RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

CONSTANTIN DRĂGUSIN

Min-max pour des critères multiples

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 12, nº 2 (1978), p. 169-180

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_2_169_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 12, n° 2, mai 1978, p. 169 à 180.)

MIN-MAX POUR DES CRITÈRES MULTIPLES (¹)

par CONSTANTIN DRĂGUSIN (²)

Résumé. — *On étudie le problème de min-max au cas vectoriel (min-max de Pareto).*
Dans la première partie on donne les conditions pour l'existence des points de min-max de Pareto et une condition nécessaire pour les fonctions différentiables en direction.
Dans la deuxième partie on propose des méthodes de sélection.

INTRODUCTION

Dans la théorie des jeux on considère une seule fonction objective et on recherche les points de min-max ou col.

Dans cet ouvrage nous considérons des fonctions vectorielles et recherchons les points de min-max Pareto. En ce cas, la définition usuelle n'est pas possible. Il est nécessaire d'introduire une définition correspondante.

La première partie contient la définition des points de min-max de Pareto, des conditions pour l'existence et des conditions nécessaires.

Compte tenu qu'un problème de critères multiples a de nombreux points de min-max de Pareto, il est nécessaire d'introduire des méthodes de sélection.

La deuxième partie est consacrée à la présentation des méthodes de sélection : la méthode d'hiérarchisation, la méthode de compromis, la méthode de la fonction de minimum et la méthode de la norme.

1. L'EXISTENCE DES POINTS DE MIN-MAX DE PARETO

Soit $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ deux espaces de Banach réels, R^m l'espace euclidien m-dimensionnel et

$$K^m = \{ z = (z_1, \ldots, z_m) \in R^m / z_i \geqq 0,\ i = 1, \ldots, m \}, \tag{1}$$

$$\overset{\circ}{\widehat{K^m}} = \{ z = (z_1, \ldots, z_m) \in R^m / z_i > 0,\ i = 1, \ldots, m \}. \tag{2}$$

Dans R^m on considère la relation d'ordre

$$z^1 \leqq z^2 (z^2 \geqq z^1) \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - z^1 \in K^m \tag{3}$$

(¹) Manuscrit reçu avril 1977.
(²) Catedra Matematici I, Facultatea Transporturi, Institutul Politehnic Bucureşti.

et on notera

$$z^1 < z^2 (z^2 > z^1) \quad \Leftrightarrow \quad z^2 - z^1 \in \widehat{\overset{\circ}{K^m}}. \tag{4}$$

DÉFINITION 1.1 : Soit $A \subset \mathscr{X}$, $B \subset \mathscr{Y}$ et $f = (f_1, \ldots, f_m)$:

$$\mathscr{X} \times \mathscr{Y} \rightarrow R^m.$$

a) On rappelle que le point $(x^0, y^0) \in A \times B$ est de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$ s'il n'existe pas de points $(x, y) \in A \times B$ qui satisfassent aux conditions suivantes :

(i) $f(x, y^0) \leqq f(x^0, y^0) \leqq f(x^0, y)$;

(ii) ou $\| f(x^0, y^0) - f(x, y^0) \| > 0$

ou $\| f(x^0, y^0) - f(x^0, y) \| > 0$.

b) On rappelle que le point $(x^0, y^0) \in A \times B$ est de min-max de Pareto faible s'il n'existe pas de points $(x, y) \in A \times B$ qui satisfassent la condition suivante :

(i') $f(x, y^0) < f(x^0, y^0) < f(x^0, y)$.

REMARQUE 1.1 : La condition (ii) est équivalente à l'affirmation suivante :

(ii') « il existe soit i_0 soit $j_0 \in \{1, \ldots, m\}$ tels que :

ou $f_{i_0}(x, y^0) < f_{i_0}(x^0, y^0) \leqq f_{i_0}(x^0, y)$

ou $f_{j_0}(x, y^0) \leqq f_{j_0}(x^0, y^0) < f_{j_0}(x^0, y)$ ».

DÉFINITION 1.2 : La fonction $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \rightarrow R^m$ est appelée semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) au point (x^0, y^0) (sur $A \times B$) par rapport à x (resp. y), si les fonctions partielles $f_i(., y^0)$ $(f_i(., y),\ y \in B)$ [resp. $f_i(x^0, .)$ $(f_i(x, .),\ x \in A)$], $\forall i = 1, \ldots, m$ sont semi-continues inférieurement (resp. supérieurement) en x^0 (sur A) [resp. y^0 (sur B)].

DÉFINITION 1.3 : La fonctionnelle $\Phi : R^m \rightarrow R$ est appelée isotonique si

$$z^1 \leqq z^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z^1) \leqq \Phi(z^2) \tag{5}$$

et strictement isotonique si

$$z^1 \leqq z^2 \qquad \text{et} \qquad z^1 \neq z^2 \quad \Rightarrow \quad \Phi(z^1) < \Phi(z^2). \tag{6}$$

Exemples : 1° La fonctionnelle $\Psi : R^m \rightarrow R$, définie par

$$\Psi(z) = \min_{1 \leqq i \leqq m} z_i, \tag{7}$$

est isotonique.

2° Soit $\lambda \in \widehat{\overset{\circ}{K^m}}$. La fonctionnelle $\Phi_\lambda : R^m \to R$, définie par

$$\Phi_\lambda(z) = \langle \lambda, z \rangle \left(= \sum_{i=1}^{m} \lambda_i z_i \right) \tag{8}$$

est strictement isotonique.

3° Soit $\mathscr{L}^+ (R^m) = \{ \mathscr{A} / \mathscr{A} : R^m \to R^m$ linéaire, tel que $\mathscr{A}(K^m) \subset K^m$ et $\langle \mathscr{A} z, z \rangle > 0$, pour tout $z \neq 0 \}$ et soit $\mathscr{A} \in \mathscr{L}^+ (R^m)$. Pour tout $z \in R^m$, on notera

$$\| z \|_{\mathscr{A}}^2 = \langle \mathscr{A} z, z \rangle. \tag{9}$$

La fonctionnelle $\| \, . \, \|_{\mathscr{A}} |_{K^m}$ (la restriction de $\| \, . \, \|_{\mathscr{A}}$ à K^m) est strictement isotonique.

THÉORÈME 1.1 : *Soit $A \subset \mathscr{X}$, $B \subset \mathscr{Y}$, $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$ et $\Phi : R^m \to R$ strictement isotonique. Si (x^0, y^0) est de point de min-max pour la fonctionnelle $\Phi \circ f$ sur $A \times B$, alors (x^0, y^0) est un point de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$.*

La démonstration est immédiate.

LEMME 1.1 : *Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$ (faiblement) semi-continue inférieurement par rapport à x et (faiblement) semi-continue supérieurement par rapport à y et $\Phi : R^m \to R$ isotonique et continue. Alors la fonctionnelle $\Phi \circ f$ est (faiblement) semi-continue inférieurement par rapport à x et (faiblement) semi-continue supérieurement par rapport à y.*

Démonstration : Soit $(x^0, y^0) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y}$ et $(x_n, y_n) \to (x^0, y^0)$ pour $n \to \infty$.

Compte tenu que la fonction f est semi-continue inférieurement par rapport à x, nous avons

$$f(x^0, y^0) \leqq z^0, \tag{10}$$

où $z_i^0 = \underline{\lim}_{n \to \infty} f_i(x_n, y^0)$, $i = 1, \ldots, m$ et $z^0 = (z_1^0, \ldots, z_m^0)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la fonctionnelle Φ est continue, $\exists \, \delta(\varepsilon) > 0$, telle que

$$z \in R^m \quad \text{et} \quad \| z - z^0 \| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; \Phi(z^0) - \varepsilon < \Phi(z),$$

et donc pour

$$z^1 = \left(z_1^0 - \frac{\delta(\varepsilon)}{2\sqrt{m}}, \ldots, z_m^0 - \frac{\delta(\varepsilon)}{2\sqrt{m}} \right),$$

nous avons

$$\Phi(z^0) < \Phi(z^1) + \varepsilon. \tag{11}$$

Notons $\eta(\varepsilon) = \delta(\varepsilon)/2\sqrt{m}$. Alors il existe $n(\eta(\varepsilon)) = n_1(\varepsilon) \in N$ tel que $n \geqq n_1(\varepsilon)$:

$$z_i^1 = z_i^0 - \frac{\delta(\varepsilon)}{2\sqrt{m}} < f_i(x_n, y^0) \tag{12}$$

pour tout $i = 1, \ldots, m$.

L'isotonie de la fonctionnelle Φ et les relations (10), (11) et (12) entraînent

$$\Phi(f(x^0, y^0)) \leqq \Phi(z^0) \leqq \Phi(z^1)+\varepsilon \leqq \Phi(f(x_n, y^0))+\varepsilon,$$

pour tout $n \geqq n_1(\varepsilon)$ et donc

$$\Phi(f(x^0, y^0)) \leqq \varliminf_{n\to\infty} \Phi(f(x_n, y^0)).$$

De façon analogue on prouve que $\Phi \circ f$ est semi-continue supérieurement par rapport à y.

La démonstration est identique pour le cas faible.

THÉORÈME 1.2 : *Soit* $f=(f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X}\times\mathscr{Y}\to R^m$. *Supposons que* f *est (faiblement) semi-continue inférieurement par rapport à* x *et (faiblement) semi-continue supérieurement par rapport à* y, $A\subset\mathscr{X}$ *et* $B\subset\mathscr{Y}$ *sont compacts (faible).*

Alors il existe des points de min-max de Pareto pour la fonction f *sur* $A\times B$.

Démonstration : Pour la fonctionnelle Φ_λ et la fonction f on applique le lemme 1.1, le lemme 4 [9] et le théorème 1.1.

LEMME 1.2 : *Soit* $A\subset\mathscr{X}$, $B\subset\mathscr{Y}$ *des ensembles compacts,* $f:\mathscr{X}\times\mathscr{Y}\to R$ *une fonction (faiblement) continue par rapport à* x *uniformément par rapport à* y *et (faiblement) semi-continue supérieurement par rapport à* y.

(i) *Si*

$$B(x)=\{y\in B/f(x, y)=\sup_{v\in B} f(x, v)\}, \qquad \forall x\in A,$$

alors

$$B(A)=\bigcup_{x\in A} B(x), \tag{13}$$

est (faiblement séquentielle) compact.

(ii) *Si*

$$C=\{x\in A/\varphi(x)=\inf_{u\in A}\varphi(u)=\inf_{u\in A}\sup_{v\in B} f(u, v)\},$$

alors :

$$D=\bigcup_{x\in C}(x, B(x)), \tag{14}$$

est (faiblement séquentielle) compact.

Démonstration : (i) Parce que $B(A)\subset B$, il suffit de montrer que $B(A)$ est fermé.

Soit $(y_n)_{n\in N}\subset B(A)$, $y_n\to y^0$. Alors il existe $x_n\in A$ tels que $y_n\in B(x_n)$, $\forall n\in N$.

Comme A est compact et $(x_n)_{n\in N} \subset A$, alors il existe une suite $(x_{n_k})_{k\in N} \subset (x_n)_{n\in N}$ telle que $x_{n_k} \to x^0 \in A$, et pour la suite correspondante $(y_{n_k})_{k\in N}$, nous avons $y_{n_k} \to y^0$ et $y_{n_k} \in B(x_{n_k})$, $\forall k \in N$.

Nous montrerons que $f(x^0, y^0) = \max_{y\in B} f(x^0, y)$, d'où l'on déduit $y^0 \in B(x^0) \subset B(A)$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $x_{n_k} \to x^0$, alors il existe $k_1(\varepsilon) \in N$ tel que pour tout $k_1 \geqq k_1(\varepsilon)$, nous avons

$$f(x^0, y_{n_k}) - \varepsilon < f(x_{n_{k_1}}, y_{n_k}) < f(x^0, y_{n_k}) + \varepsilon, \qquad \forall k \in N, \tag{15}$$

et comme $y_{n_k} \to y^0$, alors il existe $k_2(\varepsilon) \in N$, tel que pour tout $k_2 \geqq k_2(\varepsilon)$, nous avons

$$f(x^0, y_{n_{k_2}}) < f(x^0, y^0) + \varepsilon. \tag{16}$$

Notons $k(\varepsilon) = \max(k_1(\varepsilon), k_2(\varepsilon))$, et soit $k \geqq k(\varepsilon)$.

Les relations (15) et (16) impliquent

$$f(x_{n_k}, y_{n_k}) < f(x^0, y^0) + 2\varepsilon,$$

d'où

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} f(x_{n_k}, y_{n_k}) \leqq f(x^0, y^0). \tag{17}$$

Soit $\bar{y} \in B(x^0)$ et $y_{n_k} \in B(x_{n_k})$; les relations suivantes sont vraies

$$f(x^0, y^0) \leqq f(x^0, \bar{y}) \tag{18}$$

et

$$f(x_{n_k}, \bar{y}) \leqq f(x_{n_k}, y_{n_k}), \tag{19}$$

d'où, on a

$$f(x^0, \bar{y}) \leqq \underline{\lim_{k\to\infty}} f(x_{n_k}, \bar{y}) \leqq \overline{\lim_{k\to\infty}} f(x_{n_k}, \bar{y}) \leqq \overline{\lim_{k\to\infty}} f(x_{n_k}, y_{n_k}). \tag{20}$$

Les relations (20), (17) et (18) nous donnent

$$f(x^0, y^0) = f(x^0, \bar{y}) = \max_{y\in B} f(x^0, y),$$

ce qui achève la démonstration de (i).

(ii) Comme $D \subset A \times B$, il suffit de montrer que D est fermé.

Soit $((x_n, y_n))_{n\in N} \subset D$, $(x_n, y_n) \to (x^0, y^0)$; alors $x_n \to x^0$ et $y_n \to y^0$, mais $y_n \in B(x_n)$.

La fonction $\varphi(x) = \sup_{y\in B} f(x, y)$ est continue, d'où on a

$$\varphi(x^0) = \lim_{n\to\infty} \varphi(x_n),$$

c'est-à-dire $x^0 \in C$.

Maintenant, pour l'ensemble C on applique le point (i) et on a $y^0 \in B(x^0)$ ou $(x^0, y^0) \in D$. Le lemme est démontrée.

LEMME 1.3 : *Soit $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ des espaces de Banach réflexifs, $f : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R$ faiblement continue par rapport à x, uniformément par rapport à y et faiblement semi-continue supérieurement par rapport à y et qui satisfait les conditions*

(i) $\overline{\lim\limits_{\|x\| \to \infty}} f(x, y) = +\infty, \ \forall y \in \mathscr{Y}$;

(ii) $\underline{\lim\limits_{\|y\| \to \infty}} f(x, y) = -\infty, \ \forall x \in \mathscr{X}$.

Alors l'ensemble

$$\mathscr{M} = \{(x, y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y} / f(x, y) = \inf_{u \in \mathscr{X}} \sup_{v \in \mathscr{Y}} f(u, v)\}, \tag{21}$$

est faiblement compact.

Démonstration : Nous montrerons tout d'abord que $\mathscr{M} \neq \emptyset$.

A cause de (ii), nous avons que

$$B(x) = \{ y \in \mathscr{Y} / f(x, y) = \sup_{v \in \mathscr{Y}} f(x, v)\}, \qquad \forall x \in \mathscr{X} \tag{22}$$

est un ensemble non vide et faiblement compact.

Nous notons

$$\varphi(x) = \sup_{v \in \mathscr{Y}} f(x, v). \tag{23}$$

La fonction $\varphi : \mathscr{X} \to R$ satisfait les conditions suivantes :

a) φ est faiblement continue sur $\mathscr{X}$;

b) $\overline{\lim\limits_{\|x\| \to \infty}} \varphi(x) = +\infty$.

En effet, soit $x^0 \in \mathscr{X}$ et $\varepsilon > 0$. Alors il existe $y_\varepsilon \in \mathscr{Y}$ tel que

$$\varphi(x^0) - \varepsilon < f(x^0, y_\varepsilon) \leqq \varphi(x^0). \tag{24}$$

Soit $(x_n)_{n \in N} \subset \mathscr{X}$, $x_n \to x^0$ faible. Parce que f est faiblement continue par rapport à x, il existe $n(\varepsilon) \in N$ tel que pour tout $n \geqq n(\varepsilon)$, on a

$$f(x^0, y_\varepsilon) - \varepsilon < f(x_n, y_\varepsilon) < f(x^0, y_\varepsilon) + \varepsilon. \tag{25}$$

Les inégalités (24) et (23) impliquent

$$\varphi(x^0) - 2\varepsilon \leqq f(x_n, y_\varepsilon) < f(x^0, y_\varepsilon) + \varepsilon,$$

d'où

$$\varphi(x^0) - 2\varepsilon \leqq \sup_{y \in \mathscr{Y}} f(x_n, y) \leqq \varphi(x^0) + 2\varepsilon,$$

pour tout $n \geqq n(\varepsilon)$, c'est-à-dire *a*).

Pour démontrer l'affirmation *b)*, nous supposons le contraire, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to \infty} \varphi(x) < \infty$; alors il existe $M > 0$, tel que $\varphi(x) \leqq M$, $\forall x \in \mathscr{X}$ et par la relation (23) nous obtenons :

$$f(x, y) \leqq M, \qquad \forall x \in \mathscr{X} \quad \text{et} \quad \forall y \in \mathscr{Y},$$

donc

$$\overline{\lim_{\|x\| \to \infty}} \, f(x, y) \leqq M,$$

ce qui vient en contradiction avec la supposition (i).

Les conditions *a)* et *b)* entraînent que l'ensemble

$$A = \{x \in \mathscr{X} / \varphi(x) = \inf_{u \in \mathscr{X}} \varphi(u)\},$$

est non vide et faiblement compact.

Soit $x^0 \in A$ et $y^0 \in B(x^0)$; alors on a

$$\min_{u \in \mathscr{X}} \max_{v \in \mathscr{Y}} f(u, v) = \min_{u \in \mathscr{X}} \varphi(u) = \varphi(x^0) = \max_{v \in \mathscr{Y}} f(x^0, v) = f(x^0, y^0)$$

et donc $(x^0, y^0) \in \mathscr{M}$.

Notons $B = \bigcup\limits_{x \in A} B(x)$. L'ensemble B est fermé [le lemme 1.2 (i)]. Montrons que B est borné, donc faiblement compact. Supposons le contraire, alors il existe une suite $(y_n)_{n \in N} \subset B$, telle que $\| y_n \| \to \infty$, quand $n \to \infty$. Il existe une suite $(x_n)_{n \in N} \subset A$, telle que $y_n \in B(x_n)$. Mais A est faiblement compact, il existe, par suite, $(x_{n_k})_{k \in N} \subset (x_n)_{n \in N}$ telle que $x_{n_k} \to x^0$ faible, $x^0 \in A$ et pour la suite correspondant $(y_{n_k})_{k \in N}$, nous avons $\| y_{n_k} \| \to \infty$.

Soit $\varepsilon > 0$. Considérons maintenant la définition de φ et la continuité faible de f par rapport à x, uniformément par rapport à y, alors il existe $k(\varepsilon) \in N$, tel que pour tout $k \geqq k(\varepsilon)$ et $y \in \mathscr{Y}$, nous avons

$$f(x^0, y) - \varepsilon < f(x_{n_k}, y) \leqq f(x_{n_k}, y_{n_k}) < f(x^0, y_{n_k}) + \varepsilon, \tag{26}$$

d'où

$$f(x^0, y) - 2\varepsilon \leqq \underline{\lim}_{k \to \infty} f(x^0, y_{n_k}),$$

ce qui contredit l'hypothèse (ii).

Comme $A \subset \mathscr{X}$ et $B \subset \mathscr{Y}$ sont faiblements compacts, en vertu du lemme 1.2, $\mathscr{M} = \bigcup\limits_{x \in A} (x, B(x))$ est faiblement compact, et le lemme est démontré.

THÉORÈME 1.3 : *Soit $\mathscr{X}$ et $\mathscr{Y}$ des espaces de Banach réflexifs,*

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$$

faiblement continue par rapport à x uniformément par rapport à y et faiblement semi-continue supérieurement par rapport à y et qui satisfait aux conditions :

(i) $\overline{\lim}_{\|x\| \to \infty} f(x, y) = +\infty_{R^m}, \ \forall y \in \mathscr{Y};$

(ii) $\underline{\lim}_{\|y\| \to \infty} f(x, y) = -\infty_{R^m}, \ \forall x \in \mathscr{X}.$

Alors la fonction f a des points min-max de Pareto sur $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Démonstration : Soit $\lambda \in \overset{\circ}{\widehat{K^m}}$. La fonctionnelle $\Phi_\lambda \circ f : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R$, où Φ_λ est la fonctionnelle de la relation (8), satisfait aux conditions du lemme 1.3, et a donc des points de min-max ou col. Du théorème 1.1 il en résulte que ces points sont de min-max de Pareto pour la fonction f sur $\mathscr{X} \times \mathscr{Y}$.

Soit $f : \mathscr{X} \to R^m$ et x^0, $h \in \mathscr{X}$, alors $\bar{\delta} f(x^0; h)$ est la différentielle de la fonction f au point x^0 en direction h.

THÉORÈME 1.4 : *Soit $A_1 \subset \mathscr{X}$, $B_1 \subset \mathscr{Y}$ des ensembles ouverts, $f = (f_1, \ldots, f_m) : A_1 \times B_1 \to R^m$ différentiable en direction sur $A_1 \times B_1$ et $A \subset A_1$, $B \subset B_1$ des ensembles fermés et convexes.*

La condition nécessaire pour que $(x^0, y^0) \in A \times B$ soit un point de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$ est que

$$
\begin{aligned}
&W(x^0, y^0) \\
&\quad = \{(h_1, h_2) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y} / \exists (\alpha_1 > 0, \alpha_2 > 0) \\
&\qquad \text{tels que} \\
&\qquad (x^0 + \alpha_1 h_1, y^0) \in A \times B, \ (x^0, y^0 + \alpha_2 h_2) \in A \times B, \\
&\qquad \bar{\delta} f((x^0, y^0); (h_1, o)) < O_{R^m}, \ \bar{\delta} f((x^0, y^0); (o, h_2)) > O_{R^m}\}
\end{aligned} \tag{27}
$$

soit un ensemble vide.

Démonstration : Supposons le contraire, c'est-à-dire $W(x^0, y^0) \neq \emptyset$, et soit $(h_1, h_2) \in W(x^0, y^0)$; alors il existe $\bar{\alpha}_1 > 0$, $\bar{\alpha}_2 > 0$ tels qu'on a $(x^0 + \alpha_1 h_1, y^0) \in A \times B$ et $(x^0, y^0 + \alpha_2 h_2) \in A \times B$ pour tous $0 < \alpha_1 \leqq \bar{\alpha}_1$ et $0 < \alpha_2 \leqq \bar{\alpha}_2$.

De la différentiabilité en direction, on a

$$f(x^0 + \alpha_1 h_1, y^0) - f(x^0, y^0) = \alpha_1 \bar{\delta} f((x^0, y^0); (h_1, o)) + o_1(\alpha_1), \tag{28}$$

$$f(x^0, y^0 + \alpha_2 h_2) - f(x^0, y^0) = \alpha_2 \bar{\delta} f((x^0, y^0); (o, h_2)) + o_2(\alpha_2), \tag{29}$$

où

$$\lim_{\alpha_i \to 0^+} \frac{o_i(\alpha_i)}{\alpha_i} = O_{R^m}, \quad i = 1, 2$$

et ensuite qu'il existe $0 < \hat{\alpha}_1 \leqq \bar{\alpha}_1$ et $0 < \hat{\alpha}_2 \leqq \bar{\alpha}_2$, tels que

$$\bar{\delta} f((x^0, y^0); (h_1, o)) + \frac{o_1(\hat{\alpha}_1)}{\hat{\alpha}_1} \leqq \frac{1}{2} \bar{\delta} f((x^0, y^0); (h_1, o)), \tag{30}$$

et

$$\bar{\delta} f((x^0, y^0); (o, h_2)) + \frac{o_2(\hat{\alpha}_2)}{\hat{\alpha}_2} \geqq \frac{1}{2} \bar{\delta} f((x^0, y^0); (o, h_2)). \tag{31}$$

Parce que A et B sont convexes, alors on a $(x^0 + \hat{\alpha}_1 h_1, y^0 + \hat{\alpha}_2 h_2) \in A \times B$. De (28), (29), (30), (31) et (27), on obtient :

$$f(x^0 + \hat{\alpha}_1 h_1, y^0) < f(x^0, y^0) < f(x^0, y^0 + \hat{\alpha}_2 h_2),$$

ce qui contredit la définition de (x^0, y^0), d'où le théorème.

2. SÉLECTION DES SOLUTIONS DE MIN-MAX DE PARETO

Dans ce qui suit, nous exposerons des méthodes de sélection des points de min-max de Pareto.

2.1. La méthode de hiérarchisation

Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$, $A \subset \mathscr{X}$ et $B \subset \mathscr{Y}$.

Notons

$$A_0 = A, \qquad B_0 = B,$$

$$B_j(x) = \{ y \in B_{j-1} / f_j(x, y) = \sup_{v \in B_{j-1}} f_j(x, v) \}, \qquad \forall x \in A_{j-1},$$

$$A_j = \{ x \in A_{j-1} / \varphi_j(x) = \inf_{u \in A_{j-1}} \varphi_j(u) = \inf_{u \in A_{j-1}} \sup_{v \in B_{j-1}} f_j(u, v) \},$$

$$B_j = \bigcup_{x \in A_j} B_j(x),$$

pour tout $j = 1, \ldots, m$.

PROPOSITION 2.1 : *Si $A_m \times B_m \neq \emptyset$, alors tout $(x, y) \in A_m \times B_m$ est un point de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$.*

Démonstration : Soit $(x^0, y^0) \in A_m \times B_m$. Parce que

$$A_m \subset A_{m-1} \subset \ldots \subset A_1 \subset A,$$

$$B_m \subset B_{m-1} \subset \ldots \subset B_1 \subset B,$$

alors $(x^0, y^0) \in A_k \times B_k$ pour tout $k = 0, 1, \ldots, m$.

Supposons, maintenant, que (x^0, y^0) n'est pas un point de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$. Alors il existe $(x, y) \in A \times B$ tel que :

(i) $f(x, y^0) \leqq f(x^0, y^0) \leqq f(x^0, y)$;

(ii) ou $\|f(x, y^0) - f(x^0, y^0)\| > 0$ ou $\|f(x^0, y) - f(x^0, y^0)\| > 0$.

De la relation (i) il résulte $y \in B_1(x^0)$ et $x \in A_1$, d'où $(x, y) \in A_1 \times B_1$.

D'une manière analogue nous obtenons que $(x, y) \in A_k \times B_k$, pour tout $k = 0, 1, \ldots, m$ ce qui contredit la relation (ii).

La proposition est démontrée.

REMARQUE 2.1 : Si (x^0, y^0) est un point de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$, alors x^0 est de point de minimum de Pareto pour la fonction partielle $f(., y^0)$ sur A, mais y^0 est un point de maximum de Pareto pour la fonction partielle $f(x^0, .)$ sur B.

REMARQUE 2.2 : Dans la méthode antérieure on peut remplacer j par $\sigma(j)$, où σ est une permutation des indices $\{1, \ldots, m\}$. Dans ce cas nous avons $A_m \times B_m \neq A_{\sigma(m)} \times B_{\sigma(m)}$ ce qui exprime le fait que l'ensemble des points de min-max de Pareto est nombreux.

REMARQUE 2.3 : Si $f : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$ est continue, et $A \subset \mathscr{X}$ $B \subset \mathscr{Y}$ sont compacts, alors $A_m \times B_m \neq \emptyset$.

2.2. La méthode de compromis

Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$, $A \subset \mathscr{X}$, $B \subset \mathscr{Y}$ et $\lambda \in \widehat{\mathring{K}^m}$.

Considérons la fonctionnelle

$$F_\lambda(x, y) = \langle \lambda, f(x, y) \rangle = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_i(x, y),$$

et notons

$$A_\lambda \times B_\lambda = \{(x, y) \in A \times B / F_\lambda(x, v) \leqq F_\lambda(x, y) \leqq F_\lambda(u, y),\ \forall (u, v) \in A \times B\}.$$

La proposition suivante est une conséquence du théorème 1.1.

PROPOSITION 2.2 : *Si $A_\lambda \times B_\lambda \neq \emptyset$, alors tout le point qui appartient à l'ensemble $A_\lambda \times B_\lambda$ est de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$.*

REMARQUE 2.4 : On peut considérer seulement des vecteurs $\lambda \in \widehat{\mathring{K}^m}$ tels que $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ $(\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_m))$.

REMARQUE 2.5 : Si pour $\lambda \in K^m$, $(x^0, y^0) \in A_\lambda \times B_\lambda$, alors (x^0, y^0) est un point de min-max de Pareto faible pour la fonction f sur $A \times B$.

REMARQUE 2.6 : Si $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$ est (faiblement) semi-continue inférieurement par rapport à x, uniformément par rapport à y et (faiblement) semi-continue supérieurement par rapport à y, mais $A \subset \mathscr{X}$ et $B \subset \mathscr{Y}$ sont (faiblements) compacts, alors $A \times B \neq \emptyset$.

2.3. La méthode de la fonction de minimum

Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$, $A \subset \mathscr{X}$ et $B \subset \mathscr{Y}$.

On considère la fonctionnelle

$$G(x, y) = \min_{1 \leqq i \leqq m} f_i(x, y), \qquad \forall (x, y) \in \mathscr{X} \times \mathscr{Y},$$

et notons

$$A^0 \times B^0 = \{(x, y) \in A \times B / G(x, v) \leqq G(x, y) \leqq G(u, y), \forall (u, v) \in A \times B\}.$$

PROPOSITION 2.3 : *a) Si $A^0 \times B^0 \neq \emptyset$, alors les points de $A^0 \times B^0$ sont de min-max de Pareto faible pour la fonction f sur $A \times B$.*

b) Si $A^0 \times B^0$ est formé d'un point, alors il est de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$.

2.4. La méthode de la norme

Soit $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathscr{X} \times \mathscr{Y} \to R^m$, $A \subset \mathscr{X}$ et $B \subset \mathscr{Y}$.

Nous considérons le vecteur $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, où

$$\alpha_i = \inf_{(x, y) \in A \times B} f_i(x, y), \qquad i = 1, \ldots, m$$

et supposons que $\| \alpha \| < \infty$.

Nous formons la fonctionnelle

$$\Gamma_p(x, y) = \| f(x, y) - \alpha \|_p = \left(\sum_{i=1}^{m} | f_i(x, y) - \alpha_i |^p \right)^{1/p},$$

où $1 \leqq p < \infty$.

Notons

$$A_p \times B_p = \{(x, y) \in A \times B / \Gamma_p(x, v) \leqq \Gamma_p(x, y) \leqq \Gamma_p(u, y), \forall (u, v) \in A \times B\}.$$

Parce que $\| \cdot \|_p$ est une fonctionnelle isotonique strictement sur K^m, du théorème 1.1 il résulte la proposition suivante.

PROPOSITION 2.4 : *Si $A_p \times B_p \neq \emptyset$, alors les points de $A_p \times B_p$ sont de min-max de Pareto pour la fonction f sur $A \times B$.*

REMARQUE 2.7 : Dans le cas $p = 1$, pour tout $(x, y) \in A \times B$, nous avons

$$\Gamma_1(x, y) = \sum_{i=1}^{m} (f_i(x, y) - \alpha_i)$$

et on obtient le même résultat comme la méthode du compromis pour

$$\lambda = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}\right).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. K. J. ARROW, E. W. BARANKIN et D. BLACKWELL, *Admissible Points of Convex sets, Contributions to the Theory of Games*, vol. 2, 1953, p. 87-92, Princeton.
2. K. J. ARROW, L. HURWICZ et H. UZAWA, *Studies in Linear and Nonlinear Programming*, Stanford University Press, 1958.
3. J. P. AUBIN, *Sélection de solutions d'un problème d'optimisation à critères multiples*, Cahiers de mathématiques de la décision, n° 714, décembre 1971.
4. J. CÉA, *Optimisation théorie et algorithmes*, Dunod, Paris, 1971.
5. V. F. DEMIYANOV et V. M. MALOZEMOV, *Vvedenie v minmacs*, Izd. Nauka, 1972.
6. C. DRAGUŞIN, *Asupra optimizării Pareto*, Studii si cercetări matematice, n° 10, tome 26, 1974, Ed. Acad. R.S.R.
7. C. DRĂGUŞIN, *Min-max Pareto*, Institutul Politehnic Bucureşti, Seminarul de matematicî, 1975.
8. N. DUNFORD et J. SCHWARTZ, *Linear Operators*. Part. I, *General Theory* Intercience Publishers, New York, London, 1958.
9. E. G. GOLIŞTEIN, *Vîpucloe programmirovanie, elementî teorii*, Izd. Nauka, Glavnaia redactia fizico-matematicescoi literaturi, Moskva, 1970.
10. A. HAURIE, *On Pareto Optimal Decisions for a Coalition of a Subset of Players*, I.E.E.E. Transactions on Automatic Control, April 1973.
11. B. LEMAIRE, *Selection min-max d'un minimum de Pareto*. Colloque d'analyse numérique, Épinal, 1972, Université des Sciences et Techniques du Languedoc.
12. B. ROY, *Classement et choix en présence de points de vue multiples*, R.I.R.O., n° 8, 1968.
13. B. ROY, *Problems and Methods with Multiple Objective Fonctions*, Proceedings of the 7th Mathematical programming symposium, Hague, 1970.
14. M. E. SALUKVADZE, *Zadaci vectornoi optimizaţii v teorii upravlenia*, Meţniereba, Tbilisi, 1975.
15. C. VĂRSAN, *Teoria generală a problemelor de extremum cu aplicaţii la sistemele de control optimal*, Ed. Acad. R.S.R., Bucureşti, 1974.
16. J. VON NEUMANN et O. MORGENSTERM, *Theory of Games and Economic Behavior*, 1944, Princeton University Press.
17. P. L. YU, *Cone Convexity, Cone extreme Points and Nondominated Solutions in Decision Problems with Multiobjectives*, J.O.T.A., vol. 14, n° 3, 1974.