RAIRO. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

JEAN BARREAU

Relation entre le taux de rentabilité interne des investissements et le taux de rendement comptable

RAIRO. Recherche opérationnelle, tome 12, nº 1 (1978), p. 15-40
<http://www.numdam.org/item?id=RO_1978__12_1_15_0>

R.A.I.R.O. Recherche opérationnelle/Operations Research
(vol. 12, n° 1, février 1978, p. 15 à 40)

RELATION ENTRE LE TAUX DE RENTABILITÉ INTERNE DES INVESTISSEMENTS ET LE TAUX DE RENDEMENT COMPTABLE (*)

par Jean BARREAU ([1])

Résumé. — *Le taux de rentabilité interne et le taux de rendement comptable sont deux critères financiers courants. Mais leur définition et leur utilisation sont très différentes. Aussi ont-ils toujours été réputés étrangers l'un à l'autre. Or, la réalité est tout autre. Il existe, en effet, une relation précise entre ces deux critères. L'existence de cette relation a été démontrée dans le cas d'un investissement, aussi bien que dans le cas d'un ensemble d'investissements. Le taux de rentabilité interne est une moyenne arithmétique pondérée des taux de rendement comptable. Cette relation est susceptible d'apporter une contribution nouvelle aux problèmes d'évaluation des entreprises et d'estimation du taux de rendement global de celles-ci.*

INTRODUCTION

Le taux de rentabilité interne est assez couramment utilisé en matière de décision d'investissement [8]. On a recours à ce critère pour apprécier, *ex ante*, la validité des projets d'investissement et opérer, le cas échéant, la sélection de ceux qui sont les plus rentables.

Mais, une fois la décision prise, on mesure les résultats obtenus, année après année, à l'aide d'un autre critère : le taux de rendement des capitaux ou taux de rendement comptable.

Pour un investissement donné, il existe, en général, autant de taux de rendement comptable qu'il y a d'années dans la vie de cet investissement. Sauf cas particulier, ces taux sont variables; ils dépendent du système d'amortissement pratiqué et, naturellement, des résultats successifs.

Le taux de rentabilité interne d'un projet est unique. (Il peut exister toutefois des projets à taux de rentabilité interne multiples, mais ces projets sont tout à fait exceptionnels) [8].

De par leur définition même, taux de rendement comptable et taux de rentabilité interne apparaissent, *a priori*, comme étrangers l'un à l'autre.

Or, nous montrerons qu'il existe, entre eux, *contrairement à ce qu'on pense habituellement*, une relation précise.

Cette relation peut, dans de nombreux cas particuliers, se transformer en « relation fonctionnelle » entre le taux de rentabilité interne et l'un quelconque des taux de rendement comptable.

(*) Reçu novembre 1976, révisé avril 1977.

([1]) Université Paris-XIII.

Respectant la démarche classique qui va du particulier au général, nous envisagerons les problèmes évoqués ci-dessus, d'abord dans le cas d'un investissement unique, puis dans le cas d'un ensemble d'investissements.

L'investissement unique nous permettra de faire intervenir les divers systèmes d'amortissement, associés à des cash-flow dont on supposera connue la loi de variation. Enfin, l'ensemble d'investissements constituera une approche de la réalité, c'est-à-dire de l'entreprise.

PREMIÈRE PARTIE

NOTIONS GÉNÉRALES

1. La notion d'investissement

On admet généralement que l'investissement est un engagement de capital qui provoque une modification des flux de trésorerie dont la durée excède celle de l'exercice comptable.

Un investissement est complètement déterminé dès lors que sont connus :

- le montant du capital investi;
- la durée de vie;
- les flux de trésorerie associés.

1.1. *Le capital investi*

Pour déterminer correctement le capital investi, il y a lieu de prendre en considération non seulement le coût d'acquisition (ou de construction) de l'immobilisation, T.V.A. déduite, mais également tous les frais accessoires de mise en place, ainsi que les variations du fonds de roulement induites par cette immobilisation [6].

1.2. *La durée de vie*

Habituellement, on considère que la durée de vie d'une immobilisation coïncide avec la durée d'amortissement. En réalité, cette durée de vie est une variable aléatoire dont la loi de probabilité peut être plus ou moins facilement déterminée. En effet, il existe des investissements nouveaux pour lesquels on ne peut faire référence à aucune expérience; il existe également des investissements dont la durée de vie est liée à celle d'un produit. Toutefois, dans ce qui suit, nous admettrons que durée de vie et durée d'amortissement coïncident exactement [1].

1.3. *Les flux de trésorerie*

Il s'agit des recettes R (inflow of cash) et des dépenses D (outflow of cash) engendrées par l'investissement. Du point de vue financier, on s'intéresse surtout à la différence $R-D$, appelée généralement : *cash-flow*.

Selon que l'on tient compte ou non des impôts, il s'agit d'un cash-flow net ou brut. Les cash-flow sur lesquels nous raisonnerons seront des cash-flow bruts.

Le cash-flow ainsi utilisé correspond, fondamentalement, à l'amortissement comptable augmenté du bénéfice comptable avant impôt. Notons, toutefois, que l'évaluation du rendement d'un investissement doit être faite de manière intrinsèque, c'est-à-dire en dehors de toute considération de financement. C'est pourquoi, le cas échéant, on devra rajouter au bénéfice comptable, avant impôt, les intérêts payés sur capitaux empruntés.

Par ailleurs, il faut observer :

– qu'en matière de décision d'investissement, la série des cash-flow est déterminée *ex ante*; elle résulte de prévisions faites sur les coûts, les prix de vente, les quantités écoulées, etc. Aucun de ces éléments ne peut être évalué de façon certaine; il en résulte que la série des cash-flow est elle-même affectée par l'incertitude [2];

– qu'il existe des investissements ne procurant aucune recette supplémentaire, mais permettant seulement de réduire les coûts;

– qu'à la fin de sa vie, un investissement peut avoir une certaine valeur résiduelle; celle-ci doit alors être prise en compte dans les calculs financiers.

1.4. *Représentation schématique d'un investissement*

Nous adopterons une représentation schématique faisant intervenir le temps, le capital investi, la série des cash-flow et, si elle existe, la valeur résiduelle :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 1 & & 2 & & n \\ \vert & \text{———} & \vert & \text{———} & \vert & \text{——— – – – – – ———} & \vert \\ I & & C_1 & & C_2 & & C_n+R \end{array}$$

I, capital investi;

C_i, cash-flow relatif à l'année i;

R, valeur résiduelle.

1.5. *Observation*

Théoriquement, tout projet d'investissement comporte plusieurs variantes. Cela signifie qu'on a envisagé différentes manières, incompatibles entre elles, de le réaliser [9]. Il en résulte que le choix d'un projet d'investissement par oui ou par non est un cas rare; la procédure de choix doit, en effet, intégrer les diverses variantes de chaque projet. Toutefois, dans ce qui suit, nous parlerons de « projet d'investissement » ou « d'investissement » sans autre précision : il faudra comprendre que nous nous attachons à l'une des variantes du projet considéré.

2. Taux de rentabilité interne d'un investissement

2.1. *Définition*

Soit un investissement I, engagé globalement à l'époque 0, dont la durée de vie est n et auquel on peut associer n cash-flow conformément au schéma ci-dessous.

Valeur résiduelle R :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & & n-1 & n \\ I & C_1 & C_2 & C_3 & \cdots & C_{n-1} & C_n+R \end{array}$$

On appelle taux de rentabilité interne de l'investissement, le taux x pour lequel il y a équivalence, à l'époque 0, entre le capital investi I et la somme des cash-flow et de la valeur résiduelle, actualisés au taux x [10]

$$\boxed{I = \sum_{p=1}^{n} C_p(1+x)^{-p}+R(1+x)^{-n}.}$$

Cas général

Le cas général est celui où l'investissement est échelonné sur plusieurs périodes, suivi par des cash-flow également échelonnés. Le principe de la détermination du taux de rentabilité reste le même. Toutefois, il est clair que les dépenses d'investissement doivent aussi faire l'objet d'une actualisation. Cette actualisation devrait être faite, en principe, à un taux égal au coût du capital; pratiquement, on utilise le taux de rentabilité interne de l'investissement [14].

2.2. *Interprétation du taux de rentabilité interne d'un investissement*

Pour certains auteurs, cette interprétation n'est pas évidente : « ... En conclusion, on pourra retenir que la signification économique du critère du taux de rentabilité interne n'apparaît pas nettement... nous n'avons pas réussi à donner une signification économique précise au critère du taux de rentabilité interne... le critère du taux de rentabilité interne souffre, à notre avis, d'un manque de signification économique bien nette... » [9, 5].

Par ailleurs, l'idée selon laquelle la méthode du taux interne de rentabilité suppose que les cash-flow sont réinvestis à ce taux est assez répandue. Sans doute assimile-t-on, abusivement, investissement et placement à intérêts composés [13].

En réalité, nous estimons que l'interprétation correcte du taux de rentabilité interne est la suivante :

Le taux de rentabilité interne est le taux auquel fonctionnerait un compte courant, au débit duquel serait inscrit le montant du capital investi, les cash-flow successifs étant inscrits au crédit, le « retrait » du dernier cash-flow *soldant* le compte. La démonstration de cette proposition résulte de l'examen d'un tel compte.

Dates	Débit	Crédit	Soldes (débiteurs) : S_i
0	I		
1		C_1	$S_1 = I(1+x) - C_1$
2		C_2	$S_2 = I(1+x)^2 - C_1(1+x) - C_2$
3		C_3	$S_3 = I(1+x)^3 - C_1(1+x)^2 - C_2(1+x) - C_3$
4		⋮	
⋮			
p		C_p	$S_p = I(1+x)^p - C_1(1+x)^{p-1} - C_2(1+x)^{p-2} \ldots - C_{p-1}(1+x) - C_p$
⋮		⋮	
n		C_n	$S_n = I(1+x)^n - C_1(1+x)^{n-1} - C_2(1+x)^{n-2} \ldots - C_{n-1}(1+x) - C_n$

Puisque le « retrait » du dernier cash-flow solde le compte on a $S_n = 0$, soit :

$$I(1+x)^n - C_1(1+x)^{n-1} - C_2(1+x)^{n-2} - \ldots - C_{n-1}(1+x) - C_n = 0$$

ou

$$I(1+x)^n = C_1(1+x)^{n-1} + C_2(1+x)^{n-2} + \ldots + C_{n-1}(1+x) + C_n$$

et, en multipliant par $(1+x)^{-n}$:

$$I = C_1(1+x)^{-1} + C_2(1+x)^{-2} + \ldots + C_n(1+x)^{-n}$$

$$\boxed{I = \sum_1^n C_p (1+x)^{-p}}$$ expression qui définit le taux de rentabilité interne.

3. La rentabilité comptable d'un projet d'investissement (ou taux de rendement comptable) [11]

Le rendement comptable d'un investissement s'appréciera année après année, en faisant le rapport du résultat comptable au capital investi [12].

Pour une année donnée (p), le résultat comptable avant impôt est obtenu en retranchant du cash-flow brut le montant de l'amortissement comptable. L'impôt sur les bénéfices a une incidence considérable. En effet, pour l'année p, on a :

– résultat brut :

$$R_p = C_p - A_p;$$

– résultat net d'impôt [2] :

$$R'_p = \frac{C_p - A_p}{2} = \frac{R_p}{2}.$$

Si le capital investi doit être emprunté, le résultat comptable brut devra s'entendre : intérêts de l'emprunt non déduits. En effet, la rentabilité d'un investissement ne saurait dépendre du mode de financement.

Par capital investi au cours de l'année p, on doit comprendre : *Valeur comptable nette au début* de l'année p [3].

Dans la suite de nos développements, nous ne prendrons en considération que le résultat comptable brut (R_p). D'une part, le raisonnement sera plus général, puisque le taux de l'impôt sur les sociétés peut varier et, d'autre part, il est très facile de transposer en termes de résultat net les calculs obtenus en termes de résultat brut.

Pour une année quelconque p, nous utiliserons donc les symboles et relations suivants :

0	1	$p-1$	p	n
I	I_1	I_{p-1}	I_p	

– résultat comptable brut de l'année p : R_p;

– capital investi au début de l'année p : I_{p-1} (ou valeur nette comptable de l'investissement au début de l'année p);

– taux de rendement comptable de l'année p : t_p.

D'où la relation :

$$\boxed{t_p = \frac{R_p}{I_{p-1}}.}$$

4. Observations sur la structure des annuités de remboursement d'un emprunt et la structure des cash-flow d'un investissement

Considérons un emprunt V, contracté au taux x et remboursable par n annuités

0	1	2	n
V	$Vx + A_1$	$V_1 x + A_2$	$V_{n-1} x + A_n$

Chaque annuité comprend :

– un intérêt, calculé au taux x, sur le capital restant dû au début de la période considérée;

[2] Taux de l'I.S. : 50 %.

[3] D'autres interprétations sont possibles; elles ne seront pas examinées ici.

– un amortissement « financier ».

Il est très important de remarquer que, dans le cas d'un emprunt, *le taux d'intérêt étant donné*, il existe deux situations possibles :

– la loi des amortissements est donnée et elle *détermine* la loi des annuités.

Par exemple, si les amortissements sont constants, les annuités sont en progression arithmétique décroissante de raison $-Vx$.

– la loi des annuités est donnée et c'est la loi des amortissements qui en découle.

Par exemple, si les annuités sont constantes, les amortissements sont en progression géométrique croissante de raison $(1+x)$.

Considérons maintenant un investissement I, comportant n cash-flow et dont la valeur résiduelle est nulle :

0	1	2	3	…	n
I	C_1	C_2	C_3	…	C_n

Le taux de rentabilité interne de cet investissement est donné par la relation :

$$I = \sum_{p=1}^{n} C_p(1+x)^{-n}.$$

On peut assimiler cet investissement à un emprunt de montant I et dont les annuités de remboursement seraient les cash-flow $C_1, C_2 \ldots C_n$.

Mais les cash-flow ont été déterminés à partir de prévisions faites sur les recettes et les dépenses associées à l'investissement, c'est-à-dire, *en dehors de toute considération de taux et de loi des amortissements.*

Les amortissements contenus dans les cash-flow sont les amortissements comptables : *ils ne dépendent pas des cash-flow*, mais du seul système d'amortissement utilisé (système linéaire ou système dégressif).

Par conséquent, dans un problème d'investissement, les *cash-flow* et les *amortissements* sont *donnés*. Ils *déterminent donc la loi de variation des taux de rendement comptable année par année.*

Montrons-le sur un exemple. Soit un investissement I, de durée n, dont les *cash-flow sont constants*. Le système d'amortissement pratiqué est le système linéaire (*les amortissements sont* donc *constants*).

Désignons par :

t_p, le taux de rendement comptable relatif à l'époque p;

I_{p-1}, la valeur nette comptable de l'investissement au début de l'époque p.

On peut établir le schéma suivant :

0	1	2	3	…	p	$p+1$	n
I	It_1+A_1	$I_1t_2+A_2$	$I_2t_3+A_3$	…	$I_{p-1}t_p+A_p$	$I_pt_{p+1}+A_{p+1}$	

avec $A_1 = A_2 = \ldots = A_n = I/n$.

Considérons deux cash-flow consécutifs quelconques, de rang p et $p+1$, on peut écrire :

$$I_{p-1}\, t_p + A_p = I_p\, t_{p+1} + A_{p+1}$$

ou

$$I_{p-1}\, t_p = I_p\, t_{p+1} \left(\text{puisque } A_p = A_{p+1} = \frac{I}{n} \right). \tag{1}$$

D'autre part, on a

$$I_1 = I - \frac{I}{n} = \frac{n-1}{n} I,$$

$$I_2 = I - \frac{2I}{n} = \frac{n-2}{n} I,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$I_p = I - \frac{p}{n} I = \frac{n-p}{n} I,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

La relation (1) devient alors :

$$\frac{n-(p-1)}{n} I\, t_p = \frac{n-p}{n} I\, t_{p+1}$$

ou

$$\boxed{t_{p+1} = \frac{n-p+1}{n-p} t_p.}$$

Conclusion. — Pour tout investissement dont on connaît la loi de variation des cash-flow et la loi de variation des amortissements comptables, il est possible de déterminer la loi de variation des taux de rendement comptable. Cette propriété nous permettra ultérieurement d'établir une relation entre le taux de rentabilité interne et les taux de rendement comptable.

DEUXIÈME PARTIE

TAUX DE RENTABILITÉ INTERNE ET TAUX DE RENDEMENT COMPTABLE DANS L'HYPOTHÈSE D'UN PROJET UNIQUE

1. Cas général

Le cas général est celui pour lequel les cash-flow du projet d'investissement considéré sont quelconques : ils sont variables d'une année à l'autre, mais leur évolution ne suit aucune loi simple.

NOTATIONS :

I_0, capital investi à l'instant 0 (début de l'époque 1);

I_1, valeur comptable nette de l'investissement à l'instant 1 (début de l'époque 2);

I_2, valeur comptable nette de l'investissement à l'instant 2 (début de l'époque 3);

...

I_p, valeur comptable nette de l'investissement à l'instant p (début de l'époque $p+1$);

...

I_{n-1}, valeur comptable nette de l'investissement à l'instant $n-1$ (début de l'époque n);

I_n, valeur comptable nette de l'investissement à l'instant n. Cette valeur est nulle puisque l'investissement est alors complètement amorti :

$$I_n = 0;$$

$C_1, C_2, C_3 \ldots C_n$, cash-flow successifs;

$A_1, A_2, A_3 \ldots A_n$, amortissements comptables;

$R_1 = C_1 - A_1$, $R_2 = C_2 - A_2 \ldots$, résultats comptables;

$I_0 - A_1 = I_1$;

$I_1 - A_2 = I_2$;

....

$I_p - A_{p+1} = I_{p+1}$;

....

x, taux de rentabilité interne.

HYPOTHÈSE : Valeur résiduelle nulle.

1.1. *Recherche de la relation*

Nous savons que le taux de rentabilité interne peut être considéré comme étant le taux auquel fonctionnerait un compte-courant, au débit duquel serait porté le capital I (à l'instant 0), les cash-flow successifs étant portés au crédit (aux instants 1, 2, ..., n) et le solde du compte, à l'instant n, étant nul.

Schématisons un tel compte-courant et explicitons les soldes successifs, en tenant compte des notations et relations ci-dessus.

Époques	Mouvements de capitaux		Soldes (débiteurs)
	Débit	Crédit	
0	I_0		I_0
1		C_1	$I_0(1+x)-C_1 = I_0x+\underbrace{I_0-A_1}-R_1$ $= \boxed{I_0x+I_1-R_1}$
2		C_2	$I_0x(1+x)+I_1(1+x)-R_1(1+x)-C_2$ $= I_0x(1+x)+I_1x+I_1-R_1(1+x)-A_2-R_2$ $= \boxed{I_0x(1+x)+I_1x+I_2-R_1(1+x)-R_2}$
3 ⋮		C_3 ⋮	$I_0x(1+x)^2+I_1x(1+x)+I_2(1+x)$ $-R_1(1+x)^2-R_2(1+x)-C_3$ $= \boxed{\begin{array}{l} I_0x(1+x)^2+I_1x(1+x)+I_2x \\ +I_3-R_1(1+x)^2-R_2(1+x)-R_3 \end{array}}$
p ⋮		C_p ⋮	$I_0x(1+x)^{p-1}+I_1x(1+x)^{p-2}+\ldots+I_{p-1}(1+x)$ $-R_1(1+x)^{p-1}-R_2(1+x)^{p-2}-\ldots$ $-R_{p-1}(1+x)-C_p$ $= \boxed{\begin{array}{l} I_0x(1+x)^{p-1}+I_1x(1+x)^{p-2}+\ldots+I_p \\ -R_1(1+x)^{p-1}-R_2(1+x)^{p-2}-\ldots-R_p \end{array}}$
n		C_n	$\boxed{\begin{array}{l} I_0x(1+x)^{n-1}+I_1x(1+x)^{n-2}+\ldots \\ +I_{n-1}x+\underbrace{I_n}_{=0}-R_1(1+x)^{n-1}-R_2(1+x)^{n-2} \\ -R_3(1+x)^{n-3}-\ldots-R_n=0 \end{array}}$

A l'instant n, le solde peut donc s'écrire :

$$\begin{aligned} &I_0\,x(1+x)^{n-1}+I_1\,x(1+x)^{n-2}+\ldots+I_{n-1}\,x \\ &\quad = R_1(1+x)^{n-1}+R_2(1+x)^{n-2}+\ldots+R_n. \end{aligned}$$

Multiplions les deux membres de cette égalité par $(1+x)^{-n}$:

$$\begin{aligned} &I_0\,x(1+x)^{-1}+I_1\,x(1+x)^{-2}+\ldots+I_{n-1}\,x(1+x)^{-n} \\ &\quad = R_1(1+x)^{-1}+R_2(1+x)^{-2}+\ldots+R_n(1+x)^{-n}. \end{aligned}$$

Par ailleurs, si t_1, t_2, ... t_n sont les taux de rendement comptable successifs :

$$t_1=\frac{R_1}{I_0}\rightarrow R_1=I_0\,t_1,$$

$$t_2=\frac{R_2}{I_1}\rightarrow R_2=I_1\,t_2,$$

....

$$t_n=\frac{R_n}{I_{n-1}}\rightarrow R_n=I_{n-1}\,t_n.$$

D'où :

$$\boxed{\begin{aligned} &I_0\,x(1+x)^{-1}+I_1\,x(1+x)^{-2}+\ldots+I_{n-1}\,x(1+x)^{-n} \\ &\quad = I_0(1+x)^{-1}\,t_1+I_1(1+x)^{-2}\,t_2+I_2(1+x)^{-3}\,t_3+\ldots+I_{n-1}(1+x)^{-n}\,t_n. \end{aligned}}$$

Première interprétation : La relation ci-dessus montre qu'il y a équivalence, au taux x, entre ce que nous pourrions appeler les « résultats économiques » dont l'expression générale est $I_p\,x$ et les résultats comptables dont l'expression générale est $I_p\,t_{p+1}=R_p$.

Représentons schématiquement ces deux séquences de résultats :

0	1	2		n
	R_1	R_2		R_n

0	1	2		n
	$I\,x$	$I_1\,x$		$I_{n-1}\,x$

L'équivalence, au taux x et à l'époque 0, de ces deux ensembles de résultats peut aussi s'écrire :

$$x\sum_1^n I_{p-1}(1+x)^{-p}=\sum_1^n R_p(1+x)^{-p}=\sum_1^n I_{p-1}\,t_p(1+x)^{-p}$$

ou

$$(1) \quad \boxed{x = \frac{\sum_{1}^{n} R_p (1+x)^{-p}}{\sum_{1}^{n} I_{p-1} (1+x)^{-p}}} \qquad (2) \quad \boxed{x = \frac{\sum_{1}^{n} I_{p-1} (1+x)^{-p} t_p}{\sum_{1}^{n} I_{p-1} (1+x)^{-p}}}$$

Deuxième interprétation : Le taux de rentabilité interne x est la moyenne arithmétique pondérée des taux de rendement comptable. Les coefficients de pondération sont les valeurs actuelles, calculées au taux x et à l'époque 0, *des valeurs comptables nettes correspondantes* [4].

Exemple numérique : Soit un investissement de montant 90 000 F amortissable linéairement en 3 ans. Dans le tableau ci-dessous ont été regroupées les informations caractéristiques.

Années (1)	Valeur nette comptable au début de l'année (2)	Cash-flow (3)	Amortissement (4)	Résultat comptable (5) = (3) - (4)	Taux de rendement comptable (6) = (5) : (2)
1	90 000	34 500	30 000	4 500	0,05
2	60 000	37 200	30 000	7 200	0,12
3	30 000	32 400	30 000	2 400	0,08

Le taux de rentabilité interne de cet investissement est donné par la relation :

$$90\,000 = 34\,500(1+x)^{-1} + 37\,200(1+x)^{-2} + 32\,400(1+x)^{-3}$$

soit

$$x = 0{,}077\,248.$$

Montrons que x est bien la moyenne arithmétique pondérée des taux de rendement comptable. Pour cela, il faut vérifier la relation :

$$0{,}077\,248 = \frac{90\,000 \times 0{,}05 + 60\,000(1{,}077\,248)^{-1} \times 0{,}12 + 30\,000(1{,}077\,248)^{-2} \times 0{,}08}{90\,000 + 60\,000(1{,}077\,248)^{-1} + 30\,000(1{,}077\,248)^{-2}}.$$

Calcul de la valeur de la fraction :

— Numérateur :

$90\,000 \times 0{,}05$	4 500
$60\,000\,(1{,}077\,248)^{-1} \times 0{,}12$	6 683,70
$30\,000\,(1{,}077\,248)^{-2} \times 0{,}08$	2 068,14
	13 251,84

– Dénominateur :

90 000	90 000
$60\,000\,(1{,}077\,248)^{-1}$	55 697,48
$30\,000\,(1{,}077\,248)^{-2}$	25 851,74
	171 549,22

Résultat :

$$\frac{13\,251{,}84}{171\,549{,}22} = 0{,}077\,248.$$

Nous trouvons effectivement la valeur de x.

Ainsi se trouve mis en évidence le lien qui existe entre le taux de rentabilité interne et les résultats comptables. Or, ce lien n'est pas toujours admis. C'est ainsi qu'on a écrit : « Le taux de rentabilité ne remplit même plus son rôle de mesure de la rémunération du capital. *On serait en effet bien en peine d'établir sa relation avec les dividendes distribués* » [16]. Il nous paraît donc important d'insister sur la réalité de cette relation qui caractérise la dépendance existant entre les résultats comptables, les valeurs nettes comptables de l'investissement et son taux de rentabilité interne. Les formules (1) et (2) pourraient, d'ailleurs, constituer un moyen de calcul de x différent du moyen traditionnel.

2. Cas particulier

La loi de variation des cash-flow est connue

Nous allons supposer que deux cash-flow successifs quelconques, de rang $(p-1)$ et p, sont liés par la relation :

$$C_p = k\,C_{p-1} + r,$$

k et r sont deux constantes

$$k \in \mathbf{N}^* \qquad \text{et} \qquad r \in \mathbf{Z}.$$

Cette loi de variation permet d'intégrer les trois hypothèses suivantes :

– cash-flow constants : $k = 1$, $r = 0$;

– cash-flow en progression arithmétique : $k = 1$; $r \neq 0$;

– cash-flow en progression géométrique : $k \neq 1$; $r = 0$.

Avec la loi de variation des cash-flow, il faut également prendre en considération le système d'amortissement pratiqué. Il aurait été possible d'envisager une loi générale des amortissements comparable à celle des cash-flow, mais les calculs auraient été très complexes. Nous avons donc préféré, dans le cadre de cet article, limiter notre étude au cas des amortissements linéaires.

Nous allons démontrer qu'il est possible d'exprimer, dans le cas envisagé, l'un quelconque des taux de rendement comptable en fonction du taux de rentabilité interne. La démonstration comportera trois étapes :

– détermination du taux de rentabilité interne;
– établissement de la loi de variation des taux de rendement comptable;
– établissement de la relation cherchée.

a) *Détermination du taux de rentabilité interne*

Le taux de rentabilité interne est donné par la formule :

$$I = \sum_1^n C_p (1+x)^{-p}.$$

Exprimé en fonction de C_1, le cash-flow C_p s'écrit [4] :

$$C_p = k^{p-1} C_1 + r \frac{k^{p-1}-1}{k-1}.$$

D'où

$$I = C_1 \sum_1^n k^{p-1}(1+x)^{-p} + r \sum_1^n \frac{k^{p-1}-1}{k-1}(1+x)^{-p}.$$

En effectuant, on obtient [5] :

$$I = C_1 \frac{k^n (1+x)^{-n} - 1}{k-(1+x)} + \frac{r}{k-1}\left[\frac{k^n(1+x)^{-n}-1}{k-(1+x)} - \frac{1-(1+x)^{-n}}{x}\right]. \qquad (1)$$

b) *Loi de variation des taux de rendement comptable*

Nous savons que le cash-flow est égal à l'amortissement augmenté du bénéfice d'exploitation. Ce dernier est lui-même égal au produit de la valeur nette comptable de l'investissement au début de la période considérée par le taux de rendement comptable relatif à cette période.

Nous avons donc :

$$C_p = \frac{I}{n} + \frac{n-p+1}{n} I t_p$$

et

$$C_{p+1} = \frac{I}{n} + \frac{n-p}{n} I t_{p+1}.$$

Or

$$C_{p+1} = k C_p + r,$$

---

(4) *Voir* annexe mathématique A.

(5) *Voir* annexe mathématique B.

d'où

$$\frac{I}{n}+\frac{n-p}{n}I\,t_{p+1}=k\frac{I}{n}+k\frac{n-p+1}{n}I\,t_p+r,$$

ou

$$t_{p+1}=k\frac{n-p+1}{n-p}t_p+\frac{1}{n-p}\left(k-1+\frac{nr}{I}\right).$$

Cette relation étant générale, il est possible d'exprimer un taux de rendement comptable quelconque t_p en fonction du premier t_1, On obtient [6] :

$$t_p=k^{p-1}\frac{n}{n-p+}t_1+\frac{I(k-1)+nr}{I(n-p+1)}\,\frac{k^{p-1}-1}{k-1}. \qquad (2)$$

c) *Relation entre t_p et x*

Le premier cash-flow permet d'exprimer t_1 en fonction de C et de I,

$$C_1=\frac{I}{n}+I\,t_1, \qquad t_1=\frac{C_1}{I}-\frac{1}{n}.$$

Portons cette valeur de t_1 dans l'équation (2) :

$$t_p=k^{p-1}\frac{n}{n-p+1}\left(\frac{C_1}{I}-\frac{1}{n}\right)+\frac{I(k-1)+nr}{I(n-p+1)}\,\frac{k^{p-1}-1}{k-1}. \qquad (3)$$

Par ailleurs, de la relation (1) on tire :

$$\begin{aligned}\frac{C_1}{I}=&\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1}\\&-\frac{r}{I(k-1)}\,\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1}\left[\frac{k^n(1+x)^{-n}-1}{k-(1+x)}-\frac{1-(1+x)^{-n}}{x}\right],\end{aligned}$$

$$\frac{C_1}{I}=\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1}+\frac{r}{I(k-1)}\left[\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1}\,\frac{1-(1+x)^{-n}}{x}-1\right].$$

Remplaçons, dans la relation (3), C_1/I par la valeur trouvée :

$$\boxed{\begin{aligned}t_p=&k^{p-1}\frac{n}{n-p+1}\\&\times\left[\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1}+\frac{r}{I(k-1)}\left(\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}}\,\frac{1-(1+x)^{-n}}{x}-1\right)-\frac{1}{n}\right]\\&+\frac{I(k-1)+nr}{I(n-p+1)}\,\frac{k^{p-1}-1}{k-1}.\end{aligned}}$$

---

[6] *Voir* annexe mathématique C.

Ainsi, la démonstration est faite qu'il est possible d'exprimer, pour une période quelconque, le taux de rendement comptable relatif à cette période en fonction du taux de rentabilité interne.

Nous allons, maintenant, examiner comment se traduit la fonction ci-dessus, dans les cas simples suivants :

— *cash-flow constants :*

Il faut remplacer k par 1 et r par zéro. On obtient (7) :

$$\boxed{t_p = \frac{n}{n-p+1}\left[\frac{x}{1-(1+x)^{-n}} - \frac{1}{n}\right];}$$

— *cash-flow en progression arithmétique* (8) *:*

$$k = 1; \qquad r \neq 0,$$

$$\boxed{t_p = \frac{n}{n-p+1}\left[\frac{x}{1-(1+x)^{-n}}\left(1+\frac{nr}{Ix}\right) - \frac{r}{Ix} - \frac{1}{n} - \frac{(n-p+1)r}{I}\right];}$$

— *cash-flow en progression géométrique :*

$$k \neq 1; \qquad r = 0,$$

$$t_p = k^{p-1}\frac{n}{n-p+1}\left[\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1} - \frac{1}{n}\right] + \frac{I(k-1)}{I(n-p+1)}\,\frac{k^{p-1}-1}{k-1},$$

$$t_p = k^{p-1}\frac{n}{n-p+1}\left[\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n\,k^{p-1}}\right],$$

$$t_p = k^{p-1}\frac{n}{n-p+1}\left[\frac{k-(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1} - \frac{1}{nk^{p-1}}\right],$$

$$\boxed{t_p = \frac{n}{n-p+1}\left[\frac{k^p-k^{p-1}(1+x)}{k^n(1+x)^{-n}-1} - \frac{1}{n}\right].}$$

Conclusion : Dans le cas d'un investissement unique, il existe une relation générale très importante entre le taux interne de rentabilité (x) et les taux de rendement comptable (t_p) :

x est la moyenne arithmétique pondérée des t_p (9).

(7) Pour $k = 1$ et $r = 0$, il y a indétermination. Pour lever celle-ci, il y a lieu de reprendre les calculs au niveau de l'annexe mathématique B.

(8) Même remarque concernant l'indétermination.

(9) Cela est vrai si $t_p = R_p/I_{p-1}$; d'une façon plus générale, il existe une relation d'équivalence entre les termes de la forme $I_p\, x$ et $I_p\, t_{p+1}$.

De plus, chaque fois que la loi des cash-flow est connue, il est possible d'exprimer le taux de rendement comptable d'un exercice quelconque en fonction du taux de rentabilité interne. La relation correspondante est d'autant plus complexe que le système d'amortissement ou la loi de variation des cash-flow sont plus compliqués.

Il reste maintenant à élargir le champ de nos investigations en examinant l'hypothèse d'un ensemble d'investissements.

TROISIÈME PARTIE

RELATION ENTRE LE TAUX DE RENTABILITÉ INTERNE D'UN ENSEMBLE D'INVESTISSEMENTS ET LES TAUX DE RENDEMENT COMPTABLE

1. Recherche de la relation

Pour simplifier la démonstration nous ne prendrons en considération que deux investissements dont les caractéristiques sont données ci-dessous :

– premier investissement :

- capital investi, I_{10};
- date de réalisation, 0;
- durée de vie, 3 ans;
- cash-flow successifs, C_{11}, C_{12}, C_{13};
- valeurs résiduelles successives, I_{10}, I_{11}, I_{12};
- amortissements successifs, A_{11}, A_{12}, A_{13};
- résultats comptables successifs, R_{11}, R_{12}, R_{13};
- relations entre les éléments ci-dessus :

$$C_{11} = A_{11} + R_{11}; \qquad C_{12} = A_{12} + R_{12}; \qquad C_{13} = A_{13} + R_{13};$$

$$I_{10} - A_{11} = I_{11}; \qquad I_{11} - A_{12} = I_{12}; \qquad I_{12} - A_{13} = 0;$$

– deuxième investissements :

- capital investi, I_{21};
- date de réalisation, 1;
- durée de vie, 4 ans;
- cash-flow successifs, C_{22}, C_{23}, C_{24}, C_{25};
- valeurs résiduelles successives, I_{21}, I_{22}, I_{23}, I_{24};
- amortissements successifs, A_{22}, A_{23}, A_{24}, A_{25};
- résultats comptables successifs, R_{22}, R_{23}, R_{24}, R_{25};
- relations entre les éléments ci-dessus :

$$C_{22} = A_{22} + R_{22}; \qquad C_{23} = A_{23} + R_{23}; \ \ldots$$

$$I_{21} - A_{22} = I_{22}; \qquad I_{22} - A_{23} = I_{23}; \ \ldots$$

Schématiquement, les deux investissements peuvent se représenter ainsi :

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ I_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ & I_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} \end{array}$$

(les valeurs résiduelles sont nulles).

Désignons par x, le taux de rentabilité interne de l'ensemble I_{10} et I_{21}. Nous définirons x comme étant le taux pour lequel il y a équivalence entre les capitaux investis et la série des cash-flow. En nous plaçant à l'époque 0, nous aurons

$$\begin{aligned} I_{10}+I_{21}(1+x)^{-1} = {} & C_{11}(1+x)^{-1}+(C_{12}+C_{22})(1+x)^{-2} \\ & +(C_{13}+C_{23})(1+x)^{-3}+C_{24}(1+x)^{-4}+C_{25}(1+x)^{-5}. \end{aligned}$$

Montrons maintenant que x est le taux auquel fonctionnerait un compte courant au débit duquel seraient portés les capitaux investis, les cash-flow étant portés au crédit et le solde s'annulant au moment où est réalisée la dernière opération.

Dates	Capitaux D	Capitaux C	Soldes
0	I_{10}		I_{10}
1	I_{21}	C_{11}	$I_{10}(1+x)+I_{21}-C_{11}$
2		$C_{12}+C_{22}$	$I_{10}(1+x)^2+I_{21}(1+x)-C_{11}(1+x)-(C_{12}+C_{22})$
3		$C_{13}+C_{23}$	$I_{10}(1+x)^3+I_{21}(1+x)^2-C_{11}(1+x)^2-(C_{12}+C_{22})(1+x)-(C_{13}+C_{23})$
4		C_{24}	$I_{10}(1+x)^4+I_{21}(1+x)^3-C_{11}(1+x)^3-(C_{12}+C_{22})(1+x)^2-(C_{13}+C_{23})(1+x)-C_{24}$
5		C_{25}	$I_{10}(1+x)^5+I_{21}(1+x)^4-C_{11}(1+x)^4-(C_{12}+C_{22})(1+x)^3-(C_{13}+C_{23})(1+x)^2-C_{24}(1+x)-C_{25}=0$

En multipliant le dernier solde par $(1+x)^{-5}$ et en faisant passer les cash-flow dans le deuxième membre de l'égalité, nous obtenons :

$$\begin{aligned} I_{10}+I_{21}(1+x)^{-1} = {} & C_{11}(1+x)^{-1}+(C_{12}+C_{22})(1+x)^{-2} \\ & +(C_{13}+C_{23})(1+x)^{-3}+C_{24}(1+x)^{-4}+C_{25}(1+x)^{-5} \end{aligned}$$

qui est bien la relation définissant x.

Nous sommes donc fondés à utiliser le compte courant pour établir la relation existant entre x et les taux de rendement comptable. Mais, cette fois, les soldes seront plus détaillés et cela, en utilisant les relations données au début de ce chapitre.

Dates	Capitaux		Soldes
	D	C	
0	I_{10}		I_{10}
1	I_{21}	C_{11}	$I_{10}(1+x)+I_{21}-C_{11} = I_{10}+I_{10}x+I_{21}-A_{11}-R_{11} = \underline{\underline{I_{10}x+I_{11}+I_{21}-R_{11}}}$
2		$C_{12}+C_{22}$	$I_{10}x(1+x)+I_{11}(1+x)+I_{21}(1+x)-C_{12}-C_{22}-R_{11}(1+x) =$ $\underline{\underline{I_{10}x(1+x)+I_{11}x+I_{12}+I_{21}x+I_{22}-R_{11}(1+x)-R_{12}-R_{22}}}$
3		$C_{13}+C_{23}$	$I_{10}x(1+x)^2+I_{11}x(1+x)+I_{12}(1+x)+I_{21}x(1+x)+I_{22}(1+x)-R_{11}(1+x)^2-R_{12}(1+x)-R_{22}(1+x)-C_{13}-C_{23} =$ $\underline{\underline{I_{10}x(1+x)^2+I_{11}x(1+x)+I_{12}x+I_{21}x(1+x)+I_{22}x+I_{23}-R_{11}(1+x)^2-R_{12}(1+x)-R_{13}-R_{22}(1+x)-R_{23}}}$
4		C_{24}	$I_{10}x(1+x)^3+I_{11}x(1+x)^2+I_{12}x(1+x)+I_{21}x(1+x)^2+I_{22}x(1+x)+I_{23}(1+x)-R_{11}(1+x)^3-R_{12}(1+x)^2-R_{13}(1+x)$ $-R_{22}(1+x)^2-R_{23}(1+x)-C_{24} =$ $\underline{\underline{I_{10}x(1+x)^3+I_{11}x(1+x)^2+I_{12}x(1+x)+I_{21}x(1+x)^2+I_{22}x(1+x)+I_{23}x+I_{24}-R_{11}(1+x)^3-R_{12}(1+x)^2}}$ $\underline{\underline{-R_{13}(1+x)-R_{22}(1+x)^2-R_{23}(1+x)-R_{24}}}$
5		C_{25}	$\underline{\underline{I_{10}x(1+x)^4+I_{11}x(1+x)^3+I_{12}x(1+x)^2+I_{21}x(1+x)^3+I_{22}x(1+x)^2+I_{23}x(1+x)+I_{24}x-R_{11}(1+x)^4-R_{12}(1+x)^3}}$ $\underline{\underline{-R_{13}(1+x)^2-R_{22}(1+x)^3-R_{23}(1+x)^2-R_{24}(1+x)-R_{25}}} = 0$

Le solde à l'époque 5 peut s'écrire :

$$I_{10}\,x(1+x)^4+(I_{11}+I_{21})\,x(1+x)^3+(I_{12}+I_{22})\,x(1+x)^2+I_{23}\,x(1+x)+I_{24}\,x$$
$$= R_{11}(1+x)^4+(R_{12}+R_{22})(1+x)^3+(R_{13}+R_{23})(1+x)^2+R_{24}(1+x)+R_{25}.$$

Or, les quantités :

I_{10}, $(I_{11}+I_{21})$, $(I_{12}+I_{22})$ ... sont les valeurs comptables nettes des investissements, respectivement au début des époques 1, 2, 3 ...
tandis que les quantités :

R_{11}, $(R_{12}+R_{22})$, $(R_{13}+R_{23})$ ... sont les résultats comptables des exercices 1, 2, 3 ...
par conséquent, si t_1, t_2, t_3 ... sont les rendements comptables, on a

$$I_{10}\,x(1+x)^4+(I_{11}+I_{21})\,x(1+x)^3+\ldots I_{24}\,x$$
$$= I_{10}(1+x)^4\,t_1+(I_{11}+I_{21})(1+x)^3\,t_2+\ldots+I_{24}\,t_5.$$

Multiplions par $(1+x)^{-4}$:

$$I_{10}x+(I_{11}+I_{21})x(1+x)^{-1}+\ldots+I_{24}x(1+x)^{-4}$$
$$=I_{10}t_1+(I_{11}+I_{21})(1+x)^{-1}t_2+\ldots+I_{24}(1+x)^{-4}t_5$$

ou

$$x=\frac{I_{10}t_1+(I_{11}+I_{21})(1+x)^{-1}t_2+\ldots+I_{24}(1+x)^{-4}t_5}{I_{10}+(I_{11}+I_{20})(1+x)^{-4}+\ldots+I_{24}(1+x)^{-4}}.$$

Nous constatons que x est la moyenne arithmétique pondérée des taux de rendement comptable; les coefficients de pondération étant les valeurs actuelles, calculées à l'époque 0 et au taux x, des valeurs comptables nettes des investissements. Autrement dit, nous retrouvons la propriété établie dans le cas d'un projet unique.

2. Généralisation de la formule

Nous allons généraliser la formule précédente en considérant sur une période de n années, un ensemble de s investissements distincts.

Nous désignerons par I_{ij} la valeur comptable nette du i-ième investissement à l'instant j :

$$i\in\{1, 2, \quad 3\ldots s\},$$
$$j\in\{0, 1, 2, 3\ldots(n-1)\}.$$

Concrétisons à l'aide du schéma suivant (dans lequel certains I_{ij} peuvent être nuls) :

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & 1 & 2 & 3 & & & n-1 & n \\
\hline
I_{10} & I_{11} & I_{12} & I_{13} & & & I_{1n-1} & \\
I_{20} & I_{21} & I_{22} & I_{23} & & & I_{2n-1} & \\
I_{30} & I_{31} & I_{32} & I_{33} & & & I_{3n-1} & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots & \\
I_{s0} & I_{s1} & I_{s2} & I_{s3} & & & I_{sn-1} & \\
\hline
\sum_{i=1}^{s} I_{i0} & \sum_{i=1}^{s} I_{i1} & \sum_{i=1}^{s} I_{i2} & \sum_{i=1}^{s} I_{i3} & & & \sum_{i=1}^{s} I_{in-1} &
\end{array}$$

La propriété précédemment établie permet d'écrire :

$$\boxed{x=\frac{\sum_{i=1}^{s} I_{i0}t_1+\sum_{i=1}^{s} I_{i1}(1+x)^{-1}t_2+\ldots+\sum_{i=1}^{s} I_{in-1}(1+x)^{-(n-1)}t_n}{\sum_{i=1}^{s} I_{i0}+\sum_{i=1}^{s} I_{i1}(1+x)^{-1}+\ldots+\sum_{i=1}^{s} I_{in-1}(1+x)^{-(n-1)}}.} \qquad (1)$$

Cette formule peut se simplifier en utilisant le double signe $\sum$:

$$\boxed{x = \frac{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{n-1} I_{ij}(1+x)^{-j} t_{j+1}}{\sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{n-1} I_{ij}(1+x)^{-j}}.} \qquad (2)$$

Exemple numérique :

Nous allons traiter un exemple très simple. Soient deux investissements I_1 et I_2.

I_1 est réalisé à l'époque 0; durée de vie 4 ans; amortissement linéaire.

I_2 est réalisé à l'époque 1; durée de vie 3 ans; amortissement linéaire.

Les autres caractéristiques sont données dans le tableau ci-après :

Années (1)	Valeur compt. nette de I_1 au début de l'année (2)	Valeur compt. nette de I_2 au début de l'année (3)	Valeur compt. nette de $I_1 + I_2$ au début de l'année (4) = (2) + (3)	Cash-flow de I_1 (5)	Cash-flow de I_2 (6)	Cash-flow de $I_1 + I_2$ (7) = (5) + (6)	Amortissement de I_1 (8)	Amortissement de I_2 (9)	Amortissement de $I_2 + I_1$ (10) = (8) + (9)	Résultat comptable (11) = (7) − (10)	Taux (12) = (11)/(4)
1....	100	—	100	30	—	30	25	—	25	5	0,05
2....	75	90	165	36	35.5	71,5	25	30	55	16,5	0,10
3....	50	60	110	37	40	77	25	30	55	22	0,20
4....	25	30	55	35	36,5	71,5	25	30	55	16,5	0,30

Calcul de x, taux de rentabilité interne de l'ensemble des deux investissements : x est solution de l'équation :

$$100+90(1+x)^{-1} = 30(1+x)^{-1}+71{,}5(1+x)^{-2}+77(1+x)^{-3}+71{,}5(1+x)^{-4},$$

soit

$$x = 0{,}130\,329.$$

Vérifions maintenant qu'on a bien la relation :

$$x=\frac{\{100\times 0{,}05+(75+90)(1+x)^{-1}\,0{,}1+(50+60)(1+x)^{-2}\,0{,}2+(25+30)(1+x)^{-3}\,0{,}3\}}{100+(75+90)(1+x)^{-1}+(50+60)(1+x)^{-2}+(25+30)(1+x)^{-3}}.$$

Le calcul de la valeur de la fraction donne

$$\frac{5+14{,}597\,51+17{,}219\,17+11{,}425\,31}{100+145{,}975\,1+86{,}095\,8+38{,}084\,4}=\frac{48{,}241\,99}{370{,}155\,3}=\underline{0{,}130\,329\,0}$$

qui est bien la valeur de x.

4. Application à l'entreprise

Il est intéressant d'observer que la formule (2), page 29, pourrait constituer un moyen, relativement simple, d'évaluation du taux de rentabilité interne d'une entreprise. En effet, tous les éléments de cette formule peuvent être trouvés dans les documents comptables et, en particulier, dans les bilans.

Mais, il faut bien reconnaître qu'une telle évaluation du taux de rentabilité interne de l'entreprise est, *en général*, impossible. En effet, pour que le résultat puisse être obtenu, il faudrait que l'entreprise soit arrivée au terme de son existence, c'est-à-dire que soit connue sa durée de vie. Cette restriction enlève une grande part de la valeur « pratique » de notre formule.

Toutefois, dans le cas où il s'agirait d'une entreprise de courte durée dont on désirerait connaître le taux de rentabilité interne, la formule pourrait alors s'appliquer et devrait donner, *sous réserve des variations de la valeur de l'unité monétaire*, un résultat acceptable.

Par ailleurs, il serait également possible de résoudre le problème suivant : quelle doit être la valeur de vente de l'entreprise, à l'époque n, pour que le taux global de rentabilité interne soit égal à x [3]?

Si V est cette valeur et si l'on utilise la relation (2), on a l'équation :

$$x\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{n-1}I_{ij}(1+x)^{-j}=\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{n-1}I_{ij}(1+x)^{-j}t_{j+1}+V(1+x)^{-(n-1)}.$$

En effet, V peut être considérée comme étant le solde du compte courant l'époque n.

Cette équation donne :

$$V=(1+x)^{n-1}\left[x\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{n-1}(1+x)^{-j}-\sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{n-1}I_{ij}(1+x)^{-j}t_{j+1}\right].$$

CONCLUSION

La découverte de la relation liant le taux de rentabilité interne et le taux de rendement comptable apporte un démenti formel à l'idée très répandue selon laquelle ces deux critères sont étrangers l'un à l'autre. En outre, il est probable que cette relation enrichira certains aspects de la gestion des entreprises.

En particulier, si l'objectif des plans d'investissement est de maximiser le taux de rentabilité interne [7], il faut bien voir également, qu'à court terme, le taux de rendement comptable est une préoccupation essentielle des dirigeants d'entreprise. Très souvent ces deux objectifs ne sont pas compatibles. L'établissement d'un compromis, notamment par l'utilisation de la programmation linéaire, n'a pas, jusqu'ici, donné de résultats très satisfaisants. Dans ce domaine, nous pensons qu'une nouvelle voie de recherche est désormais ouverte [15].

ANNEXE MATHÉMATIQUE

A. Expression du cash-flow de rang p (C_p) en fonction du premier (C_1)

La relation générale :

$$C_p = k\,C_{p-1} + r$$

permet d'écrire :

$$C_1 = C_1;$$

$$C_2 = k\,C_1 + r,$$

$$C_3 = k^2\,C_1 + kr + r;$$

$$C_4 = k^3\,C_1 + k^2\,r + kr + r;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$C_p = k^{p-1}\,C_1 + k^{p-2}\,r + k^{p-3}\,r + \ldots + kr + r,$$

ou

$$C_p = k^{p-1}\,C_1 + r(k^{p-2} + k^{p-3} + \ldots + k + 1);$$

$$\boxed{C_p = k^{p-1}\,C_1 + r\,\frac{k^{p-1}-1}{k-1}.}$$

B. Développement de la formule :

$$I = C_1 \sum_1^n k^{p-1}(1+x)^{-p} + r \sum_1^n \frac{k^{p-1}-1}{k-1}(1+x)^{-p}$$

– Le premier terme du second membre : $C_1 \sum_1^n k^{p-1} (1+x)^{-p}$ s'écrit :

$$C_1 (1+x)^{-1} + C_1 k(1+x)^{-2} + C_1 k^2 (1+x)^{-3} + \ldots + C_1 k^{n-1} (1+x)^{-n}$$

$$= C_1 (1+x)^{-1} \frac{k^n (1+x)^{-n} - 1}{k(1+x)^{-1} - 1} = C_1 \frac{k^n (1+x)^{-n} - 1}{k-(1+x)}.$$

– Le second terme : $r \sum_1^n (k^{p-1} - 1)/(k-1)\,(1+x)^{+p}$ s'écrit :

$$\frac{r}{k-1} [(k-1)(1+x)^{-2} + (k^2-1)(1+x)^{-3} + \ldots + (k^{n-1}-1)(1+x)^{-n}]$$

$$= \frac{r}{k-1} [k(1+x)^{-2} + k^2 (1+x)^{-3} + \ldots + k^{n-1}(1+x)^{-n}$$
$$-(1+x)^{-2} - (1+x)^{-3} + \ldots + (1+x)^{-n}]$$

$$= \frac{r}{k-1}\left[k(1+x)^{-2} \frac{k^{n-1}(1+x)^{-(n-1)} - 1}{k(1+x)^{-1} - 1} - (1+x)^{-2} \frac{(1+x)^{-(n-1)} - 1}{(1+x)^{-1} - 1}\right]$$

$$= \frac{r}{k-1}\left[\frac{k^n (1+x)^{-n} - k(1+x)^{-1}}{k-(1+x)} - \frac{(1+x)^{-n} - (1+x)^{-1}}{1-(1+x)}\right]$$

$$= \frac{r}{k-1}\left[\frac{k^n (1+x)^{-n} -- \;-k(1+x)^{-1} + 1}{k-(1+x)} - \frac{(1+x)^{-n} - 1 - (1+x)^{-1} + 1}{1-(1+x)}\right]$$

$$= \frac{r}{k-1}\left[\frac{k^n (1+x)^{-n} -- 1}{k-(1+x)} - (1+x)^{-1} - \frac{(1+x)^{-n} - 1}{1-(1+x)} + (1+x)^{-1}\right]$$

$$= \frac{r}{k-1}\left[\frac{k^n (1+x)^{-n} -- 1}{k-(1+x)} - \frac{(1+x)^{-n} - i}{1-(1+x)}\right]$$

En définitive, on a donc :

$$\boxed{I = C_1 \frac{k^n (1+x)^{-n} - 1}{k-(1+x)} + \frac{r}{k-}\left[\frac{k^n (1+x)^{-n} - 1}{k-(1+x)} - \frac{1-(1+x)^{-n}}{x}\right]}$$

C. Expression de t_p en fonction de t_1

Dans la relation :

$$t_{p+1} = k \frac{n-p+1}{n-p} t_p + \frac{1}{n-p}\left(k - 1 + \frac{nr}{I}\right),$$

la quantité $k-1+(nr/I)$ est constante. Pour simplifier les écritures nous l'identifierons à la lettre M :

$$t_{p+1} = k \frac{n-p+1}{n-p} t_p + \frac{M}{n-p}.$$

Nous avons successivement :

$$t_2 = k\frac{n}{n-1}t_1 + \frac{M}{n-1};$$

$$t_3 = k\frac{n-1}{n-2}t_2 + \frac{M}{n-2} = k^2\frac{n}{n-2}t_1 + \frac{M}{n-2}(k+1);$$

$$t_4 = k\frac{n-2}{n-3}t_3 + \frac{M}{n-3} = k^3\frac{n}{n-3} + \frac{k(k+1)}{n-3}M + \frac{M}{n-3};$$

$$t_4 = k^3\frac{n}{n-3}t_1 + \frac{M}{n-3}(k^2+k+1);$$

$$t_5 = k^4\frac{n}{n-4}t_1 + \frac{M}{n-4}(k^3+k^2+k+1);$$

. . . .

$$t_p = k^{p-1}\frac{n}{n-p+1}t_1 + \frac{M}{n-p+1}(k^{p-2}+k^{p-3}+\ldots+k+1);$$

$$t_p = k^{p-1}\frac{n}{n-p+1}t_1 + \frac{M}{n-p+1}\,\frac{k^{p-1}-1}{k-1}.$$

Ou, en remplaçant M par sa valeur :

$$\boxed{t_p = k^{p-1}\frac{n}{n-p+1}t_1 + \frac{I(k-1)+nr}{I(n-p+1)}\,\frac{k^{p-1}-1}{k-1}.}$$

BIBLIOGRAPHIE

1. J. M. Agostini, *Le choix des investissements*, Dunod, Paris, 1972.
2. Aubert-Krier, Rio et Vailhen, *Gestion de l'entreprise*, P.U.F., Paris, 1971.
3. Bierman et Smidt, *La préparation des décisions financières dans l'entreprise*, Dunod, Paris, 1968.
4. M. Capet, *Comptabilité, diagnostic et décision*, P.U.F., Paris, 1976.
5. Colasse, *La rentabilité, analyse, prévision et contrôle*, Dunod, Paris, 1973.
6. Conso, *La gestion financière de l'entreprise*, Dunod, Paris, 1975.
7. Depallens, *Gestion financière de l'entreprise*, Sirey, 1970.
8. Gremillet, *Sélection et contrôle des investissements*, Éditions d'organisation, 1972.
9. Holl, Plas et Riou, *Les choix d'investissement dans l'entreprise*, P.U.F., Paris, 1973.
10. Masse, *Le choix des investissements*, Dunod, Paris, 1968.

11. Ordre des Experts comptables, *La rentabilité dans l'entreprise*, Conseil supérieur de l'ordre des Experts comptables, 1969.
12. PEROCHON, *La technique comptable moderne*, Foucher, 1967.
13. PEUMANS, *Théorie et pratique des calculs d'investissements*, Dunod, Paris, 1965.
14. PORTERFIELD, *Coût du capital et choix des investissements*, Dunod, Paris, 1969.
15. ROBICHEK, *Recherche financière et décisions de gestion*, Entreprise moderne d'édition, 1969.
16. SCHNEIDER, *Le choix des investissements dans l'entreprise*, Revue économique, nº 2, mars 1969.