*) = 1$  est 1 heure pour  $k = 1$  mais on voit que  $\mu_2(1) \simeq 0,95$ ,  $\mu_3(1) \simeq 0,9$  et qu'il n'est donc pas absurde de considérer  $P_2$  et  $P_3$  comme des chemins quasiment aussi courts que  $P_1$ .

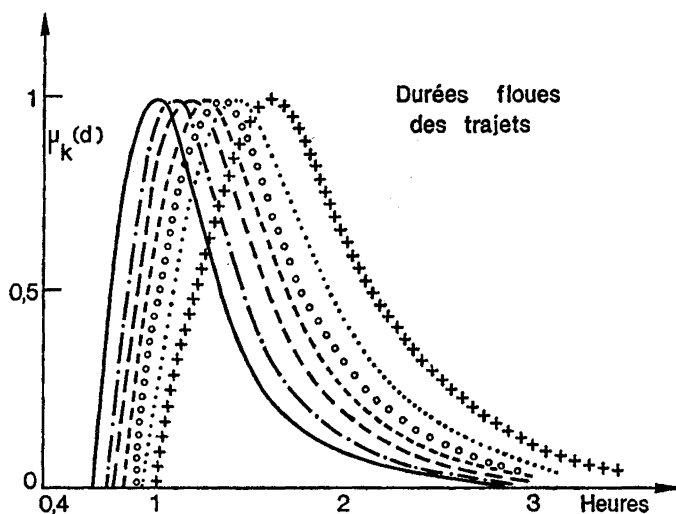


Figure 3.

1	———	chemin	6-10-9	valeur moyenne	1,000 heure,
2	- . - . - .	»	6-5-4-9	»	» 1,083 heure,
3	-----	»	6-2-9	»	» 1,166 heure,
4	-----	»	6-5-3-9	»	» 1,229 heure,
5	oooooooo	»	6-2-1-9	»	» 1,312 heure,
6	.....	»	6-7-2-9	»	» 1,416 heure,
7	+ + + +	»	6-7-8-9	»	» 1,583 heure.

Cette approche floue peut servir de fondement à une affectation de trafic multichemins à l'aide d'une règle comme : router sur le chemin  $P_k$  un flot proportionnel à  $\mu_k(d^*)$ , c'est-à-dire à la valeur de vérité de l'affirmation « Le trajet  $k$  dure  $d^*$  », émise par les usagers du réseau. Une comparaison avec une affectation de type probabiliste [1] présenterait un certain intérêt.

#### 4. FLOU ET PROBABILITÉS. CONCLUSION

Des approches probabilistes ont été proposées pour le P.E.R.T. : les durées des tâches sont alors des variables aléatoires (de loi  $\beta$ -P.E.R.T. par exemple) de distribution dissymétrique [11].

La convolution de ces distributions, pour calculer la somme des variables aléatoires associées est souvent difficile, et n'est semble-t-il jamais envisagée en pratique, où on préfère appliquer le théorème central-limite sur les tâches du chemin critique, ce qui suppose que le nombre de tâches soit assez grand et qu'il existe un chemin unique beaucoup plus critique que tous les autres. Ces hypothèses ont souvent conduit à de grossières approximations, aussi nombre d'auteurs ont préféré avoir recours à la simulation [12], onéreuse en temps de calcul.

Au contraire, on a vu au 2.3 que les variables floues se prêtent bien au calcul, quand elles sont toutes de type «  $S-D$  ». L'addition, qui s'exprime au moyen d'une convolution max-min, se réduit à trois additions classiques; les expressions approchées de  $\widetilde{\max}$  et  $\widetilde{\min}$  sont en général largement valables. Il est clair qu'il n'est plus nécessaire de supposer l'existence d'un chemin nettement plus critique que tous les autres.

On démontre [3] que les opérations (addition, multiplication, recherche d'un plus petit ou plus grand élément) sur les nombres flous permettent de généraliser le calcul d'incertitudes. Comme il a déjà été vu dans l'introduction, l'incertitude sur la durée des tâches n'est pas forcément de nature aléatoire, mais résulte plutôt d'un manque d'information : des encadrements plus ou moins vraisemblables sont connus pour la durée de chaque tâche, qui est alors modélisée par une variable floue. Cependant, les axiomatiques dont relèvent variables aléatoires et floues sont relativement proches, quoique bien différenciées, aussi l'interprétation d'une variable floue peut sembler de nature probabiliste à cause de l'imprécision du langage; de plus une donnée floue peut être établie à l'aide d'études statistiques.

Les concepts flous ont permis de modéliser et de prendre en compte des données qui ne sont connues qu'approximativement. Les calculs restent cependant très simples (il y en a trois fois plus que dans le cas où les données sont parfaitement connues). Une étude de la stabilité de la solution est ainsi réalisée : la répercussion du flou des données sur les résultats est connue, sans qu'il soit nécessaire de procéder à une simulation, toujours coûteuse en temps de calcul.

#### BIBLIOGRAPHIE

1. R. B. DIAL, *A probabilistic Multipath Traffic Assignment Model which Obviates Path Enumeration*, Transportation Research, vol. 5, 1971, p. 83-111.
2. D. DUBOIS et H. PRADE, *Le flou, kouacksexa*, Note interne C.E.R.T./D.E.R.A., 1976, 170 p.; *Le flou, mecedonksa*, Note interne C.E.R.T./D.E.R.A., 1977, 243 p.
3. D. DUBOIS et H. PRADE, *Operations on Fuzzy Numbers*, à paraître dans Inter. J. on Systems Sciences.

4. B. R. GAINES, *Foundations of Fuzzy Reasoning*, Inter. J. Man-Machine Studies, vol. 8, 1976, p. 623-668.
5. J. HALPERN, *Set Adjacency Measures in Fuzzy Graphs.*, J. Cybernetics, vol. 5, 1975, p. 77-87.
6. A. KAUFMANN, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*, 4 volumes, Masson, Paris, 1973-1976.
7. W. J. M. KICKERT et H. R. VAN Nauta Lemke, *Application of a Fuzzy Controller in a Warm Water Plant*, Automatica, vol. 12, 1976, p. 301-308.
8. E. H. MAMDANI et S. ASSILIAN, *An Experiment in Linguistic Synthesis with a Fuzzy Logic Controller*, Int. J. Man-Machine Studies, vol. 7, 1975, p. 1-13.
9. B. ROY, *Algèbre moderne et théorie des graphes*, 2 volumes, Dunod, Paris, 1969-1970.
10. M. STOICA et E. SCARLAT, *Fuzzy Algorithms in Economic Systems*, Economic Computation, Economic Cybernetics Studies Research (Roumanie), n° 3, 1975, p. 239-247.
11. G. THOMAS, *Introduction de l'aléatoire dans les problèmes d'ordonnancement. Méthode de simulation*, Congrès Internet 1, Vienne, 1967, Dunod, Paris.
12. G. L. THOMPSON, *C.P.M. and D.C.P.M. under Risk*, Naval Research Logistics Quarterly, vol. 15, 1968, p. 233-239.
13. L. A. ZADEH, *Fuzzy Sets*, Information and Control, vol. 8, 1965, p. 338-353.