

CHOUKHMANE EL-ARBI

## **Une heuristique pour le problème de l'arbre de Steiner**

*RAIRO. Recherche opérationnelle*, tome 12, n°2 (1978), p. 207-212

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1978\\_\\_12\\_2\\_207\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_2_207_0)

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## UNE HEURISTIQUE POUR LE PROBLÈME DE L'ARBRE DE STEINER (1)

CHOUKHMANE EL-ARBI (2)

Résumé. — On dit qu'un algorithme résout un problème de minimisation dans un rapport  $r \geq 1$  si la valeur de la solution obtenue par cet algorithme est inférieure au produit de la valeur de la solution optimale par  $r$ . On construit une heuristique et on montre qu'elle résout le problème de l'arbre de Steiner dans un rapport  $r = 2 \lceil (k-1)/k \rceil$  (où  $k$  est le nombre de sommets à connecter).

Soit  $G = (N, E)$  un graphe connexe, non orienté, avec une valuation des arêtes :

$$e \in E \rightarrow W(e) > 0.$$

Étant donné  $S \subseteq N$  trouver un sous-graphe  $G_1 = (Y, F)$  de  $G$  tel que :  $G_1$  est connexe,  $S \subseteq Y$  et minimisant  $\sum_{e \in F} W(e)$ .

Ce problème connu sous le nom de « arbre de Steiner » fait partie de la classe des problèmes *NP*-complet [4].

L'une des approches pratiques de cette classe de problèmes « difficiles » est de construire des heuristiques et de mesurer leur efficacité.

On dira qu'une heuristique  $H$  résout le problème  $P$  dans le rapport  $r \geq 1$  si [3] :  $\varphi_H / \varphi_{opt} \leq r$ , où  $\varphi_H$  : valeur de la solution obtenue par  $H$ ;  $\varphi_{opt}$ , valeur de la solution optimale.

Dans ce qui suit on construit une heuristique simple qui approche le problème de « Steiner » tree et on démontre qu'elle le résout dans un rapport  $r = 2 \lceil (k-1)/k \rceil$  où  $k = |S|$ .

LEMME : Soient  $T = (N, E)$  un arbre valué et  $S \subseteq N$  tel que tous les sommets pendants de  $T$  appartiennent à  $S$ , alors :

1° quelle que soit la façon avec laquelle on indice les sommets  $S$

$$S = [S_1, S_2, \dots, S_k]$$

on a

$$\varphi_T = \sum_{e \in E} W(e) \leq \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} W_T(S_i S_{i+1}) + W_T(S_k S_1) \right];$$

(1) Manuscrit reçu mars 1977, révisé mai 1977.

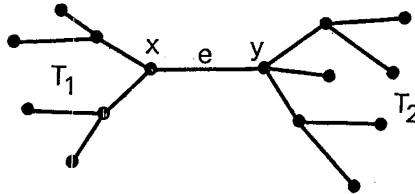
(2) Équipe de recherche « Graphes et Programmation combinatoire » Université Paris-VI, Tour 45-46.

2° il existe une façon d'indicer les sommets  $S = [S_1, S_2, \dots, S_k]$  telle que

$$\varphi_T = \sum_{e \in E} W(e) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} W_T(S_i S_{i+1}) + W_T(S_k S_1) \right],$$

où  $W_T(S_i S_{i+1}) =$  valeur de la chaîne élémentaire joignant  $S_i$  à  $S_{i+1}$  dans l'arbre  $T$ .

Démonstration : 1° Dans l'évaluation  $\sum_{i=1}^{k-1} W_T(S_i S_{i+1}) + W_T(S_k S_1)$  la valeur  $W(e)$  de toute arête  $e$  est comptée au moins deux fois; en effet, soit une arête  $e = xy$ , cette arête est un isthme de  $T$  appelons  $T_1$  et  $T_2$  les sous-arbres de  $T$  qui résultent de la suppression de  $e$ .



Deux cas se présentent :

(a)  $S_1$  et  $S_k$  appartiennent à  $T_1$ ,  $T_2$  contient alors un  $S_i$  avec  $1 < i < k$ ,  $S_{i-1} \in T_1$  et  $S_{i+1} \in T_1$  la valeur de l'arête  $e$  est alors comptée dans  $W_T(S_{i-1} S_i)$  et dans  $W_T(S_i S_{i+1})$ ;

(b)  $S_1 \in T_1$  et  $S_k \in T_2$ ; il existe  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$  avec  $S_i \in T_1$  et  $S_{i+1} \in T_2$ , la valeur de l'arête  $e$  est alors comptée une fois dans  $W_T(S_i S_{i+1})$  et une fois dans  $W_T(S_k S_1)$ .

2° Si en plus la façon d'indicer les sommets de  $S$ , vérifie la propriété suivante :

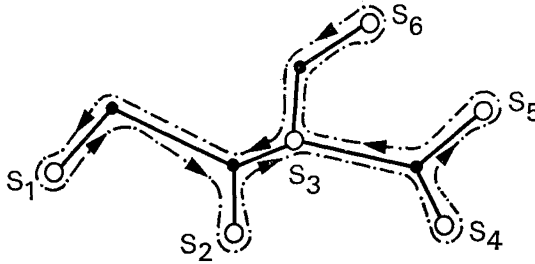
Pour toute arête  $e$ , les sommets de  $S$  qui appartiennent à  $T_1 \cap S$  sont indicés  $[S_1, S_{i+1}, \dots, S_p]$  et ceux appartenant à  $T_2 \cap S$  sont indicés

$$[S_1, \dots, S_{i-1}, S_{p+1}, \dots, S_k]$$

alors on a

$$\varphi_T = \sum_{e \in T} W(e) = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} W_T(S_i S_{i+1}) + W_T(S_1 S_k) \right].$$

Avec une telle façon d'indicer les sommets de  $S$ , chaque arête est comptée exactement deux fois, une fois dans  $W_T(S_{i-1} S_i)$  et une fois dans  $W_T(S_p S_{p+1})$ . On indice les sommets de  $S$  selon l'ordre de parcours en suivant un circuit eulérien (voir fig.) contournant l'arbre  $T$ , sans jamais couper une arête.



HEURISTIQUE H : (1) Construire le graphe complet  $G(S) = (S, E_S)$  avec la valuation :  $W_G$ ;  $W_G(S_i S_j) =$  valeur d'une plus courte chaîne joignant  $S_i$  à  $S_j$  dans le graphe initial  $G$  valué par  $W$ ;

(2) construire un arbre  $T_S$ , maximal de poids minimal du graphe  $G_{(S)}$ .

(3) poser  $R = \{\Phi\}$ ; pour toute arête  $e_S = S_i S_j \in T_S$  faire

$$R := R \cup \left\{ \text{sommet appartenant à une plus courte chaîne joignant } S_i \text{ à } S_j \text{ dans le graphe } G \right\},$$

(4) construire un arbre maximal de poids minimal du sous-graphe engendré par  $Y = S \cup R$ ;

(5) s'ils existent des sommets pendants n'appartenant pas à  $S$  les supprimer.

Cette heuristique nécessite le calcul de la matrice symétrique des distances qui est en  $O(n^3)$  et de deux recherches d'arbre maximal de poids minimal qui est en  $O(m \text{ Log Log } n)$ .

THÉORÈME :

$$\frac{\varphi_H}{\varphi_{\text{opt}}} \leq 2 \frac{k-1}{k}.$$

Démonstration : Soit  $T_0$  une solution optimale, tous les sommets pendants de  $T_0$  appartiennent à  $S$ .

D'après le lemme, il existe une façon d'indicer les sommets  $S$  telle que

$$\varphi_{\text{opt}} = \varphi_{T_0} = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} W_{T_0}(S_i S_{i+1}) + W_{T_0}(S_k S_1) \right]$$

comme  $W_G(S_i S_{i+1}) \leq W_{T_0}(S_i S_{i+1})$  on a

$$\varphi_{\text{opt}} \geq \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^{k-1} W_G(S_i S_{i+1}) + W_G(S_k S_1) \right].$$

Considérons le cycle  $C = S_1, S_2, \dots, S_k, S_1$  dans le graphe  $G(S)$  :

$$\varphi_c = \sum_{i=1}^{k-1} W(S_i S_{i+1}) + W(S_k S_1),$$

$$\varphi_{opt} \cong \frac{1}{2} \varphi_c.$$

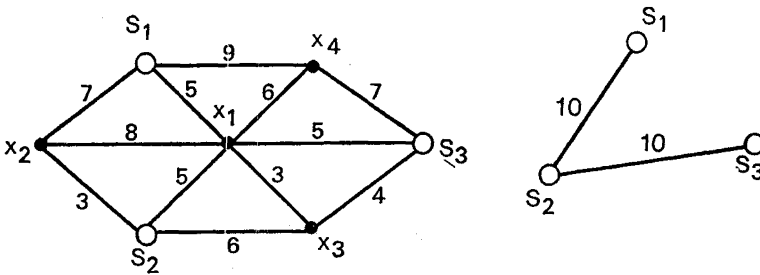
Le cycle  $C$  contient un arbre maximal du graphe  $G(S)$  :

$$\varphi_H \leq \varphi_{T_S} \leq \varphi_c \frac{k-1}{k},$$

d'où

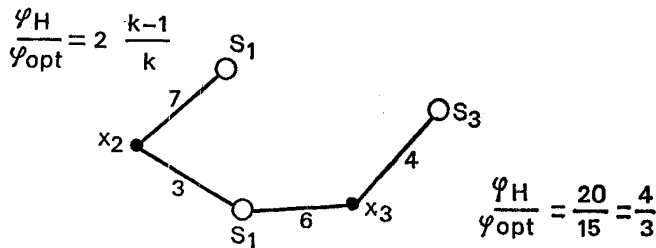
$$\frac{\varphi_H}{\varphi_{opt}} \leq 2 \frac{k-1}{k}.$$

Exemple 1 :

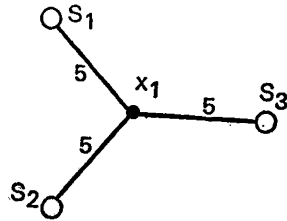


$T_S$ , arbre maximal de poids minimal de  $G(S)$ .

Si on prend les plus courtes chaînes  $[S_1, x_2, S_2]$  et  $[S_2, x_3, S_3]$  on obtient une solution extrême.



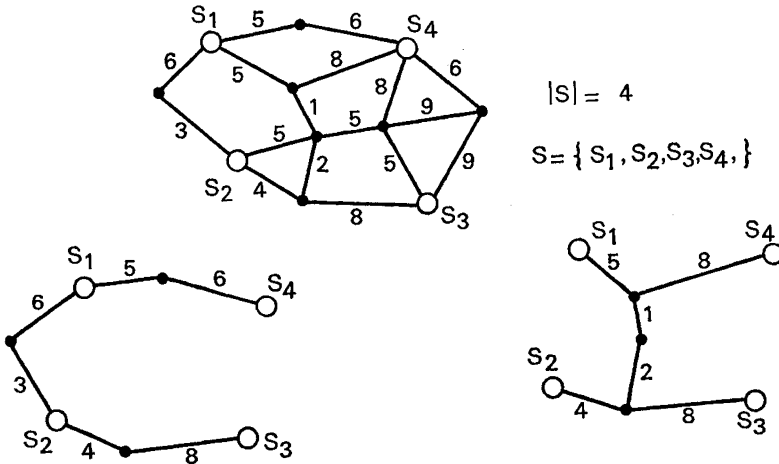
Par contre, si on prend les plus courtes chaînes  $[S_1, x_1, S_2]$  et  $[S_2, x_1, S_3]$  on obtient une solution optimale.



$$\varphi_H = \varphi_{opt} = 15.$$

Cet exemple montre que dans le cas où la plus courte chaîne entre  $S_i$  et  $S_j$ , n'est pas unique, on génère à partir de l'étape (3) de l'heuristique, les solutions relatives aux différentes plus courtes chaînes et on prend la meilleure des solutions obtenues.

Exemple 2 :



$$|S| = 4$$

$$S = \{ S_1, S_2, S_3, S_4, \}$$

Solution obtenue par l'heuristique  $H$ .  $\varphi_H = 32$ .      Solution optimale  $\varphi_{opt} = 28$ .

$$\frac{\varphi_H}{\varphi_{opt}} = \frac{32}{28} = \frac{8}{7} < 2 \frac{4-1}{4} = \frac{3}{2}.$$

Ce deuxième exemple montre que l'optimum n'est pas toujours atteint par cet algorithme.

## BIBLIOGRAPHIE

1. M. CHEIN, *Un algorithme pour relier N Points*, *Calcolo*, Fasc. 4, vol. 5, 1968, p. 537-547.
2. S. E. DREYFUS, *The Steiner Problem in Graphs*, *Networks*, vol. 1, n° 3, 1972, p. 195-207.
3. R. M. KARP, *The Fast Approximation Solution of Hard Problems*, Proc. 6th S.E. Conf. Combinatorics Graphs Theory and Computing, 1975, p. 15-51.
4. R. M. KARP, *Reductibility Among Combinatorial Problems*, *Complexity of Computer Computations*, R. E. MILLER and J. W. THATCHER, eds., Plenum Press, New York, 1972, p. 85-104.