

J. C. DODU

Modèle dynamique d'optimisation à long terme d'un réseau de transport d'énergie électrique

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 12, n° 2 (1978),
p. 141-167

http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_2_141_0

© AFCET, 1978, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « RAIRO. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

MODÈLE DYNAMIQUE D'OPTIMISATION A LONG TERME D'UN RÉSEAU DE TRANSPORT D'ÉNERGIE ÉLECTRIQUE (*)

par J. C. DODU ⁽¹⁾

Résumé. — *Compte tenu de sa complexité, le problème du développement à long terme d'un réseau de transport d'énergie électrique ne peut être abordé sans qu'il soit nécessaire d'effectuer un certain nombre d'hypothèses simplificatrices assez larges. Dans cet article, on suppose que les variables représentant les investissements sont des variables continues et que les transits dans les lignes du réseau obéissent à la première loi de Kirchhoff seulement. De plus, seules les indisponibilités des groupes de production thermique sont prises en considération, tous les autres aléas étant négligés.*

Le problème à résoudre peut s'énoncer de la manière suivante : connaissant l'évolution de la demande, la composition et la localisation du parc de production, déterminer les capacités de transit des liaisons du réseau aux différents instants de la période d'étude de telle sorte que la somme actualisée des coûts d'investissement, d'exploitation et de défaillance soit minimale.

Les hypothèses faites permettent de résoudre ce problème à l'aide des méthodes de la programmation linéaire. La structure particulière de la matrice des contraintes rend possible la mise en œuvre de deux méthodes utilisées pour résoudre les problèmes de grande taille :

- *une procédure de génération de colonnes avec, comme sous-problèmes, des problèmes de flot maximal;*
- *une méthode de partitionnement de la matrice de base.*

INTRODUCTION

Compte tenu de l'étendue du problème et dans l'état actuel des moyens de calcul, l'étude du développement à long terme d'un réseau de transport d'énergie électrique au moyen d'un modèle mathématique utilisant les méthodes de la recherche opérationnelle ⁽²⁾ ne peut se faire qu'au prix d'une représentation très schématisée du réseau et moyennant l'adoption d'un certain nombre d'hypothèses simplificatrices assez larges. Le modèle décrit dans cet article retient les approximations suivantes :

- 1° les variables représentant les investissements sont des variables continues;
- 2° la circulation de l'énergie dans le réseau obéit à la première loi de Kirchhoff seulement.

(*) Manuscrit reçu juin 1977.

⁽¹⁾ E.D.F., Service Études de Réseaux, Département « Méthodes d'Optimisation ».

⁽²⁾ Les références [1-21, 34] présentent différentes approches possibles du problème de l'optimisation à long terme d'un réseau de transport.

Il est clair qu'un tel modèle ne peut prétendre résoudre le problème du développement à long terme d'un réseau de transport dans toute sa complexité. Son ambition est triple :

1° mettre en évidence les principaux axes de développement du futur réseau de transport en indiquant, pour chacun d'eux, le volume global des investissements à réaliser;

2° étudier comment varient la structure et le dimensionnement du réseau en fonction de paramètres fondamentaux tels que l'évolution de la demande ou la localisation des groupes thermiques;

3° obtenir des résultats qui serviront de point de départ à une étude plus détaillée, dans laquelle le réseau sera décrit de façon moins schématique (nombre de sommets et de lignes plus important, introduction de la deuxième loi de Kirchhoff) et où la nature des investissements sera davantage précisée (nombre d'éléments en parallèle, section des conducteurs, niveau de tension...). Cette étude sera effectuée à l'aide des modèles probabilistes décrits dans [13-17].

L'une des difficultés essentielles du problème de l'optimisation à long terme d'un réseau de transport réside dans la prise en compte des aléas de toute nature qui affectent le système production-consommation-réseau. Dans cet article, seules les indisponibilités des groupes thermiques seront prises en considération, tous les autres aléas étant négligés. Le modèle sera ainsi en mesure d'évaluer simultanément :

- les besoins de transport représentant les investissements nécessaires, en l'absence d'aléas, pour acheminer l'énergie des points de production aux points de consommation;

- les besoins supplémentaires d'interconnexion permettant de faire face aux incertitudes de la production thermique.

La période d'étude comportera un nombre fini d'intervalles de temps, chaque intervalle représentant une année ou une période de plusieurs années. Dans un but de simplification, la formulation du problème sera toutefois établie en supposant que la période d'étude est divisée en années, l'état du réseau étant défini par la valeur des capacités de transit des liaisons à la fin de chaque année.

Par ailleurs, la consommation sera donnée sous la forme de monotones de charge annuelles, chaque monotone comportant elle-même plusieurs niveaux de consommation correspondant à différents postes tarifaires (heures de pointe, heures pleines, heures creuses).

Le problème que l'on se propose de résoudre peut plus précisément s'exprimer en ces termes : connaissant l'évolution de la demande, la compo-

sition et la localisation du parc de production, déterminer les capacités de transit des liaisons du réseau aux différents instants de la période d'étude de telle sorte que la somme actualisée des coûts d'investissement, d'exploitation et de défaillance soit minimale.

Le critère retenu pour évaluer la défaillance sera l'espérance mathématique de l'énergie annuelle non distribuée par manque de puissance installée sur le réseau, les aléas pris en compte portant sur la disponibilité des moyens de production thermiques. Pour estimer cette grandeur, on fera la moyenne des énergies annuelles non distribuées sur un ensemble de situations d'indisponibilité des groupes thermiques préalablement tirées au sort. Cette moyenne sera introduite dans la fonction économique après avoir été valorisée au coût unitaire de la défaillance.

Nous admettons, en outre, que la taille des équipements va en croissant tout au long de la période d'étude (on suppose qu'il n'y a pas de déclassement d'ouvrages).

Le problème ainsi formulé peut être considéré comme un problème de contrôle optimal à base de temps discrète et à contraintes linéaires (cf. § 3.3, formulation complète du problème). Il s'agit, en effet, d'étudier, en fonction du temps, l'évolution d'un système physique (le réseau électrique) défini à chaque instant par un vecteur de variables d'état (les capacités de transit des liaisons du réseau) et soumis à l'action de variables de commande (les quantités d'investissement mis en service chaque année).

Appliquer la théorie de la commande optimale présente toutefois une difficulté en raison du caractère non-différentiable de la fonction objectif à minimiser. On peut cependant montrer que la résolution du problème posé se ramène à celle d'un programme linéaire équivalent. La structure particulière de la matrice des contraintes rend possible la mise en œuvre de deux méthodes utilisées pour résoudre les problèmes de grande taille :

1° une méthode de génération de colonnes [18-30] : il s'agit d'une procédure de décomposition grâce à laquelle il est possible de résoudre un programme linéaire sans avoir à former toutes les colonnes de la matrice des contraintes. Seules sont construites les colonnes dont on a besoin en appliquant la méthode du simplexe au problème posé. Chacune de celles-ci est engendrée au cours de l'algorithme en résolvant un sous-problème d'optimisation. Ce sous-problème est ici un problème de flot maximal;

2° la méthode des variables bornées généralisée [31], qui est en fait une méthode de partitionnement appliquée à la matrice de base.

Afin de donner un aperçu des dimensions du problème traité, imaginons que l'on étudie l'évolution d'un réseau comportant 20 sommets et 40 liaisons

sur une période de 5 ans. Supposons que le nombre de situations d'indisponibilité tirées au sort pour estimer l'espérance mathématique de la défaillance annuelle soit de 100 et que le nombre des paliers de la monotone de charge annuelle soit de 3 (ceci, pour chaque année de la période d'étude). Dans le cadre des hypothèses adoptées dans cet article, déterminer l'évolution optimale du réseau revient à résoudre un programme linéaire comportant :

200 variables représentant les capacités de transit des liaisons du réseau aux différents instants de la période d'étude;

60 000 variables représentant les transits dans les liaisons du réseau;

30 000 contraintes d'égalité traduisant la première loi de Kirchhoff;

120 000 contraintes d'inégalité exprimant que les transits sont bornés en valeur absolue par les capacités des liaisons;

200 contraintes d'inégalité exprimant que la taille des équipements va en croissant tout au long de la période d'étude.

Des essais numériques ont été réalisés sur IBM 370/168. Le temps de calcul nécessaire pour déterminer l'évolution optimale d'un réseau comportant 20 sommets et 38 liaisons sur une période de 5 ans est de 11 mn 33 s en considérant 100 situations d'indisponibilité des groupes thermiques et 3 niveaux de consommation sur la monotone de charge annuelle. Pour obtenir ce résultat, il a été tenu compte du réseau existant à l'instant initial de l'étude. Lorsque ce réseau existant est nul, le temps de calcul est de 24 mn 48 s.

Le modèle permet également d'effectuer des études « statiques », c'est-à-dire, qui permettent de déterminer le dimensionnement optimal du réseau pour une année donnée. Dans ce cas, la taille du réseau peut atteindre 50 sommets et 100 liaisons. Le paragraphe 6 fournit un certain nombre de résultats numériques relatifs à ce type d'études.

0. NOTATIONS

Vecteurs

Les vecteurs seront représentés par des petites lettres à l'exception de i, j, k, l, m, n et d'un petit nombre d'autres, qui désigneront des entiers. Le symbole x représentera indifféremment un vecteur ligne ou un vecteur colonne et le produit scalaire de deux vecteurs x et y sera noté xy . Étant donné un vecteur $x \in R^n$, on désignera par x_k une composante de x , $\forall k \in N = \{1, 2, \dots, n\}$ et par x_K le vecteur de composantes $\{x_k \mid \forall k \in K \subset N\}$.

Matrices

Les matrices seront représentées par des grandes lettres. Étant donnée une matrice A , I étant l'ensemble des indices de ligne et J étant l'ensemble des indices de colonne, on désignera par :

A_i^j , un élément de A , $i \in I$ et $j \in J$;

A_i , une ligne de A , $i \in I$;

A_L , la matrice ayant pour lignes $\{A_l \mid \forall l \in L \subset I\}$;

A^j , une colonne de A , $j \in J$;

A^K , la matrice ayant pour colonnes $\{A^k \mid \forall k \in K \subset J\}$;

A_L^K , la matrice ayant pour éléments $\{A_l^k \mid \forall l \in L \subset I, \forall k \in K \subset J\}$;

A' , la transposée de A .



1. DÉFINITION PRÉLIMINAIRES

Le réseau étudié sera représenté par un graphe connexe G , dont les sommets seront désignés par σ_j , $\forall j \in S = \{0, 1, 2, \dots, n, (n+1)\}$. σ_0 et σ_{n+1} seront respectivement l'entrée et la sortie de G (cf. fig. 1).

Les arcs de G seront désignés par μ_i , $\forall i \in T$. On utilisera la notation (p, q) pour représenter un arc orienté conduisant de σ_p à σ_q . Un arc non orienté dont les sommets extrémité sont σ_p et σ_q , sera noté indifféremment (p, q) ou (q, p) . Le graphe G contient :

- des arcs d'entrée orientés $(0, i)$, $\forall i \in N = \{1, 2, \dots, n\}$;
- des arcs de sortie orientés $(i, n+1)$, $\forall i \in N$;
- d'autres arcs γ_l , $\forall l \in M = \{1, 2, \dots, m\}$, non orientés.

Les arcs γ_l représentent les lignes de transport et sont de la forme (p, q) avec $p \in N$, $q \in N$, $p \neq q$. Les arcs d'entrée symbolisent les moyens de production, tandis que les arcs de sortie représentent la demande.

On pose

$$T = M \cup P \cup Q,$$

où P est le sous-ensemble des indices des arcs d'entrée et Q est le sous-ensemble des indices des arcs de sortie.

Coupe du graphe G

Soit $H \subset S$ un sous-ensemble d'indices. On désigne par $\Omega(H) \subset T$ l'ensemble des indices des arcs μ_i ayant pour extrémités σ_p et σ_q tels que

$$\begin{cases} p \notin H \text{ et } q \in H \text{ si } \mu_i \text{ est un arc orienté conduisant de } \sigma_p \text{ à } \sigma_q, \\ p \notin H \text{ et } q \in H \text{ ou } p \in H \text{ et } q \in H, \text{ si } \mu_i \text{ est un arc non orienté.} \end{cases}$$

On appelle coupe du graphe G tout ensemble $\Omega(X)$ tel que

$$\{0\} \notin X \quad \text{et} \quad \{n+1\} \in X,$$

X est par suite de la forme

$$X = Y \cup \{n+1\} \quad \text{avec} \quad Y \subset N.$$

Le graphe G comporte donc 2^n coupes.

Capacité d'une coupe

Désignons par $z_i \geq 0$ la capacité d'un arc μ_i , $\forall i \in T$. La capacité d'une coupe aura pour valeur

$$\sum_{i \in \Omega(X)} z_i.$$

Matrice d'incidence arcs-coupes

Soit $\mathcal{C} = \{\Gamma_k \mid \forall k \in K\}$ l'ensemble des coupes du graphe G . On appelle matrice d'incidence arcs-coupes la matrice ayant pour éléments

$$C_l^k = \begin{cases} 1 & \text{si } l \in \Gamma_k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \forall l \in T \quad \text{et} \quad \forall k \in K.$$

La dimension de cette matrice est $(m+2n) \times 2^n$.

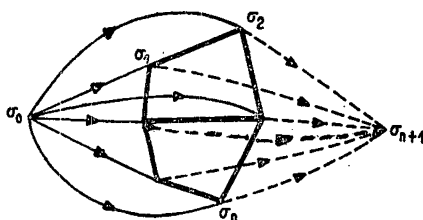


Figure 1.

Graphe G avec, en traits plus épais, les arcs γ_l , $\forall l \in M$.

2. DONNÉES DU PROBLÈME

2.1. Consommation

En chaque sommet du réseau σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$) et pour chaque année t de la période d'étude ($t = 1, 2, \dots, \tau$), on se donne la consommation sous la forme d'une monotone de charge annuelle qui se compose de plusieurs paliers correspondant à différents niveaux de consommation $d_i(t, j)$

($j = 1, 2, \dots, \pi$). On désignera par $l(j)$ ($j = 1, 2, \dots, \pi$) la durée des paliers. $j = 1$ sera l'indice du palier de pointe.

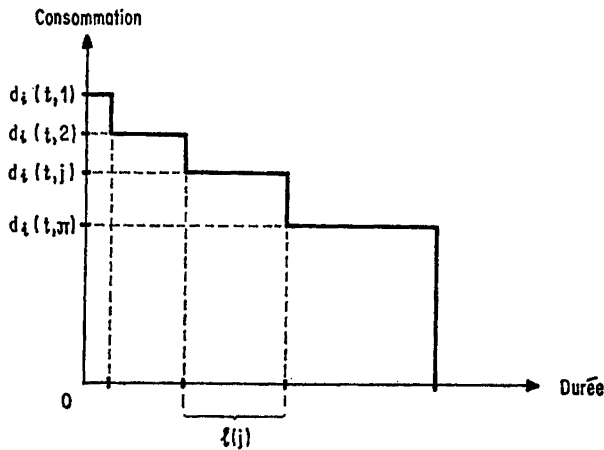


Figure 2.
Monotone de charge de l'année t .

2.2. Production

En chaque sommet du réseau et pour chaque année de la période d'étude, on se donne les caractéristiques des groupes qui composent le parc de production thermique. Chaque groupe est défini par :

- sa puissance maximale;
- son taux d'indisponibilité;
- son coût de production.

Chaque année t de la période d'étude ($t = 1, 2, \dots, \tau$), on envisage un certain nombre de situations d'indisponibilité des groupes thermiques que l'on indicera par $r \in S(t)$ avec $|S(t)| = v$. Une situation d'indisponibilité est définie par la liste des groupes qui sont déclarés en état de marche dans cette situation. Pour décider quels sont les groupes qui sont disponibles ou non, on effectue des tirages au sort selon le taux d'indisponibilité de chacun des groupes ⁽³⁾. Ces tirages au sort permettent de connaître les quantités

$$p_i(t, j, r) \quad [i = 1, 2, \dots, n; t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)].$$

$p_i(t, j, r)$ désigne la puissance maximale que peuvent délivrer les centrales disponibles situées au nœud σ_i , l'année t , et qui fonctionnent pendant la

⁽³⁾ Pour engendrer une situation d'indisponibilité, on affecte à chaque groupe un nombre au hasard pouvant prendre des valeurs uniformément réparties entre 0 et 1. Suivant que ce nombre est supérieur ou inférieur au taux de panne du groupe, celui-ci est déclaré disponible ou indisponible.

durée du palier j , lorsque l'on se trouve dans la situation d'indisponibilité r . Pour calculer $p_i(t, j, r)$, on opère de la manière suivante :

Considérons une année t et un palier j de la monotone de charge annuelle correspondant à l'ensemble des sommets et plaçons-nous, d'autre part, dans la situation d'indisponibilité r . On « empile » les groupes disponibles dans l'ordre des coûts croissants jusqu'à ce que la somme de leurs puissances maximales atteigne ou dépasse le niveau de consommation

$$\omega(t, j) = \sum_{i=1}^n d_i(t, j).$$

Les groupes restants après avoir atteint ce niveau de consommation ne seront pas utilisés pendant la durée du palier j . On obtient ainsi la liste des groupes qui fonctionnent pendant la durée de chacun des paliers, pour chaque année de la période d'étude et dans chaque situation d'indisponibilité. En repérant à quels sommets ces groupes appartiennent, on en déduit les quantités $p_i(t, j, r)$.

REMARQUE : Lorsque la somme des puissances maximales des groupes disponibles est inférieure à la demande, il y a défaillance en production. Tous les groupes disponibles sont alors utilisés.

2.3. Réseau

La topologie du réseau est fixée. On connaît :

- la liste des sommets σ_i ($i = 1, 2, \dots, n$);
- la liste des liaisons γ_l ($l = 1, 2, \dots, m$) susceptibles d'être équipées ou renforcées.

On se donne par ailleurs les capacités de transit des liaisons du réseau à l'instant initial de l'étude

$$x_l(0) \quad (l = 1, 2, \dots, m),$$

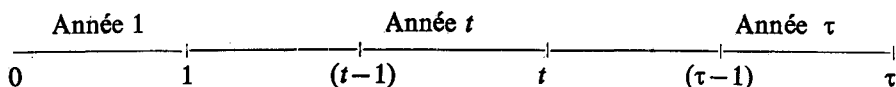
ainsi que la taille maximale de ces liaisons

$$\bar{x}_l \quad (l = 1, 2, \dots, m).$$

3. FORMULATION MATHÉMATIQUE

3.1. Les inconnues du problème

On se propose d'étudier l'évolution du réseau sur une période de τ années. Les instants $(t-1)$ et t seront respectivement le début et la fin de l'année t ($t = 1, 2, \dots, \tau$) :



Le problème consiste à déterminer les capacités de transit des liaisons du réseau aux différents instants de la période d'étude. On désignera par $x_l(t)$ la capacité de transit de la liaison γ_l à l'instant t ($l = 1, 2, \dots, m; t = 1, 2, \dots, \tau$). Ces variables devront vérifier les inégalités

$$x(t) \geq x(t-1) \quad (t = 1, 2, \dots, \tau), \quad (3.1)$$

$$x(\tau) \leq \bar{x}. \quad (3.2)$$

Les inégalités (3.1) expriment que la taille des équipements va en croissant tout au long de la période étudiée (on suppose qu'il n'y a pas de déclassement d'ouvrages). Les inégalités (3.2) signifient que la place réservée pour les couloirs de ligne est limitée en raison de contraintes d'ordre technique ou d'environnement.

3.2. La fonction économique à minimiser

C'est la somme actualisée des coûts d'investissement, de gestion et de défaillance.

3.2.1. Coûts d'investissement

Le cout actualisé des investissements s'exprime par

$$\sum_{t=1}^{\tau} c(t-1) [x(t) - x(t-1)],$$

où $x(t)$ est un vecteur de composantes $\{x_l(t) \mid l = 1, 2, \dots, m\}$, où $c(t)$ est un vecteur de composantes $\{c_l(t) \mid l = 1, 2, \dots, m\}$ et où $x(t) - x(t-1)$ représente le volume des équipements mis en service l'année t . $c_l(t)$ aura pour valeur

$$c_l(t) = \frac{c_l}{(1+\rho)^t} - \frac{w_l(\tau-t)}{(1+\rho)^{\tau}},$$

où c_l est le coût unitaire d'investissement de la liaison γ_l ; ρ , le taux d'actualisation; $w_l(\tau-t)$ le prix d'usage de la liaison γ_l correspondant à un équipement d'âge $(\tau-t)$.

On retranche la valeur d'usage du réseau à la fin de la période d'étude pour tenir compte du fait que les différentes stratégies de renforcement ne conduisent pas toutes au même réseau final. Il faut donc favoriser celles pour lesquelles la valeur d'usage du réseau en fin de période est la plus élevée.

REMARQUE : Dans le cas d'une charge annuelle d'immobilisation constante, le prix d'usage de la liaison γ_l correspondant à un équipement d'âge θ et de durée de vie Θ est donné par la formule classique

$$w_l(\theta) = c_l \frac{(1+\rho)^\Theta - (1+\rho)^\theta}{(1+\rho)^\Theta - 1},$$

en supposant nulle la valeur de l'équipement en fin de vie (cf. par exemple [32]).

3.2.2. Coûts de défaillance

La défaillance dont il sera tenu compte dans la fonction économique est la défaillance due à l'insuffisance des moyens de transport. Le critère choisi pour évaluer cette défaillance sera l'espérance mathématique de l'énergie annuelle non distribuée par manque de puissance installée sur le réseau, les aléas concernés portant sur la disponibilité des groupes thermiques.

Considérons un palier j de la monotone de charge annuelle de l'année t et plaçons-nous dans la situation d'indisponibilité r . Soit $\bar{\alpha}(t, j, r)$ le flot maximal traversant le graphe G de σ_0 à σ_{n+1} lorsque l'on donne à la capacité de chacun des arcs μ_k ($\forall k \in T$) la valeur

$$a_k(t, j, r) = \begin{cases} x_l(t) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc } \gamma_l \quad (l \in M), \\ p_i(t, j, r) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc d'entrée } (0, i) \quad (i \in N), \\ d_i(t, j) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc de sortie } (i, n+1) \quad (i \in N). \end{cases}$$

A ce flot maximal correspond la défaillance

$$\delta(t, j, r) = \omega(t, j) - \bar{\alpha}(t, j, r) \quad (3.3)$$

Désignons par $\delta^0(t, j, r)$ la défaillance due à l'insuffisance des moyens de production, soit :

$$\delta^0(t, j, r) = \text{Max} \left[0, \omega(t, j) - \sum_{i=1}^n p_i(t, j, r) \right].$$

Par définition, la défaillance due à l'insuffisance des moyens de transport est la différence $\delta(t, j, r) - \delta^0(t, j, r)$. Sur le palier 1, nous supposons que ce manque de puissance se traduit par des délestages, tandis que, sur les autres paliers, nous admettrons qu'il entraîne un surcoût d'exploitation (cf. § 3.2. 3). L'énergie non distribuée en raison de l'insuffisance du réseau ne sera donc comptabilisée que sur le palier de pointe. La valeur annuelle de cette énergie sera, par suite, pour l'année t et dans la situation d'indisponibilité r :

$$l(1) [\delta(t, 1, r) - \delta^0(t, 1, r)].$$

L'espérance mathématique de cette quantité peut être estimée en faisant la moyenne

$$\frac{1}{V} \sum_{r \in S(t)} l(1) [\delta(t, 1, r) - \delta^0(t, 1, r)].$$

Cette moyenne sera valorisée au coût unitaire, λ , de l'énergie non distribuée. Il en résulte un coût de défaillance

$$\frac{\lambda}{V} \sum_{r \in S(t)} l(1) [\delta(t, 1, r) - \delta^0(t, 1, r)].$$

On introduira dans la fonction économique la somme actualisée des coûts de défaillance

$$\sum_{t=1}^T \frac{\lambda}{(1+\rho)^t} \frac{1}{V} \sum_{r \in S(t)} l(1) [\delta(t, 1, r) - \delta^0(t, 1, r)].$$

3.2.3. Coûts de gestion

On prendra en compte dans la fonction économique l'espérance mathématique du surcoût d'exploitation annuel dû au manque de puissance installée sur le réseau.

En raison de l'insuffisance du réseau, il peut se faire, principalement aux heures creuses, que la production de certaines centrales ne puisse être évacuée en totalité et que l'on soit obligé, en contre-partie, d'augmenter la puissance délivrée par certains groupes thermiques de coût de production plus élevé. Il en résulte un surcoût d'exploitation que l'on peut définir comme la différence entre le coût d'exploitation effectif compte tenu du réseau et le coût d'exploitation que l'on obtiendrait si les capacités des lignes avaient une valeur infinie.

Ce surcoût d'exploitation ne sera comptabilisé que sur les paliers d'indice $j \geq 2$, puisque, sur le palier de pointe, nous avons supposé que le manque de puissance installée sur le réseau se traduisait uniquement par des délestages. Nous supposons en outre, que la défaillance en production, $\delta^0(t, j, r)$, est nulle pour $j \geq 2$ et quels que soient t et r .

Le classement des groupes dans l'ordre des coûts croissants (cf. § 2.2) a permis de définir la liste des groupes disponibles qui fonctionnent pendant la durée de chacun des paliers de la monotone de charge de l'année t et dans chaque situation d'indisponibilité r . On désignera par :

$\beta^1(t, j, r)$, la moyenne, pondérée par les puissances maximales, des coûts de production des centrales qui sont à l'arrêt pendant la durée du palier j ,

et par $\beta^0(t, j, r)$, la moyenne, pondérée par les puissances maximales, des coûts de production des centrales qui fonctionnent pendant la durée du palier j .

Considérons un palier d'indice $j \geq 2$ et soit $\delta(t, j, r)$ la défaillance définie par (3.3). Cette défaillance est due au fait que certaines liaisons n'ont pas une capacité de transit suffisante pour évacuer la totalité de la production des groupes qui sont en fonctionnement. Nous admettrons qu'elle pourrait être entièrement annulée si l'on utilisait certains des groupes qui sont à l'arrêt. Par ailleurs, si les capacités des liaisons avaient une valeur infinie, la puissance manquante, $\delta(t, j, r)$, pourrait être satisfaite si l'on utilisait certains des groupes qui sont en fonctionnement. En première approximation, nous pouvons donc prendre pour valeur du surcoût d'exploitation sur le palier j :

$$l(j) [\beta^1(t, j, r) - \beta^0(t, j, r)] \delta(t, j, r).$$

L'espérance mathématique de cette quantité peut être estimée en faisant la moyenne

$$\frac{1}{v} \sum_{r \in S(t)} l(j) [\beta^1(t, j, r) - \beta^0(t, j, r)] \delta(t, j, r).$$

On introduira dans la fonction économique la somme actualisée

$$\sum_{t=1}^T \frac{1}{(1+\rho)^t} \sum_{j=2}^{\pi} \frac{1}{v} \sum_{r \in S(t)} l(j) [\beta^1(t, j, r) - \beta^0(t, j, r)] \delta(t, j, r).$$

REMARQUE : 1° Puisque les groupes ont été classés dans l'ordre des coûts croissants, on a

$$\beta^1(t, j, r) \geq \beta^0(t, j, r);$$

2° la formulation du problème, telle qu'elle sera décrite plus loin, ne permet pas d'introduire dans la fonction économique une expression plus exacte du surcoût d'exploitation. Il faudrait pour cela avoir recours à des variables supplémentaires représentant les productions des centrales.

3.2.4. Expression complète de la fonction économique

On doit minimiser

$$\sum_{t=1}^T c(t-1) [x(t) - x(t-1)] + \sum_{t=1}^T \sum_{j=1}^{\pi} \sum_{r \in S(t)} \lambda(t, j, r) \delta(t, j, r),$$

avec

$$\lambda(t, j, r) = \begin{cases} \frac{\lambda l(1)}{v(1+\rho)^t} & \text{si } j = 1, \\ \frac{[\beta^1(t, j, r) - \beta^0(t, j, r)] l(j)}{v(1+\rho)^t} & \text{si } j \geq 2 \end{cases}$$

et où $\delta(t, j, r)$ est la défaillance définie par (3.3).

Nous n'avons pas fait figurer la défaillance en production dans la fonction économique, puisqu'il s'agit d'une constante. D'autre part, il est inutile de prendre en compte les termes $\lambda(t, j, r) \delta(t, j, r)$ tels que $\lambda(t, j, r) = 0$. Dans ce qui suit, nous pourrions donc toujours supposer $\lambda(t, j, r) > 0$, quels que soient t, j, r .

3.3. Formulation complète du problème

D'après le théorème de Ford-Fulkerson [33], $\bar{\alpha}(t, j, r)$ est la capacité minimale d'une coupe du graphe G , lorsque l'on donne à la capacité de chaque arc μ_k ($\forall k \in T$) la valeur

$$a_k(t, j, r) = \begin{cases} x_l(t) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc } \gamma_l \quad (l \in M), \\ p_i(t, j, r) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc d'entrée } (0, i) \quad (i \in N), \\ d_i(t, j) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc de sortie } (i, n+1) \quad (i \in N). \end{cases}$$

On a donc

$$\bar{\alpha}(t, j, r) = \min_{k \in K} \{x(t) C_M^k + a_P(t, j, r) C_P^k + a_Q(t, j, r) C_Q^k\}. \quad (3.4)$$

Le problème à résoudre peut s'énoncer ainsi :

$$\begin{aligned} & \min \sum_{t=1}^{\tau} c(t-1) [x(t) - x(t-1)] \\ & + \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\pi} \sum_{r \in S(t)} \lambda(t, j, r) [\omega(t, j) - \bar{\alpha}(t, j, r)], \end{aligned}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} x(t) & \geq x(t-1) \quad (t = 1, 2, \dots, \tau), \\ x(\tau) & \leq \bar{x}, \end{aligned}$$

et où $\bar{\alpha}(t, j, r)$ est défini par (3.4).

Ce problème est équivalent au programme linéaire PL1 :

$$\begin{aligned} & \min \sum_{t=1}^{\tau} c(t-1) [x(t) - x(t-1)] \\ & + \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\pi} \sum_{r \in S(t)} \lambda(t, j, r) [\omega(t, j) - \alpha(t, j, r)], \end{aligned}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} C'_M x(t) - \alpha(t, j, r) e &\geq f(t, j, r) \\ [t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)], \\ x(t) &\geq x(t-1) \quad (t = 1, 2, \dots, \tau), \\ x(\tau) &\leq \bar{x}, \end{aligned}$$

où $f(t, j, r)$ est défini par

$$f(t, j, r) = -C'_P a_P(t, j, r) - C'_Q a_Q(t, j, r) \quad (3.5)$$

et où e est un vecteur de composantes $e_k = 1$ ($\forall k \in K$).

Pour montrer l'équivalence du problème de départ et de PL1, il suffit de montrer qu'à l'optimum de PL1, on a, quels que soient t, j, r :

$$\hat{\alpha}(t, j, r) = \text{Min}_{k \in K} \{ \hat{x}(t) C_M^k + a_P(t, j, r) C_P^k + a_Q(t, j, r) C_Q^k \}$$

en désignant par

$$\begin{aligned} &\{ \hat{x}(t) (t = 1, 2, \dots, \tau); \hat{\alpha}(t, j, r) \\ &[t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)] \}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

une solution optimale de PL1. En effet, si, pour une valeur particulière des indices t, j, r , soit t^0, j^0, r^0 , on avait

$$\begin{aligned} \hat{\alpha}(t^0, j^0, r^0) &< \alpha^*(t^0, j^0, r^0) \\ &= \text{Min}_{k \in K} \{ \hat{x}(t^0) C_M^k + a_P(t^0, j^0, r^0) C_P^k + a_Q(t^0, j^0, r^0) C_Q^k \}, \end{aligned}$$

on obtiendrait une solution réalisable de PL1 en remplaçant $\hat{\alpha}(t^0, j^0, r^0)$ par $\alpha^*(t^0, j^0, r^0)$ dans (3.6) et cette solution serait meilleure au sens strict que (3.6) puisque nous avons supposé $\lambda(t^0, j^0, r^0) > 0$. (3.6) ne pourrait donc être une solution optimale.

4. MÉTHODE DE RÉOLUTION

On applique la méthode révisée du simplexe au dual (PL2) :

$$\text{Max} \sum_{t=1}^{\tau} \sum_{j=1}^{\pi} \sum_{r \in S(t)} f(t, j, r) y(t, j, r) + x(0) v(0) - \bar{x} v(\tau),$$

sous les contraintes

$$y(t, j, r) \geq 0 \quad [t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)],$$

$$v(t) \geq 0 \quad (t = 0, 1, 2, \dots, \tau),$$

$$\sum_{j=1}^{\pi} \sum_{r \in S(t)} C_M y(t, j, r) + v(t-1) - v(t) = c(t) - c(t-1) \quad (t = 1, 2, \dots, \tau),$$

$$\sum_{k \in K} y_k(t, j, r) = \lambda(t, j, r) \quad [t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)],$$

où $y(t, j, r)$ est un vecteur de composantes $y_k(t, j, r)$ ($\forall k \in K$), $v(t)$ est un vecteur de composantes $v_l(t)$ ($\forall l \in M$) et où l'on a posé $c(\tau) = 0$. On a indiqué sur la figure 3 la structure de la matrice des contraintes lorsque $\tau = 2$, $\pi = 2$, $v = 3$.

Deux difficultés se présentent au cours de la résolution de PL2 par la méthode du simplexe. Elles concernent les points suivants :

1° la recherche de la colonne entrant dans la base : en raison des dimensions du problème, il n'est pas possible d'appliquer la procédure classique utilisée dans la méthode du simplexe ordinaire et qui consiste à énumérer toutes les colonnes de la matrice des contraintes afin de choisir celle dont le coût relatif est le plus grand positif. La nature spéciale de la matrice C (c'est une matrice d'incidence arcs-coupes) permet cependant de remplacer cette procédure par la résolution d'un sous-problème d'optimisation qui, dans le cas particulier de PL2, est un problème de flot maximal. Cette technique est décrite en annexe I;

2° la mise en mémoire de l'inverse de base : la taille de celle-ci rend nécessaire l'utilisation d'une méthode de partitionnement de la matrice de base. Cette méthode, qui n'est autre que la méthode des variables bornées généralisée, est décrite dans l'article [31].

5. PRINCIPAUX RÉSULTATS

Les résultats du modèle sont de deux types :

1° des résultats globaux qui permettent de connaître pour chaque année de la période d'étude :

- le volume total des investissements nécessaires exprimé en mégawatts-kilomètre;
- les capacités de transit en mégawatts des liaisons du réseau;
- la valeur de la défaillance et du surcoût d'exploitation annuels;

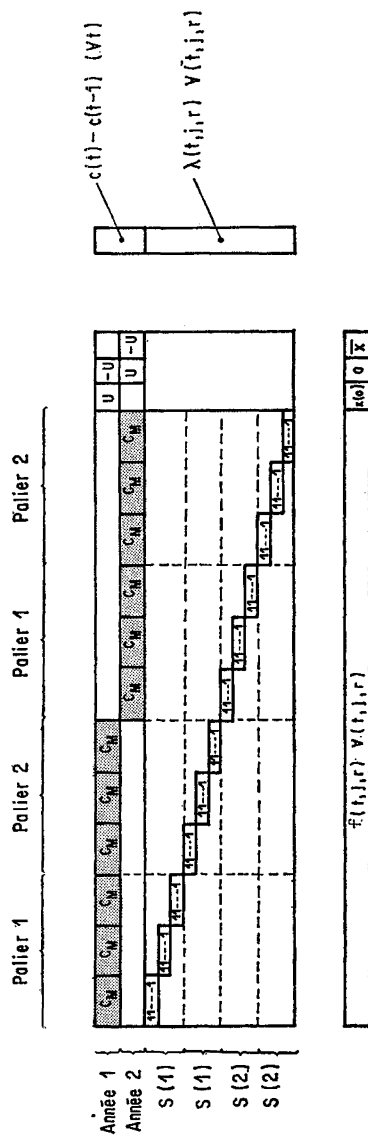


Figure 3. — Matrice des contraintes de PL2.
 U est la matrice unité $m \times m$. La dimension de C_M est $m \times 2^n$.

2° des résultats marginaux qui indiquent pour chaque année de la période d'étude :

- le prix d'usage des liaisons du réseau;
- de combien varie la valeur optimale de la fonction économique lorsque l'on augmente d'une unité :
 - a) la puissance thermique installée en un sommet du réseau,
 - b) la puissance appelée en un sommet du réseau.

En ce qui concerne le résultat a), on distingue entre moyens de pointe (c'est-à-dire, les moyens de production utilisés pendant les heures les plus chargées de l'année) et moyens de base (c'est-à-dire, les moyens de production utilisés en permanence). Le résultat b) est donné pour chacun des paliers de la monotone de charge.

6. EXPÉRIENCES NUMÉRIQUES

Les calculs ont été réalisés sur IBM 370/168. Le modèle a été utilisé :

- d'une part, pour effectuer des études statiques (c'est-à-dire, déterminant un réseau optimal pour une année donnée);
- d'autre part, pour effectuer des études dynamiques (c'est-à-dire, déterminant l'évolution optimale d'un réseau sur une période de plusieurs années).

6.1. Études statiques ($\tau = 1$)

Les dimensions maximales du modèle sont dans ce cas :

- taille maximale du réseau : 50 sommets, 100 liaisons,
- nombre maximal de situations d'indisponibilité :
 - { 100 si la monotone de charge comporte 3 paliers,
 - { 500 si la monotone de charge comporte 1 palier.

Le réseau étudié est le réseau français Très Haute Tension à 400 kV schématisé à 45 sommets et 87 liaisons. Le modèle a permis d'évaluer les besoins de transport et d'interconnexion nécessaires en 1987, 1990 et 1994 pour satisfaire des objectifs de consommation, respectivement, de 420, 500 et 600 TWh ⁽⁴⁾. Le réseau existant était celui décidé en 1980. Les temps de calcul obtenus sont indiqués dans le tableau ci-après.

Lorsque le réseau existant est nul, le temps de calcul est de 35 minutes pour l'étude de l'année 1994 avec $v = 100$ et $\pi = 3$.

(4) 1 TWh = 1 terawatt-heure = 10^9 kilowatts-heure.

N°	Année	v	π	Temps de calcul
1.....	1987	100	3	4 mn 45 s
2.....	1990	100	3	5 mn 47 s
3.....	1994	100	3	7 mn 15 s
4.....	1987	500	1	14 mn 18 s
5.....	1990	500	1	19 mn 30 s
6.....	1994	500	1	24 mn 54 s

6.2. Études dynamiques

Les dimensions maximales du modèle sont dans ce cas :

- taille du réseau : 20 sommets et 40 liaisons;
- durée de l'étude : 5 ans (ou 5 périodes de plusieurs années);
- nombre de situations d'indisponibilité :
 - $\left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ si la monotone de charge comporte 3 paliers,} \\ 500 \text{ si la monotone de charge comporte 1 palier.} \end{array} \right.$

Le réseau étudié est le réseau français Très Haute Tension à 400 kV schématisé à 20 sommets et 38 liaisons. La période d'étude comporte 5 années : 1981 à 1985. Le réseau existant est celui décidé en 1980. Le temps de calcul nécessaire est de :

- $\left\{ \begin{array}{l} 11 \text{ mn } 33 \text{ s avec } v = 100 \text{ et } \pi = 3; \\ 27 \text{ mn } 27 \text{ s avec } v = 500 \text{ et } \pi = 1. \end{array} \right.$

Lorsque le réseau existant est nul, le temps de calcul est de 24 mn 48 s avec $v = 100$ et $\pi = 3$.

7. CONCLUSION

En conclusion, résumons quelles sont les principales caractéristiques du modèle décrit dans cet article :

- il s'agit d'un modèle destiné à la planification à long terme des réseaux de transport d'énergie électrique et dans lequel on a adopté les hypothèses suivantes :

- les variables représentant les investissements sont des variables continues,
- les transits d'énergie obéissent à la première loi de Kirchhoff seulement,
- les seuls aléas pris en compte sont les indisponibilités des groupes de production thermique;

— connaissant l'évolution de la demande, la composition et la localisation du parc de production, il permet de déterminer le volume global des investissements à mettre en service chaque année sur les principaux axes du réseau de telle sorte que la somme actualisée des coûts d'investissements, d'exploitation et de défaillance soit minimale;

— dans le cadre des hypothèses faites, le problème peut être résolu à l'aide des méthodes de la programmation linéaire et, plus spécialement, celles qui permettent de résoudre les problèmes de grande taille à structure particulière : méthode de génération de colonnes; méthode de partitionnement de la matrice de base;

— le modèle permet d'effectuer deux types d'études :

- des études « statiques » pour déterminer le dimensionnement optimal d'un réseau pouvant comporter 50 sommets et 100 liaisons,

- des études « dynamiques » permettant de déterminer l'évolution optimale d'un réseau pouvant comporter 20 sommets et 40 liaisons sur une période de 5 ans;

— les résultats obtenus servent de point de départ à une étude plus détaillée tenant compte de la nature discrète des variables représentant les investissements et dans laquelle le réseau est décrit de manière beaucoup plus précise (nombre de sommets et de lignes plus important, introduction de la deuxième loi de Kirchhoff, prise en compte des indisponibilités des ouvrages de transport). Cette étude est effectuée à l'aide des modèles probabilistes décrits dans [13-17].

ANNEXE I

RECHERCHE DE LA COLONNE ENTRANT DANS LA BASE

Avant d'exposer le principe de la détermination du vecteur entrant dans la base, identifions PL2 au programme linéaire suivant :

$$\text{Max}(f y + g v),$$

sous les contraintes

$$A y + D v = h,$$

$$y, v \geq 0,$$

où y est un vecteur de composantes $y_k(t, j, r)$ [$\forall k \in K; t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)$] et où v est un vecteur de composantes $v_l(t)$ ($\forall l \in M; t = 0, 1, 2, \dots, \tau$).

Désignons :

- par (y^0, v^0) la solution réalisable de base dont on dispose au début de chaque itération;
- par \mathcal{B} la matrice de base correspondant à cette solution;
- par u le vecteur des multiplicateurs du simplexe associés à la base \mathcal{B} et relatifs aux équations

$$\sum_{j=1}^{\pi} \sum_{r \in S(t)} C_M y(t, j, r) + v(t-1) - v(t) = c(t) - c(t-1)$$

$$(t = 1, 2, \dots, \tau);$$

- par $\xi(t, j, r)$ [$t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)$] les multiplicateurs du simplexe associés à la base \mathcal{B} et relatifs aux équations

$$\sum_{k \in K} y_k(t, j, r) = \lambda(t, j, r) \quad [t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)].$$

Nous poserons

$$u = [u(1), u(2), \dots, u(\tau)],$$

où, pour $t = 1, 2, \dots, \tau$, $u(t)$ est un vecteur de composantes $u_i(t)$ ($\forall i \in M$). Les variables $y_k(t, j, r)$ et $v_i(t)$ ont, respectivement, pour coûts relatifs

$$f_k(t, j, r) - u(t) C_M^k - \xi(t, j, r)$$

$$[\forall k \in K; t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)]$$

et

$$\left. \begin{array}{ll} x_i(0) - u_i(1) & \text{pour } t = 0 \text{ et } \forall i \in M, \\ u_i(t) - u_i(t+1) & \text{pour } t = 1, 2, \dots, (\tau-1) \text{ et } \forall i \in M, \\ u_i(\tau) - \bar{x}_i & \text{pour } t = \tau \text{ et } \forall i \in M. \end{array} \right\}$$

L'optimum de PL2 est atteint si :

$$\left. \begin{array}{l} f_k(t, j, r) - u(t) C_M^k - \xi(t, j, r) \leq 0, \\ [\forall k \in K; t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)] \end{array} \right\} \quad (\text{A.I.1})$$

et

$$\left. \begin{array}{ll} x_i(0) - u_i(1) \leq 0 & (\forall i \in M), \\ u_i(t) - u_i(t+1) \leq 0 & [\forall i \in M; t = 1, 2, \dots, (\tau-1)] \\ u_i(\tau) - \bar{x}_i \leq 0 & (\forall i \in M) \end{array} \right\} \quad (\text{A.I.2})$$

Nous supposons remplies les conditions (A.I.2). Si ce n'était pas le cas, l'une des colonnes de la matrice D , correspondant à une variable $v_i(t)$ de

coût relatif positif, devrait être introduite dans la base. Il faudrait ensuite répéter cette opération jusqu'à ce que le coût relatif de chacune des variables $v_i(t)$ soit négatif ou nul.

Supposant remplies les conditions (A.I.2), il reste à vérifier les conditions (A.I.1) afin de savoir si (y^0, v^0) est optimale ou non. Pour cela, on doit calculer, conformément à la règle habituelle du simplexe

$$\text{Max} \{ \psi(t, j, r) \mid t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t) \},$$

où

$$\psi(t, j, r) = \text{Max}_{k \in K} \{ f_k(t, j, r) - u(t) C_M^k - \xi(t, j, r) \}.$$

D'après la relation (3.5), on peut écrire que

$$\begin{aligned} f_k(t, j, r) - u(t) C_M^k - \xi(t, j, r) \\ = -u(t) C_M^k - a_P(t, j, r) C_P^k - a_Q(t, j, r) C_Q^k - \xi(t, j, r) \\ = -z(t, j, r) C^k - \xi(t, j, r), \end{aligned}$$

où $z(t, j, r) = [u(t), a_P(t, j, r), a_Q(t, j, r)]$ est un vecteur de composantes

$$\forall k \in T, \quad z_k(t, j, r) = \begin{cases} u_i(t) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc } \gamma_i \quad (i \in M), \\ p_i(t, j, r) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc d'entrée } (0, i) (i \in N), \\ d_i(t, j) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc de sortie } (i, n+1) (i \in N). \end{cases}$$

(cf. § 3.2.2 pour la définition de $a_P(t, j, r)$ et $a_Q(t, j, r)$).

Par suite

$$\psi(t, j, r) = -\xi(t, j, r) - z(t, j, r) C^{s(t, j, r)},$$

où

$$z(t, j, r) C^{s(t, j, r)} = \text{Min}_{k \in K} z(t, j, r) C^k.$$

Déterminer $\psi(t, j, r)$ est donc équivalent à rechercher une coupe de capacité minimale dans le graphe G , les capacités des arcs étant $z_k(t, j, r)$ ($\forall k \in T$). D'après le théorème de Ford-Fulkerson [33], ceci peut se faire en résolvant un problème de flot maximal. On obtiendra ainsi le vecteur $C^{s(t, j, r)}$.

Deux cas peuvent alors se présenter (cf. remarque ci-dessous) :

Premier cas :

$$\psi(t, j, r) = 0 \quad [t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)].$$

L'optimum de PL2 est atteint : $u(t)$ ($t = 1, 2, \dots, \tau$) est la solution optimale de PL1.

Deuxième cas :

$$\exists (t, j, r): \psi(t, j, r) > 0.$$

On peut introduire dans la base la colonne de la matrice A associée à la variable $y_{s(t, j, r)}(t, j, r)$ de coût relatif $\psi(t, j, r) > 0$.

REMARQUE : On peut montrer que, pour toute valeur de (t, j, r) , l'une des variables $y_k(t, j, r)$ ($\forall k \in K$) est nécessairement de base (cf. annexe II). Soit $q(t, j, r) \in K$ l'indice de cette variable. Puisque son coût relatif est nul, on peut écrire que

$$\begin{aligned} -\xi(t, j, r) &= z(t, j, r) C^{q(t, j, r)} \\ &\geq z(t, j, r) C^{s(t, j, r)} = \min_{k \in K} z(t, j, r) C^k. \end{aligned}$$

D'où $\psi(t, j, r) \geq 0$.

Programme linéaire restreint

Soit X l'ensemble des indices des colonnes de A appartenant à la base \mathcal{B} et soit Y l'ensemble des indices des colonnes de A correspondant aux variables $y_{s(t, j, r)}(t, j, r)$ telles que $\psi(t, j, r) > 0$. Au lieu d'introduire dans la base l'une des colonnes A^j ($\forall j \in Y$), on peut résoudre le programme linéaire restreint

$$\text{Max}(f_E y_E + g v), \quad (\text{PLR})$$

sous les contraintes

$$A^E y_E + D v = h,$$

$$y_E, v \geq 0,$$

ou l'on a posé $E = X \cup Y$. \mathcal{B} sera la base de départ de PLR. La résolution de ce programme linéaire fournira les nouvelles valeurs des multiplicateurs

$$u^* = [u^*(1), u^*(2), \dots, u^*(\tau)]$$

et

$$\xi^*(t, j, r) \quad [t = 1, 2, \dots, \tau; j = 1, 2, \dots, \pi; \forall r \in S(t)].$$

Ces valeurs vérifient les conditions (A.1.2). Il sera alors possible de franchir une nouvelle étape du calcul, à savoir :

a) résoudre $\tau \times \pi \times \nu$ problèmes de flot maximal, en prenant comme capacités des arcs du graphe G , pour $\forall t = 1, 2, \dots, \tau, \forall j = 1, 2, \dots, \pi$ et $\forall r \in S(t)$:

$$\forall k \in T, \quad z_k^*(t, j, r) = \begin{cases} u_l^*(t) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc } \gamma_l \quad (l \in M), \\ p_i(t, j, r) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc d'entrée } (0, i) \quad (i \in N), \\ d_i(t, j) & \text{si l'arc } \mu_k \text{ est un arc de sortie } (i, n+1) \quad (i \in N); \end{cases}$$

b) résoudre, s'il y a lieu, un nouveau programme linéaire restreint.

REMARQUE : Il n'est pas nécessaire de connaître les coefficients f_i ($\forall i \in E$) des variables y_i ($\forall i \in E$) intervenant dans la fonction objectif du programme linéaire restreint. Il suffit en effet de calculer les coûts relatifs de ces variables à chaque itération de la méthode du simplexe. Initialement, ces coûts valent :

$$\forall i \in E: \quad \begin{cases} 0 & \text{si la variable } y_i \text{ est de base,} \\ \psi(t, j, r) > 0 & \text{s'il s'agit d'une variable } y_{s(t, j, r)}(t, j, r) \text{ hors-base.} \end{cases}$$

Aux itérations suivantes, on utilisera les formules classiques de changement de base.

ANNEXE II

MATRICE DE BASE

PL2 peut être identifié au programme linéaire suivant ⁽¹⁾ :

$$\text{Max } \sum_{i=0}^p f(i) y(i), \quad (\text{PL3})$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^p A(i) y(i) &= a, \\ \sum_{k \in K_t} y_k(i) &= b_i \quad (i = 1, 2, \dots, p), \\ y(i) &\geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p) \end{aligned}$$

où $A(i)$ est une matrice indicée par $L \times K_i$; $f(i)$ et $y(i)$ sont des vecteurs indicés par K_i ; a est un vecteur indicé par L ; b est un vecteur indicé par $R = \{1, 2, \dots, p\}$.

⁽¹⁾ Les notations utilisées sont spécifiques à l'annexe II.

	K_1	K_2	K_p	K_o	
L	$A(1)$	$A(2)$	-----	$A(p)$	$A(o)$
	11-----1				
R		11-----1			0
			-----11		
	$f(1)$	$f(2)$	-----	$f(p)$	$f(o)$

a

=

b

Figure 4.

Matrice des contraintes de PL3 et vecteur de la fonction économique.

La matrice des contraintes de PL3 est représentée sur la figure 4. Ce programme linéaire peut encore s'écrire sous la forme équivalente

$$\text{Max} \sum_{i=0}^p f(i) y(i),$$

sous les contraintes

$$\sum_{i=0}^p B(i) y(i) = h$$

$$y(i) \geq 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, p).$$

Une base \mathcal{B} est une matrice régulière formée de colonnes extraites des blocs $B(i)$ ($i = 0, 1, 2, \dots, p$). Dans chaque bloc $B(i)$ ($i \neq 0$), il y a au moins une colonne de base. En effet, si, dans une base \mathcal{B} , il n'y avait aucune colonne du bloc $B(i)$ ($i \neq 0$), la ligne de \mathcal{B} d'indice $i \in R$ serait nulle. Une base \mathcal{B} aura donc la structure suivante :

$\mathcal{B} =$

I	R
B	A
D	<div style="position: relative; height: 100px;"> <div style="position: absolute; top: 0; left: 0;">1</div> <div style="position: absolute; bottom: 0; right: 0;">1</div> <div style="position: absolute; top: 50%; left: 50%; transform: translate(-50%, -50%);">-----</div> </div>

L

R

où B est une matrice indicée par $L \times I$ avec $|I| = |L|$; D , une matrice indicée par $R \times I$; A , une matrice indicée par $L \times R$. D'où:

$$\beta^{-1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} L & R \end{array} \\ \left. \begin{array}{|c|c|} \hline M & -MA \\ \hline -DM & U + DMA \\ \hline \end{array} \right\} \begin{array}{l} I \\ R \end{array} \end{array} \quad (\text{A.II.3})$$

où $M = (B - AD)^{-1}$ et U est la matrice unité $R \times R$.

REFERENCES

1. U. G. W. KNIGHT, *The Logical Design of Electrical Networks Using Linear Programming Methods*, The Institution of Electrical Engineers, Paper n° 3138S, december 1959.
2. H. L. SMITH et R. L. MILLER, *Transmission Planning Program TPP-6*, Report 63-380-Westinghouse Electric Corp., 8 janvier 1964.
3. J. KALTENBACH, J. PESCHON et E. H. GEHRIG, *A Mathematical Optimization Technique for the Expansion of Electric Power Transmission Systems*, I.E.E.E. Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, janvier 1970, p. 113-119.
4. R. H. HENAULT, R. B. EASTYEDT, J. PESCHON et L. P. HAJDU, *Power System Long-Term Planning in the Presence of Uncertainty*, I.E.E.E. Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, janvier 1970, p. 156-164.
5. L. L. GARVER, *Transmission Network Expansion Using Linear Programming*, I.E.E.E. Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-89, septembre-octobre 1970, p. 1688-1697.
6. J. E. PLATTS, R. J. SIGLEY et L. L. GARVER, *A Method for Horizon-Year Transmission Planning*, Conference Paper presented at I.E.E.E. Power Engineering Society Winter Meeting, 1972.
7. R. FISCHL et W. R. PUNTEL, *Computer-aided Design of Electric Power Transmission Networks*, Paper n° C 72-168-8, I.E.E.E. Winter Power Meeting, New York, N. Y., janvier 1972.
8. W. R. PUNTEL, N. D. REPPEN, R. J. RINGLEE, J. E. PLATTS, W. A. RYAN et P. J. SULLIVAN, *An Automated Method for Long-Range Planning of Transmission Networks*, PICA Conf. Proc., juin 1973, p. 38-46.
9. Y. P. DUSONCHET et A. EL-ABIAD, *Transmission Planning Using Discrete Dynamic Optimizing*, I.E.E.E. Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-92, juillet-août 1973, p. 1358-1371.
10. R. N. ADAMS et M. A. LAUGHTON, *Optimal Planning of Power Networks Using Mixed-Integer Programming*, Part I. Static and Time-Phased Network Synthesis, Proc. I.E.E. vol. 121, n° 2, février 1974, p. 139-147.

11. S. Y. LEE, K. L. HICKS et E. HNYILICZA, *Transmission Expansion by Branch-and-Bound Integer Programming with Optimal Cost-Capacity Curves*, I.E.E.E. Trans. on Power Apparatus and Systems, vol. PAS-93, septembre-octobre 1974, p. 1390-1400.
12. Y. ALBOUY, G. JOLY, M. LAUNAY, P. MARTIN, R. CRISTERNA, E. SALINAS, F. SOSAPAVON et C. URDAIBY, *An Integrated Planning Method for Power Systems*, Part I (p. 184-190); Part II. Generation Planning (p. 191-198); Part III. Transmission Planning (p. 199-206), P.I.C.A. Conf. Proc., juin 1975.
13. J. AUGÉ, J. BERGOUNOUX, J. C. DODU et J. POUGET, *Étude Probabiliste d'une Interconnexion en Réseau de Transport (Modèle PERU)*, Rapport C.I.G.R.E., 32-16, 1970.
14. J. AUGÉ, J. BARBEY, J. BERGOUNOUX, J. DE CALBIAC, J. DELPECH et J. POUGET, *Risque de Défaillance et Planification des Réseaux à Très Haute Tension*, Rapport C.I.G.R.E., 32-21, 1972.
15. J. CLADÉ, J. BERGOUNOUX, J. C. GOUQUEIL, G. SANTUCCI et H. CANONGE, *Étude sur la Structure des Réseaux de Transport, d'Interconnexion et de Grande Répartition. Application aux Réseaux Français*, Rapport C.I.G.R.E., 32-01, 1976.
16. J. C. DODU et A. MERLIN, *Une application de la Programmation Linéaire à l'Étude des Réseaux Électriques de Grande Taille*, E.D.F. Bulletin de la Direction des Études et Recherches, série C, n° 1, 1974, p. 29-56.
17. J. C. DODU et A. MERLIN, *Un Modèle d'Estimation des Coûts de Gestion et de Défaillance pour la Planification des Réseaux de Transport d'Électricité. Le Modèle MEXICO*, C.I.G.R.E., Comité 32, Bruxelles, 1975.
18. L. S. LASDON, *Optimization Theory for Large Systems*, The MacMillan Company, New York, 1970, chap. 2 (§ 2.6), chap. 3 et 4.
19. L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *A Suggested Computation for Maximal Multicommodity Network Flows*, Management Science, vol. 5 n° 1, Octobre 1958, p. 97-101.
20. J. A. TOMLIN, *Minimum Cost Multicommodity Network Flows*, Operations Research, vol. 14, n° 1, janvier-février 1966, p. 45-51.
21. M. R. RAO et S. ZIONTS, *Allocation of Transportation Units to Alternative Trips, A Column Generation Scheme with Out-of-Kilter Subproblems*, Operations Research, vol. 16, n° 1, janvier-février 1968, p. 52-63.
22. B. FOX, *Finding Minimal Cost Time Ratio Circuits*, Operations Research, vol. 17, n° 3, mai-juin 1969, p. 546-551.
23. P. C. GILMORE et R. E. GOMORY, *A Linear Programming Approach to the Cutting Stock Problem*, Operations Research, vol. 9, n° 6, novembre-décembre 1961, p. 849-859.
24. P. C. GILMORE et R. E. GOMORY, *A Linear Programming Approach to the Cutting-Stock Problem*, Part II, Operations Research, vol. 11, n° 6, novembre-décembre 1963, p. 863-888.
25. P. C. GILMORE et R. E. GOMORY, *Multistage Cutting-Stock Problems of Two and More Dimensions*, Operations Research, vol. 13, n° 1, janvier-février 1965, p. 94-120.
26. S. E. ELMAGHRABY, *A Loading Problem in Process Type Production*, Operations Research, vol. 16, n° 5, septembre-octobre 1968, p. 902-914.
27. G. B. DANTZIG et P. WOLFE, *Decomposition Principle for Linear Programs*, Operations Research, vol. 8, n° 1, janvier-février 1960, p. 101-111.

28. R. E. GOMORY et T. C. HU, *An Application of Generalized Linear Programming to Network Flows*, Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, vol. 10, n° 2, juin 1962, p. 260-283.
29. J. C. DODU, *Modèle d'optimisation à long terme d'un réseau de transport*, Bulletin de la Direction des Études et Recherches, Électricité de France, série C, n° 2, 1975, p. 43-56.
30. J. C. DODU, *Optimisation d'un réseau de répartition d'énergie électrique*, Bulletin de la Direction des Études et Recherches, Électricité de France, série C, n° 1, 1972, p. 51-64.
31. G. B. DANTZIG et R. M. VAN SLYKE, *Generalized Upper Bounding Techniques*, Journal of Computer and System Sciences, vol. 1, n° 3, octobre 1967, p. 213-226.
32. M. BORTEUX, *Valeur d'usage et Charges d'Immobilisation des Ouvrages de Distribution*, Note E.D.F. Études Économiques Générales, 30 décembre 1960.
33. L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *Flows in Networks*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1962, p. 11.
34. D. SJELVGREN, *Application of Mathematical Programming to Electric Power System Expansion Planning* (chap. 4), Department of Electric Power Systems Engineering, The Royal Institute of Technology, Stockholm, 1976.