

M.-C. RUBINSTEIN

J.-P. LUDOT

**Application de la théorie des graphes au choix  
des investissements à court terme dans un  
réseau électrique sujet à avaries**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 10, n° V3 (1976), p. 27-42

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1976\\_\\_10\\_3\\_27\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1976__10_3_27_0)

© AFCET, 1976, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## APPLICATION DE LA THÉORIE DES GRAPHS AU CHOIX DES INVESTISSEMENTS A COURT TERME DANS UN RÉSEAU ÉLECTRIQUE SUJET A AVARIES (\*)

par M.-C. RUBINSTEIN <sup>(1)</sup> et J.-P. LUDOT <sup>(2)</sup>

---

**Résumé.** — *L'objet de cet article est de présenter une méthode de résolution par ordinateur du problème concret d'investissements à court terme (5 ans environ) dans les réseaux électriques. Cette méthode opérationnelle depuis déjà 4 à 5 ans, permet de réaliser des économies estimées à 10 % sur les investissements MT; or ces investissements MT étaient de l'ordre de 170 millions de francs pour toute la France en 1974.*

*Ce type de problème se formule naturellement comme un modèle de programmation mathématique, mais sa résolution se heurte à plusieurs difficultés, qui tiennent essentiellement à la nature discrète des variables décisionnelles, au caractère fortement combinatoire du problème et, surtout, à la grande dimension des réseaux à étudier.*

*L'idée de base de la méthode consiste à déterminer les investissements qui correspondent à l'optimum dynamique <sup>(3)</sup>, ou à défaut, si le problème est de taille trop importante, à une solution satisfaisante, en ne traitant qu'un nombre restreint et connu de problèmes statiques.*

*Pour chaque année  $t$  nous déterminons l'ensemble  $S^t$  des solutions réalisables; puis, connaissant les divers ensembles  $S^t$  pour les années successives, nous recherchons le chemin optimal qui conduit à l'optimum dynamique pour la période d'étude.*

### INTRODUCTION

La recherche de méthodes de planification pour les investissements dans les réseaux électriques est un sujet qui, depuis de nombreuses années, retient de plus en plus l'attention des électriciens. On en trouve la cause principale dans l'importance des investissements nécessaires pour satisfaire une demande en perpétuelle expansion.

Les réseaux électriques classés en plusieurs catégories selon le niveau de tension, sont interconnectés; un modèle idéal devrait prendre en compte tous les niveaux de tension et tous les points de transformation. Ceci est évidemment impossible, aussi découple-t-on les réseaux par niveau de tension.

Notre travail se rapporte aux réseaux de distribution urbains MT et, par voie de conséquence, aux liaisons et transformation qui entourent l'agglomération étudiée.

---

(\*) Reçu juin 1975.

<sup>(1)</sup> Ingénieur aux Études et Recherches d'E.D.F.

<sup>(2)</sup> Ingénieur au Centre de Distribution E.D.F., Caen.

<sup>(3)</sup> Les termes « statique » et « solution » sont relatifs à une année donnée; « dynamique » et « stratégie » sont relatifs à une période d'étude.

D'une façon générale ce problème de choix des investissements peut s'énoncer ainsi :

- déterminer parmi les « stratégies » qui permettent de satisfaire une perspective de demandes connue, en respectant les contraintes imposées, en particulier :

- une alimentation arborescente des points de demande;
- la garantie d'alimentation en cas d'incident sur un ouvrage quelconque du réseau [règle du  $(n-1)$ ],
- celle qui correspond au « coût minimal ».

Ces études se heurtent à de nombreuses difficultés, qui tiennent : d'une part, au fait que la distribution est arborescente, ce qui augmente le caractère combinatoire du problème et, d'autre part, à ce qu'un grand nombre de variables est nécessaire pour décrire une réalité, même simplifiée. En effet, nous devrions de plus tenir compte :

- des pertes Joule dans les câbles souterrains;
- des chutes de tension dans les lignes aériennes

en tant que contraintes. Autrement dit, la valeur des pertes Joule ou des chutes de tension d'un arc  $(i, j)$  quelconque, d'un des schémas arborescents d'alimentation trouvés au cours de l'exploration, ne devra jamais dépasser une valeur seuil. Ceci implique de calculer chutes de tension ou pertes Joule, selon la nature du réseau (aérien ou souterrain), pour chaque cas de figure envisagé, avec de plus des seuils variables selon que l'on considère ou non un incident sur le réseau. Ceci conduirait à des temps de calcul bien trop importants, aussi nous nous contentons de calculer les pertes Joule ou les chutes de tension pour chaque schéma d'alimentation retenu en régime normal (réseau sans incident); l'utilisateur peut alors vérifier si le réseau est satisfaisant ou non. L'utilisation de cette procédure semble d'ailleurs donner toute satisfaction.

Les réseaux étudiés (300 à 400 nœuds et 600 à 800 branches pour des villes de la taille de Bordeaux ou Lille) peuvent se représenter du point de vue topologique par des réseaux de transport au sens de la « théorie des graphes ».

A ces variables « spatiales » (400 sommets pour décrire les possibilités géographiques et techniques des réseaux, il faut ajouter les variables « temporelles » qui permettront l'optimisation sur une période d'étude suffisamment longue (5 ans en moyenne). Par ailleurs, l'étude de la disparition successive d'un élément quelconque du réseau [règle du  $(n-1)$ ] conduit à traiter autant de problèmes que d'éléments de réseau.

Pour réduire au maximum le caractère combinatoire, écueil essentiel de ce problème, l'idée de base de la méthode consiste d'abord à séparer le plus possible le « temporel » et le « spatial ». Autrement dit, nous traitons autant de problèmes séparés, mais de dimensions à peu près raisonnables, que d'années et d'incidents à étudier, puis nous « dynamisons » les résultats obtenus sur toute la période d'étude.

Ensuite, ayant réduit considérablement le caractère combinatoire de la recherche d'un optimum statique (dû en grande partie à l'alimentation arborescente des points de demande), nous élaborons les notions de « coupe-arbre minimal » et de « flot-arbre maximal », inspirés du théorème de Ford et Fulkerson pour les réseaux de transport.

Les considérations qui suivent montrent comment ce problème a été abordé à la Direction des Études et Recherches d'Électricité de France, et ont permis l'élaboration d'une méthode et d'un programme de résolution utilisés depuis plus de 4 ans par les Centres de Distribution d'E.D.F. [1].

## 1. FORMULATION DU PROBLÈME PAR UN PROGRAMME MATHÉMATIQUE EN NOMBRES ENTIERS

*En résumé*, le problème est le suivant :

Il s'agit, lors d'une étude dynamique, de minimiser la fonction économique (investissements nécessaires) d'un réseau de transport dont le flot est borné et le schéma d'alimentation arborescent, en respectant les contraintes de sécurité (perte d'un ouvrage quelconque du réseau).

NOTATIONS : Nous considérons un réseau de transport simplifié par :

- la suppression du sommet de sortie  $S$  et des arcs de type  $(i, S)$ ;
- l'affectation des demandes d'énergie à chaque sommet  $i$ .

Soit  $G(X, U)$  le graphe correspondant à ce réseau de transport :

- L'ensemble  $X$  des sommets contient  $(n+1)$  sommets :
  - un sommet d'entrée  $E$ ;
  - $n$  sommets « consommateurs de biens ».
- L'ensemble  $U$  des arcs renferme :
  - des arcs d'entrée  $(E, i)$  orientés de  $E$  vers  $i$ ;
  - des arcs intermédiaires  $(i, j)$  avec  $i, j \neq E$  orientés et tels que l'existence de  $(i, j)$  entraîne l'existence de  $(j, i)$ .

On pose  $|U| = m$ .

On désigne par :

$d_i$  la demande en chaque sommet,  $i = 1, n$  et  $d_{\text{totale}} = \sum_i d_i$ ;

$c_i$  la demande satisfaite en chaque sommet;

$\gamma_{(i, j)}$  les capacités de chaque arc  $(i, j) = 1, m$ ;

$k_{(i, j)}^t$  le coût de l'ouvrage  $(i, j)$ , installé à l'année  $t$  et actualisé à cette année  $t$ ,  $(i, j) = 1, m$  et  $t = 1, T$ .

Les ouvrages considérés sont, soit des câbles ou lignes aériennes de distribution d'électricité, soit des transformateurs THT/MT ou HT/MT.

Les ouvrages existant à l'année initiale de l'étude ont un coût nul :

$K^t = \sum_{(i, j)} k_{(i, j)}^t$  le coût de l'ensemble des ouvrages, installés à l'année  $t$ , actualisés à cette année  $t$ ;

$K = \sum_t K^t = \sum_t \sum_{(i,j)} k_{(i,j)}^t$  le coût total actualisé des ouvrages installés pendant la durée de l'étude.

$\varphi_{(i,j)}^t$  le flux qui parcourt l'arc  $(i,j)$  à l'année  $t$ ,  $(i,j) = 1, m$  et  $t = 1, T$ .

### 1.1. Les contraintes

On définit une variable bivalente  $y_{(i,j)}^t$ , telle que

$$y_{(i,j)}^t \in (0, 1), \quad (i,j) = 1, m \quad \text{et} \quad t = 1, T.$$

Elle vaut :

- 1 si l'ouvrage  $(i,j)$  existe à l'année  $t$ ;
- 0 sinon;

$$y_{(i,j)} = \sum_{t=1, T} y_{(i,j)}^t$$

indique si l'ouvrage  $(i,j)$  a été installé à une année  $t$  quelconque de la période étudiée.

*Contrainte de capacité :*

$$0 \leq \varphi_{(i,j)}^t \leq \gamma_{(i,j)} \cdot y_{(i,j)}^t, \quad \forall (i,j) = 1, m \quad \text{et} \quad t = 1, T.$$

*Conservation des flots — première loi de Kirchoff :*

$$\sum_{j \in \omega^{+(i)}} \varphi_{(i,j)}^t - \sum_{j \in \omega^{-(i)}} \varphi_{(j,i)}^t = 0, \quad t = 1, T \quad \text{et} \quad i = 1, n,$$

où  $\omega^{+(i)}$  correspond à l'ensemble des nœuds reliés au nœud  $i$  par un arc  $(i,j)$  et  $\omega^{-(i)}$  correspond à l'ensemble des nœuds reliés au nœud  $i$  par un arc  $(j,i)$ .

La somme algébrique des flux entrant dans  $i$  est égale à la somme algébrique des flux sortant de  $i$ .

*Satisfaction de la demande. Définition de la défaillance*

La défaillance est

$$D = \sum_{i=1, n} d_i - \sum_{i=1, n} c_i = d_{\text{totale}} - \sum_{i=1, n} c_i,$$

$D = 0$  signifie que la demande est satisfaite.

*Un ouvrage installé à l'année  $t$  existe à l'année  $t+1$*

$$y_{(i,j)}^{t+1} \geq y_{(i,j)}^t, \quad t = 1, T-1 \quad \text{et} \quad (i,j) = 1, m.$$

*Contraintes d'arborescence*

Soit un graphe  $G(X, U)$  représentant notre réseau. Une arborescence  $B(X, U)$  est un graphe partiel connexe possédant  $n$  arcs  $[(n+1)$  étant le nombre de sommets, y compris le sommet d'entrée  $E]$ .

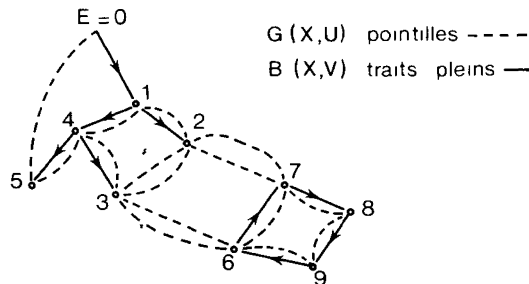
Elle se formule de la manière suivante, qui est une condition nécessaire et suffisante :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\omega^-(i)} x_{(j,i)} &= 1 && \text{avec } x_{(j,i)} = 1 \text{ si } (j,i) \in V \\ & && = 0 \text{ sinon,} \\ \forall i \in X, \quad i &\neq E. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$0 < \varepsilon_i \leq c_i \leq d_i. \quad (2)$$

*Nota :* Si la demande en  $i$  est nulle, il est toujours possible d'imposer une demande infiniment petite  $\varepsilon$  en  $i$ .

La condition (1) est nécessaire, mais pas suffisante [exemple (*fig. 1*)].



**Figure 1.**

$$\sum_{\omega^-(i)} x_{(j,i)} = 1, \quad \forall i \in X \text{ et } i \neq E.$$

La condition (1) est donc satisfaite, pourtant 6-7-8-9 définissent un circuit. Par contre si la condition (2) est également remplie, le graphe ne peut avoir plusieurs composantes connexes.

## 1.2. La fonction à optimiser

Le problème consiste à minimiser :

$$K = \sum_{t=1, T} \sum_{(i, j)=1, m} k_{(i, j)}^t \cdot y_{(i, j)}^t.$$

Nous citons en bibliographie, les travaux d'autre auteurs sur des sujets similaires. Brièvement, nous dirons que les méthodes générales de programmation en nombres entiers (*voir* [8]) ont l'avantage de pouvoir introduire d'autres contraintes (pertes Joule, chutes de tension). Cependant ces algorithmes généraux sont évidemment moins souples et moins performants que des algorithmes spécifiques tel que le nôtre, utilisant explicitement certaines

particularités du problème à traiter. Par ailleurs MM. Doulliez, Balériaux et Brancart [17] ont isolé un problème similaire mais sans introduire la contrainte d'arborescence; leur problème est relatif à un autre type de réseau.

## 2. MÉTHODE DE RÉOLUTION

Nous avons résolu le problème par une méthode de programmation mathématique en nombres entiers ([1], [2]), dont nous donnons les quelques éléments qui permettent d'en illustrer le caractère spécifique.

### 2.1. Principes généraux

La résolution se fait en deux étapes :

*Première étape :*

- Connaissant :
  - le réseau initial;
  - l'évolution de la demande en chaque sommet, en cas d'incident sur un ouvrage quelconque du réseau.

— Trouver parmi toutes les arborescences possibles, celle qui satisfait *e maximum de demandes* quel que soit l'incident  $i$  à chaque année  $t$ . Les résultats permettent d'établir les années où apparaît la défaillance et la liste des arcs saturés pour chaque cas d'incident, puis d'élaborer au vu de ces résultats, une proposition d'investissements possibles appelée « *Catalogue de renforcement* ».

*Deuxième étape :*

- Le catalogue de renforcement fait partie des données.
- Il s'agit alors de trouver le réseau de coût minimal satisfaisant toutes les contraintes :
  - arborescence;
  - flot;
  - satisfaction de la demande ( $D = 0$ ), pour chaque cas d'incident.

Le résultat fourni est la liste ordonnée par coût croissant des meilleures stratégies possibles. La liberté du choix définitif est laissée à l'utilisateur, qui peut avoir des critères de choix différents de ceux du coût minimal.

Du point de vue algorithmique, la première étape est un cas particulier de la deuxième étape où tous les ouvrages ont un coût nul.

### 2.2. Coupe-arbre minimale. Flot-arbre maximal

DÉFINITIONS [5] :

Arbre = un graphe connexe sans cycles.

Flot bloquant = flot tel que le graphe comporte au moins un arc saturé.

Flot maximal (ou maximum de flot) = flot qui permet de satisfaire le maximum de demandes.

Cette notion nouvelle est inspirée du théorème de Ford et Fulkerson ([3], [4] et [20]).

Rappelons que, dans le cas d'un réseau de transport classique (sans la contrainte d'arborescence), Ford et Fulkerson montrent que la valeur maximale du flot est égale à la capacité minimale d'une coupe et que leur procédure de marquage permet de progresser de flot bloquant en flot bloquant de plus en plus grand jusqu'au maximum de flot.

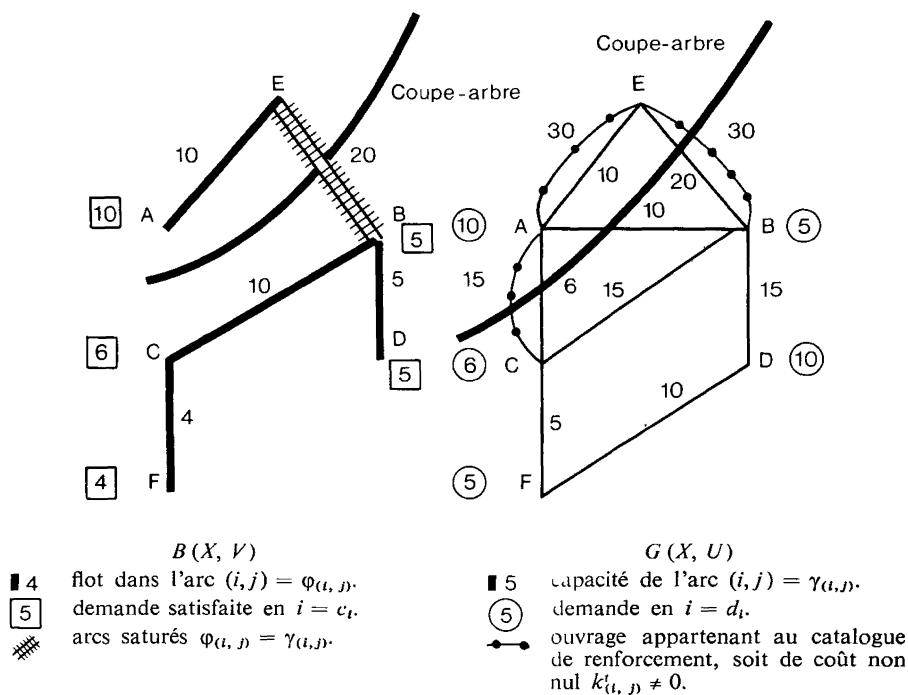


Figure 2.

Les définitions de flot bloquant et de flot maximal restent valables, mais les arcs  $(i, j)$  considérés doivent obligatoirement appartenir à l'arbre considéré  $B(X, V)$ .

Par analogie, sur notre réseau de transport simplifié  $G(X, U)$ , nous définissons une coupe-arbre <sup>(1)</sup> minimale correspondant au flot-arbre maximal (fig. 2).

<sup>(1)</sup> Pour être exact nous devrions dire coupe-arborescence minimale, mais par souci de simplification nous l'appellerons coupe-arbre.



Soit  $B(X, V)$  une arborescence du graphe  $G(X, U)$ , dont le flot est maximal sur  $B(X, V)$  mais seulement bloquant sur le graphe  $G(X, U)$ .

On définit une partition de  $X$  en deux sous-ensembles  $Y$  et  $\bar{Y}$ , appelée coupe-arbre, telle que

1°  $E \in Y$ ;

$$2^\circ \varphi_{(i,j)} = \gamma_{(i,j)} \cdot x_{(i,j)} \begin{cases} (i,j) \in V, i \in Y \text{ et } j \in Y, \\ x_{(i,j)} = 1 \text{ si } (i,j) \in V, \\ = 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Pour les arcs du graphe appartenant à la coupe, le flot est

- égal à la capacité si  $x_{(i,j)} = 1$ ;
- nul si  $x_{(i,j)} = 0$ .

● Si le flot sur l'arbre est maximal et permet de satisfaire toutes les demandes, le flot atteint son maximum.

● Par contre, si le flot sur l'arbre est maximal et ne satisfait pas toutes les demandes, l'arbre correspondant à au moins un arc saturé, et il est possible de définir une coupe-arbre  $(Y, \bar{Y})$  répondant aux conditions 1 et 2.

Une condition nécessaire pour améliorer ce flot dans notre réseau est de permuter entre eux deux arcs de la coupe-arbre [on permute un arc  $(i, j)$  n'appartenant pas à l'arbre avec un arc  $(l, j)$  appartenant à l'arbre et ayant tous deux la même extrémité  $j$ ].

Cette procédure s'inspire d'une simple notion de bon sens, en effet, la coupe-arbre sépare les points demandeurs des points distributeurs et est le lieu des arcs saturés. Or, le flot sur l'arbre étant maximal le seul moyen d'améliorer ce flot, si cela est possible, est de constituer un nouvel arbre qui ne contienne pas le même ensemble d'arcs saturés. Cette procédure ne définit pas un cheminement avec amélioration du flot à chaque étape comme l'algorithme de Ford et Fulkerson, mais constitue un processus d'exploration qui nous permet de trouver rapidement, parmi l'ensemble d'arbres possibles, celui qui conduit au maximum de flot : ce flot est appelé flot-arbre maximal.

En plus de cette procédure de cheminement, nous définissons un processus de marquage pour éviter de cycler dans l'exploration. Cet ensemble constitue l'algorithme que nous exposons ci-après :

### 2.3. Algorithme de cheminement

Nous décrivons cet algorithme d'une manière pratique à l'aide de l'exemple ci-dessous (fig. 3).

Au départ de la procédure, soit :

$$\begin{cases} A^\circ \text{ l'arbre initial,} \\ D^\circ = 6 \text{ sa défaillance,} \\ K^\circ = 0 \text{ son coût.} \end{cases}$$

Soit  $C(A^0)$  la coupe-arbre correspondante qui sépare les sommets en deux sous-ensembles  $Y^0, \bar{Y}^0$ .

A l'étape 1 nous procédons comme suit :

I. On considère les arbres  $A^1_{(i,j)}$  obtenus en permutant un arc  $(i,j) \notin A^0$  avec un arc  $(l,j) \in A^0$  et vérifiant :

( $\alpha$ )  $(i,j) \in (Y^0, \bar{Y}^0)$ .

( $\beta$ )  $(i,j)$  n'est pas marqué ou améliore une fonction pondérant la défaillance et le coût d'investissement, à l'aide de poids  $P_1$  et  $P_2$  avec  $P_1 \gg P_2$ , soit

$$P_1 \tilde{D}_{(i,j)} + P_2 \tilde{K}_{(i,j)} > P_1 D^1_{(i,j)} + P_2 K^1_{(i,j)}.$$

Le symbole  $\sim$  indique le meilleur arbre rencontré dans le cheminement; au départ de la procédure c'est l'arbre initial.

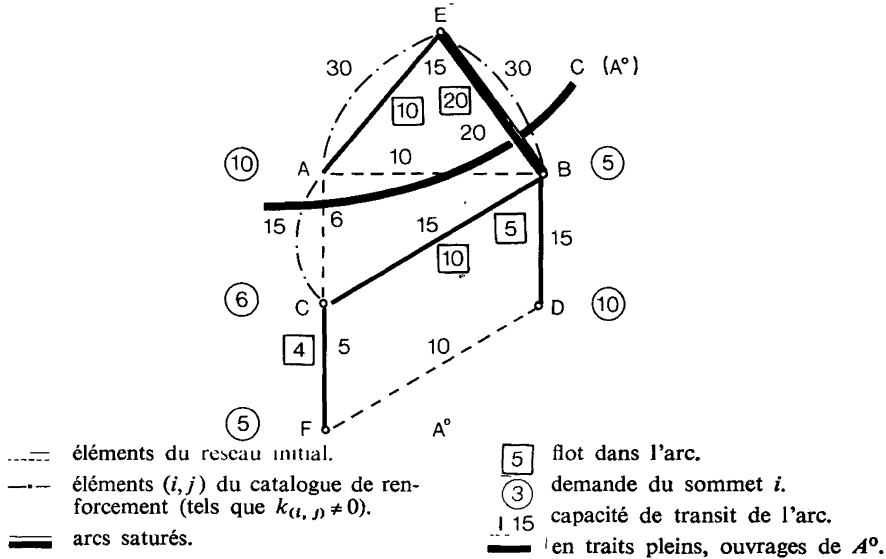


Figure 3.

$\tilde{D}_{(i,j)}$  est la défaillance correspondant à l'arbre  $A^0$  contenant  $(i,j)$  et  $D^1_{(i,j)}$  la défaillance pour l'arbre  $A^1$  contenant  $(i,j)$ ,  $\tilde{K}_{(i,j)}$  et  $K^1_{(i,j)}$  les coûts correspondants.

II. Parmi les arbres satisfaisant les conditions  $\alpha$  et  $\beta$ , l'arbre  $A^1$  choisi est celui qui minimise la fonction :

$$P_1 \min(\tilde{D}_{(i,j)} - D^1_{(i,j),0}) - P_2 \min(\tilde{K}_{(i,j)} - K^1_{(i,j),0}).$$

Dans l'ensemble ci-dessus, l'exploration à ce niveau conduit à l'arbre de cheminement suivant (fig. 4).

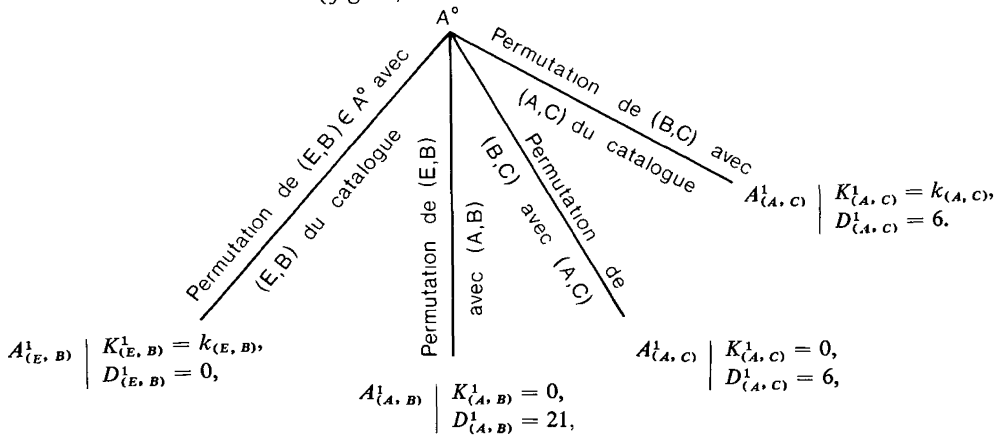


Figure 4.

— Si un des arbres  $A^1$  trouvés est meilleur que  $A^0$ , soit s'il améliore la fonction économique, on pose  $\tilde{A} = A^1$ .

— Si  $D^1_{(i, j)} = 0$ , l'arbre  $A^1_{(i, j)}$  trouvé constitue une solution réalisable et les investissements nécessaires, s'il en faut, pour parvenir à cette solution sont mis en mémoire.

Soit dans l'exemple ci-dessus :  $A^1_{(E, B)}$ , investissement nécessaire =  $(E, B)$ .

— Puis l'exploration est reprise, soit à partir :

- du meilleur arbre trouvé  $\tilde{A} = A^1$ , s'il existe;
- du moins mauvais, parmi ceux répondant aux critères  $\alpha$  et  $\beta$  à ce niveau de l'exploration.

L'exploration s'arrête soit quand la coupe est vide soit quand toutes les arêtes permutable sont déjà marquées.

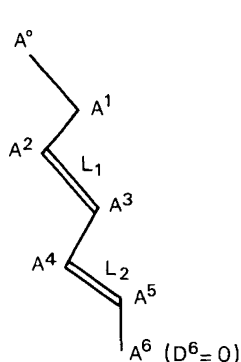
Chaque permutation retenue pour passer d'un arbre quelconque  $A^n$  à un arbre  $A^{n+1}$  constitue une arête de l'arbre de cheminement, et chaque arête ayant un coût  $\neq 0$  introduite est repérée. L'exploration sur cet arbre de cheminement se fait comme nous venons de le voir jusqu'à l'obtention d'une solution, ensuite nous reprenons l'exploration en partant du dernier arbre trouvé avant l'introduction du dernier ouvrage ayant un coût non nul.

Supposons par exemple que nous trouvions une première solution (arbre à défaillance nulle), en introduisant les ouvrages  $L_1$  <sup>(1)</sup> et  $L_2$  de coût non nul (fig. 5).

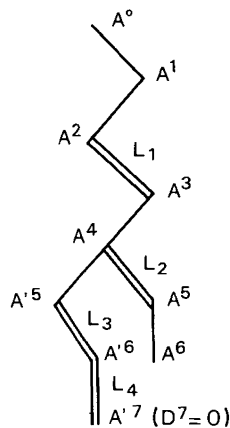
<sup>(1)</sup> Le catalogue de renforcement  $\mathcal{L}$  est un ensemble d'ouvrages  $L_1, L_2, \dots$ , chaque ouvrage est représenté par deux arcs  $(i, j)$  et  $(j, i)$  affectés d'un coût non nul.

Nous reprenons l'exploration en partant de l'arbre trouvé avant l'introduction de  $L_2$ , soit  $A^4$ . Ceci nous conduit à une deuxième solution :  $L_1-L_3-L_4$ .

Nous reprenons ensuite l'exploration à partir de  $A'^6$  etc., et de proche en proche nous repérons *toutes* les solutions, non redondantes, c'est-à-dire, ne contenant pas strictement une autre solution.



Solution possible  $L_1-L_2$ .



Solution possible  $L_1-L_3-L_4$ .

Figure 5.

#### 2.4. Recherche des solutions à une année donnée

L'application de l'algorithme précédent permet d'obtenir des solutions de renforcement pour un incident  $i$  se produisant à une date  $t$ .

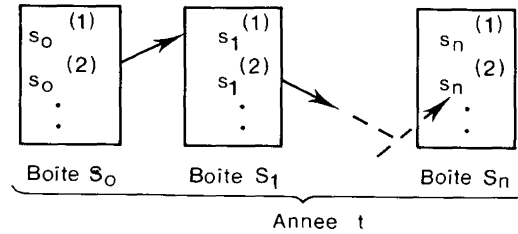
Toutes ces solutions, qui sont des sous-ensembles d'éléments du catalogue de renforcement  $\mathcal{L}$ , sont mises en mémoire dans une « boîte de solutions » de type suivant :

incident	i
année	t
Liste des solutions	
$s_i^{(1)}$	$L_1 . L_2$
$s_i^{(2)}$	$L_1 . L_3 . L_4$
	.
	.

Boîte  $S_i$ .

(pour ne pas alourdir l'exposé, nous n'affectons pas l'indice  $t$  aux notations).

En répétant l'algorithme précédent pour chaque cas d'incident à une année  $t$  donnée, on obtient les boîtes de solutions de l'année  $t$ . On peut donc construire des sous-stratégies valables pour l'année  $t$  (telle celle représentée par des flèches).



En effet, pour chaque cas d'incident <sup>(1)</sup> étudié, nous déterminons toutes les solutions non redondantes qui permettent, en respectant les contraintes, de satisfaire toutes les demandes et qui sont composées d'ouvrages appartenant au catalogue de renforcement  $\mathcal{L}$ . Une solution à l'année  $t$ , valable pour un incident quelconque, est donc la réunion d'une solution de la boîte  $S_0$ , d'une solution de la boîte  $S_1$ , etc. Nous précisons cela au paragraphe suivant.

## 2.5. Recherche des solutions sur l'ensemble de la période

Soit  $S_i^{(l)}$  la  $l$ -ième solution trouvée qui conduit à une solution réalisable pour l'annulation de la capacité de l'élément  $i$  à l'année  $t$ ,  $s_i = (L_{i1} \dots L_{il})$  est un ensemble d'éléments du catalogue  $\mathcal{L}$ , tel que si les ouvrages  $L_{i1} \dots L_{il}$  sont installés avant l'année  $t$ , le réseau sera suffisamment dimensionné si un incident sur l'élément  $i$  survient à l'année  $t$ .

Donc, pour tout cas  $i$  à une année  $t$ , il faut choisir une des solutions  $S_i^{(t,l)}$ , contenues dans la « boîte de solutions » :  $S_i^t$ . (Nous introduisons ici l'indice  $t$ .)

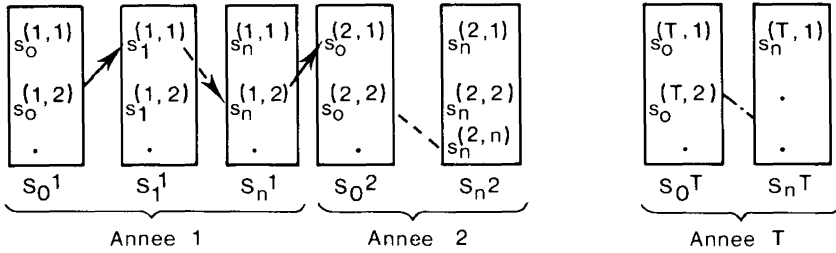
Il en découle que : une condition nécessaire pour que le réseau soit suffisamment « dimensionné » à l'année  $t$ , pour tout cas d'incident, est que l'on choisisse au moins une solution  $s_0^{(t,l_0)}$  de la boîte  $S_0^t$  et au moins une solution  $s_1^{(t,l_1)}$  de la boîte  $S_1^t$  et etc. Ceci détermine une partie d'une des stratégies valables pour la période d'étude et nous l'appelons une sous-stratégie de l'année  $t$ .

Les solutions  $s_i^{(t,l_i)}$  étant des sous-ensembles d'ouvrages du catalogue, il se peut que dans une sous-stratégie de l'année  $t$  soit  $s_0^{(t,l_0)}$ ,  $s_1^{(t,l_1)} \dots s_n^{(t,l_n)}$ , des ouvrages apparaissent à la fois dans  $s_0^{(t,l_0)}$  et  $s_1^{(t,l_1)}$  par exemple. Les ouvrages correspondant à cette sous-stratégie sont donc :

$$\bigcup_{i=0}^n s_i^{(t,l_i)}.$$

Nous déterminons de même une stratégie valable pour la période d'étude  $t = 1, T$ .

<sup>(1)</sup> Il y a au plus  $n$  cas d'incidents à étudier puisque le réseau en schéma normal à une structure d'alimentation arborescente.



Si dans une stratégie donnée, un ouvrage apparaît à la fois aux années  $t_1$  et  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ), il faut bien entendu tenir compte du fait qu'à l'année  $t_2$  cet ouvrage est supposé déjà installé.

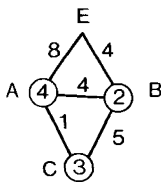
Une stratégie est une réunion de sous-stratégies, mais on doit tenir compte de l'héritage des années précédentes.

De toute façon, notre but est de déterminer toutes les stratégies. *A priori*, une difficulté apparaît : il peut y avoir beaucoup de stratégies et, de ce fait, le temps de calcul peut être long et l'utilisateur peut avoir des difficultés pour analyser les résultats. Pour les problèmes pratiques traités, il n'en a pas été ainsi pour les raisons suivantes liées aux particularités du problème et de la méthode elle-même :

- le nombre de stratégies dépend de l'importance du catalogue de renforcements  $\mathcal{L}$  et celui-ci a été déterminé d'une manière rationnelle au cours de la première étape, laquelle constitue, en quelque sorte, une préoptimisation ;
- l'étude étant faite à moyen terme, les possibilités de renforcement sont relativement réduites.

#### REMARQUE SUR LA DIFFICULTÉ DE PROPOSER LES RENFORCEMENTS DANS LES SCHÉMAS ARBORESCENTS

Soit le réseau simple

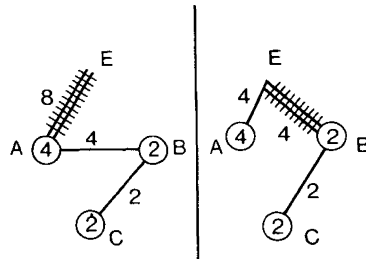


8/ sont les capacités

③ les demandes

Figure 6.

Les deux arbres à défaillance minimale correspondants ( $D = 1$ )



4/ représentent les flots

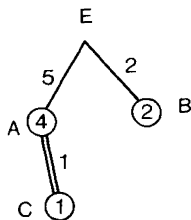
② les demandes desservies

/// les arcs saturés

Figure 7.

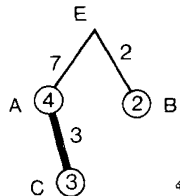
Figure 8.

L'application de Ford et Fulkerson nous conduirait à renforcer au moins un des ouvrages saturés des schémas à défaillance minimale, soit ici  $EA$  ou  $EB$ ; or ces solutions peuvent être onéreuses et ne sont pas uniques, le renforcement de  $AC$  peut être plus économique et constitue aussi une solution.



Autre arbre possible de défaillance  $D = 2$ .

Figure 9.



— Ouvrage renforcé

Solution possible ( $D = 0$ ).

Figure 10.

Donc, pour une exploitation arborescente d'un réseau maillé, le renforcement d'au moins un ouvrage saturé du schéma utilisé n'est pas une condition nécessaire pour trouver la stratégie optimale; la condition nécessaire est de renforcer au moins un des ouvrages saturés pour au moins un schéma arborescent parmi tous ceux théoriquement possibles (cf. fig. 10).

## CONCLUSION

La méthode proposée pour le court terme [1] est largement utilisée et expérimentée par les centres de distribution E.D.F. depuis 1971. Elle permet essentiellement :

- 1° de réaliser des économies sur les investissements, évaluées à 10 % environ;
- 2° de mieux connaître le réseau, donc de l'exploiter dans de meilleures conditions, même en marche normale (sans incident);
- 3° de rassurer l'utilisateur par une meilleure connaissance de ses problèmes. La conséquence directe est d'éviter les surinvestissements décidés par mesure préventive en l'absence de renseignements complets;

4° *Rentabilité du programme* : Les temps nécessaires à l'étude du réseau MT d'une grande ville varient en fonction de la structure des réseaux, en particulier, selon les possibilités de reports de charge de poste à poste. (En somme, les temps varient en fonction de la puissance du combinatoire, liée à la structure même du réseau.)

Pour des villes de taille sensiblement équivalentes, par exemple Lille et Bordeaux, les temps passent de 10 à 30 mn de temps CPU sur ordinateur Control Data 6600 pour l'étude de la première étape, et de 30 à 60 mn pour l'étude de la deuxième étape. Soit, pour l'étude complète des réseaux MT d'une grande ville, en considérant tous les cas d'avaries possibles, pour une

période de 5 ans environ, un total de 40 mn à 2 h de temps CPU de l'ordinateur CDC 6600.

Les investissements annuels pour le réseau MT urbain de toute la France, s'élève à environ 170 millions de francs. Pour une grande ville, de la taille de Lille, ils se montent à environ 3 millions de francs et l'économie réalisée, estimée à 10 %, atteint donc 300 000 NF environ, tandis que le coût du calcul par heure, sur CDC 6600, est de l'ordre de 3 000 à 4 000 NF.

### BIBLIOGRAPHIE

1. M.-C. RUBINSTEIN, *Application de la théorie des graphes au choix des investissements dans un réseau d'énergie électrique sujet à avaries*, Thèse de 3<sup>e</sup> cycle à Paris VI, 1974.
2. J.-P. LUDOT et M.-C. RUBINSTEIN, *Méthode pour la recherche d'une politique optimale d'investissement à court terme d'un réseau de distribution*, A.I.M. Liège, Congrès de la CIREP, 10-13 mai 1971, ou Bulletin des Études et Recherches, série B, n° 2, 1971, p. 39-64, ou Fourth Power System Computation Conference, P.S.C.C., Grenoble, vol. 1, Paper 1.1/12, septembre 11-16 1972.
3. L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *Maximal Flow Through a Network*, Canad. J. Math., 8, 1956, p. 399.
4. L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *Dynamic Network Flow*, Rand Corporation Report, 1956, p. 967.
5. C. BERGE et A. GHOUILA-HOURI, *Programmes, jeux et réseaux de transport*, Dunod, Paris, 1962.
6. C. BERGE, *Graphes et hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
7. H. BALERIAUX, E. JAMOULLE, P. DOULLIEZ et J. VAN KELECOM, *Recherche de la politique optimale d'investissement d'un réseau électrique en expansion par une méthode de décision séquentielle*, C.I.G.R.E., Rapport n° 32-08, Session de 1970.
8. R. S. GARFINKEL et G. L. NEMHAUSER, *Integer Programming*, J. Wiley, 1972.
9. J.-C. DODU, *Optimisation d'un réseau de répartition d'énergie électrique*, Bulletin des Études et Recherches, E.D.F.
10. P. HUARD, *Réseau de distribution à schéma arborescent en régime normal et en régime de secours*, Bulletin de la Direction des Études et Recherches, série B, n° 1, 1967, p. 73-79.
11. P. DOULLIEZ et M. R. RAO, *Removing Arcs from a Network with Increasing Requirements*, C.O.R.E. Discussion Paper n° 6920, International Center for Management Sciences, C.O.R.E., Heverley, Belgique.
12. M. ARNAUD, *Étude de l'implantation et de la taille optimale des sources THT/MT dans une région donnée*, Note interne E.D.F., Études et Recherches, HR 8563.
13. J.-C. DODU, *Méthode duale pour les programmes linéaires à variables bornées*, E.D.F., Bulletin de la Direction des Études et Recherches, série C, Mathématiques-Informatique n° 1, 1971, p. 5-20.
14. P. DOULLIEZ et M. R. RAO, *Maximum Flow in a Multiterminal Network with Increasing Requirements and Arcs Subject to Failures*, C.O.R.E. Discussions Paper 6913, 1969, International Center for Management Sciences.
15. L. R. FORD et D. R. FULKERSON, *Flows in Networks*, Princeton University Press, 1962.

octobre 1976.



16. P. DOULLIEZ, *Politique optimale d'investissement dans un réseau de transport*, C.O.R.E., reprint n° 69, 264-284. Thèse de doctorat, Université Catholique de Louvain, Belgique, 1970.
17. H. BALÉRIAUX, D. BRANCART et E. JAMOULLE, *Contribution à l'étude du développement des réseaux de distribution d'énergie électrique à grande densité de desserte*, A.I.M., Liège, C.I.R.E.D., 1971.
18. P. DOULLIEZ et M. R. RAO, *Maximal Flow in a Multi-Terminal Network with Any One Arc Subject to Failure*, Management Science, vol. 18, n° 1, septembre 1971.
19. P. DOULLIEZ et M. R. RAO, *Capacity of a Network with Increasing Demands and Arcs Subject to Failure*, C.O.R.E. reprint n° 97, p. 905-915.
20. R. FAURE, *Éléments de Recherche opérationnelle*, Gauthier-Villars, Paris, 1968.