Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle

Jacques Carlier

Disjonctions dans les ordonnancements

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 9, n° V2 (1975), p. 83-100

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_2_83_0>

R.A.I.R.O.
(9e année, juin 1975, V-2, p. 83 à 100)

DISJONCTIONS DANS LES ORDONNANCEMENTS (*)

par Jacques CARLIER (1)

Résumé. — *Dans cet article, on essaye de cerner les contraintes les plus difficiles à gérer dans un problème d'ordonnancement, et on montre que celui-ci peut être souvent ramené à un problème disjonctif fondamental, i.e. un problème dans lequel toute tâche est en disjonction avec au moins une autre tâche.*

On propose ensuite une étude locale du graphe disjonctif ; cette étude nous amène à énoncer un théorème et une règle qui conduit à une méthode arborescente.

Un exemple est traité et entièrement décrit.

INTRODUCTION

Les problèmes d'ordonnancement font en général intervenir des contraintes de potentiels et certaines contraintes exprimant la limitation des moyens de toute nature ; en particulier quand un moyen est unique, on est amené à introduire les disjonctions exprimant le fait que deux tâches ne peuvent faire appel en même temps à ce même moyen. Les disjonctions se représentent facilement dans la formulation potentiels-tâches décrite par Bernard Roy [6].

Dans cette formulation, *on appellera problème disjonctif fondamental, un problème dans lequel toute tâche est au moins en disjonction avec une autre tâche.*

Nous nous proposons dans cet article de montrer comment certains problèmes se ramènent au problème fondamental, puis de donner quelques idées pour le résoudre, ou, du moins obtenir une bonne solution.

Un algorithme illustré par un exemple est enfin proposé.

(*) Reçu mai 1974.

(1) Institut de Programmation, Université de Paris VI.

I. DÉFINITIONS

Définition 1

Graphe conjonctif.

Un graphe conjonctif est un graphe quasi fortement connexe dont les arcs sont valués par des réels, et, tel qu'il existe des chemins de longueur positive allant de l'entrée (notée l) à tout autre sommet, et de tout autre sommet à la sortie (notée n).

Définition 2

Ensemble de potentiels.

Un edp sur un graphe conjonctif $G = (X, U)$ d'ordre n est une application de $X = [l, n]$ dans R telle que :

1. $t_1 = 0$.
2. $t_j - t_i \geqslant a_{ij}$ pour tout arc (i, j) de U de valuation a_{ij}.

On démontre facilement que les t_i sont supérieurs à 0 et inférieurs à t_n.

Définition 3

Contrainte OU.

Une contrainte OU d'ordre m est un m-uple formé de m contraintes de potentiels. Cette contrainte est satisfaite dès qu'une de ses m contraintes conjonctives l'est.

Définition 4

Contrainte disjonctive.

Une contrainte disjonctive est un couple d'arcs $((i, j), (j, i))$ valués par a_{ij} et a_{ji} et, tel que la somme $a_{ij} + a_{ji}$ soit positive ; elle exprime en général le fait que les tâches i et j ne peuvent pas s'exécuter ensemble. On la notera $[i, j]$.

Définition 5

Conflit

Soit G un graphe conjonctif, t un edp sur G, on dit qu'une contrainte OU est un conflit lorsque pour tout arc (i, j) (valué par a_{ij}) de la contrainte OU, on a $t_j - t_i < a_{ij}$.

II. ÉTUDE PROBABILISTE

Dans ce paragraphe, on se propose d'évaluer le risque qu'une contrainte OU soit un conflit ; on montre sous des hypothèses volontairement simplificatrices que ce risque diminue rapidement à mesure que le cardinal de la contrainte OU augmente ; ce résultat étant intuitif, le lecteur pourra, en première lecture, se dispenser de lire la justification théorique, et ne retenir que les règles 1, 2, 3, 4 qui servent à mettre en œuvre des méthodes heuristiques permettant de ramener certains problèmes au problème fondamental, et de donner un algorithme pour résoudre celui-ci.

1. Contrainte marginale

On suppose que l'ensemble des edp d'ordre n tels que $t_n = T$ est probabilisé de manière que les t_i ($i \neq l$ et $i \neq n$) suivent des lois uniformes de paramètre T, indépendantes deux à deux. On se propose de calculer la probabilité qu'une contrainte supplémentaire $t_j - t_i \geqslant a$ soit satisfaite.

En posant $x = a/T$, on montre que cette probabilité est égale à :

$$P = 1/2 - x + x^2/2 \quad \text{si} \quad x \geqslant 0 \text{ (i.e. } a \geqslant 0)$$
$$P = 1/2 - x - x^2/2 \quad \text{si} \quad x \leqslant 0 \text{ (i.e. } a \leqslant 0)$$

Preuve

Calcul de $\Pr(t_j - t_i \geqslant a)$.

Posons
$$Z_i = \frac{t_i}{T}, \qquad Z_j = \frac{t_j}{T};$$

Z_i et Z_j sont distribuées uniformément sur [0, 1], on a :

$$\Pr(t_j - t_i \geqslant a) = \Pr(Z_j - Z_i \geqslant x) = \int_0^1 \Pr(Z_j \geqslant Z_i + x)\, \mathrm{d}Z_i.$$

Il vient :

— si $Z_i + x \leqslant 0 : \Pr(Z_j \geqslant Z_i + x) = 1$

— si $0 < Z_i + x \leqslant 1 : \Pr(Z_j \geqslant Z_i + x) = 1 - (Z_i + x)$

— si $1 \leqslant Z_i + x : \Pr(Z_j \geqslant Z_i + x) = 0$.

D'où :

Premier cas $x \geqslant 0$

$$\Pr(Z_j - Z_i \geqslant x) = \int_0^{1-x} (1 - Z_i - x)\, \mathrm{d}Z_i$$
$$= (1 - x)^2 - \frac{1}{2}[Z_i^2]_0^{1-x}$$
$$= \frac{1}{2}(1 - x)^2 ,$$

d'où

$$\Pr(Z_j - Z_i \geqslant x) = \frac{1}{2} - x + \frac{x^2}{2}$$

quand x est positif.

Deuxième cas x < 0

$$\Pr(Z_j - Z_i \geqslant x) = \int_0^{-x} \mathrm{d}Z_i + \int_{-x}^{1} (1 - Z_i - x)\,\mathrm{d}Z_i$$
$$= -x + (1+x)(1-x) - \int_{-x}^{1} Z_i\,\mathrm{d}Z_i$$
$$= -x + (1-x^2) - \frac{1}{2}(1-x^2)$$

d'où

$$\Pr(Z_j - Z_i \geqslant x) = \frac{1}{2} - x - \frac{x^2}{2}$$

quand x est négatif.

On voit que si T est grand devant a cette probabilité est proche de 1/2 ; ce sera en particulier le cas si dans une méthode SEP on a déjà arbitré un grand nombre de contraintes disjonctives.

Règle 1

Dans une procédure arborescente, on prendra t_n comme fonction d'évaluation, et, on l'augmentera au maximum à chaque séparation.

2. Contrainte OU

Sous des hypothèses d'indépendance, la probabilité qu'une contrainte OU soit un conflit est de l'ordre de $(1/2)^m$ (m : cardinal de la contrainte OU).

Règle 2

On rangera les contraintes OU suivant les cardinaux croissants.

3. Contraintes disjonctives

Abandonnons les hypothèses d'indépendance ; soit $[i, j]$ une contrainte disjonctive ; la probabilité que la disjonction ne soit pas trivialement satisfaite est, si a_{ij} et a_{ji} sont positifs, égale à :

$$P = 1 - \Pr(t_j - t_i \geqslant a_{ij}) - \Pr(t_i - t_j \geqslant a_{ji})$$
$$= x_{ij} + x_{ji} - \left(\frac{x_{ij}^2 + x_{ji}^2}{2}\right)$$
$$(x_{ij} = a_{ij}/T,\ x_{ji} = a_{ji}/T)$$

si $a_{ji} < 0$, on aurait

$$P = x_{ij} + x_{ji} - \frac{x_{ij}^2 - x_{ji}^2}{2}.$$

Règle 3

Plus la somme $a_{ij} + a_{ji}$ est grande, plus la disjonction est a priori coûteuse à gérer. Pour $a_{ij} + a_{ji}$ donné, plus les a_{ij} sont voisins de leur demi-somme, plus la disjonction est difficile à gérer si a_{ij} et $a_{ji} > 0$.

III. LES PROBLÈMES SE RAMENANT AU PROBLÈME FONDAMENTAL

1. Les problèmes disjonctifs

On peut supprimer les sommets k n'intervenant dans aucune contrainte disjonctive sous réserve d'introduire certains arcs conjonctifs (voir : corollaire 1) ; cela permet de ramener tout problème disjonctif à un problème fondamental.

Règle 4

Dans tous les cas, un travail préliminaire consistera à supprimer les sommets n'intervenant que dans des contraintes conjonctives.

REMARQUE

On aura avantage à supprimer en priorité ceux de plus petit degré.

2. Les problèmes à ensembles critiques

A. DÉFINITION

Soient un graphe conjonctif $G = (X, U)$ et un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $P(X)$ tels que :

$$\begin{matrix} C_1 \in \mathcal{C} \\ C_2 \in \mathcal{C} \end{matrix} \qquad C_1 \neq C_2 \Rightarrow C_1 \cap C_2 \notin \mathcal{C}.$$

Les éléments de $\mathcal{C}$ sont appelés ensembles critiques ; ceux de cardinal α introduisent des contraintes OU de cardinal $\alpha(\alpha - 1)$ formées des éléments de $CXC - H$ (H diagonale de CXC).

La probabilité pour que la contrainte OU introduite par un ensemble critique de cardinal α ne soit pas satisfaite est de l'ordre de $(1/2)^{\alpha(\alpha-1)}$ si on a déjà arbitré des disjonctions.

Pour $\alpha = 2, p = 1/4$.
Pour $\alpha = 3, p = 1/64$.
Pour $\alpha = 4, p = 1/409\,6$.

Règle 5

On s'occupera des ensembles critiques par α croissants.

REMARQUE

On ramène ainsi les problèmes à ensembles critiques dont plusieurs sont de cardinal 2 aux problèmes disjonctifs.

B. CONTRAINTES CUMULATIVES

Ichiro Nabeschima [4] a introduit les ensembles critiques pour une certaine forme de contraintes cumulatives.

Soit T l'ensemble des tâches, pour chaque ressource r on connaît sa disponibilité b_r, et, les besoins $a_{r,i}$ de ressource r de chaque tâche i. Les ensembles critiques sont les plus petits ensembles C ($C \subset T$) tels que

$$\sum_{i \in C} a_{ri} > b_r .$$

C. CONTRAINTES CUMULATIVES EN ESCALIER

Définition

On dit que les contraintes cumulatives sont en escalier quand pour chaque tâche i, et, chaque ressource r le besoin $a_{r,i}(t)$ est fonction en escalier du temps.

Nous allons montrer comment on se ramène aux ensembles critiques sans augmenter le nombre de sommets du graphe. Pour expliquer cela nous allons avoir besoin de la règle suivante valable quand il y a des contraintes OU.

Règle 6

Si les tâches $i_1, i_2, \ldots, i_m$ appartiennent à un circuit du graphe conjonctif de longueur nulle, on peut remplacer $m - 1$ de ces tâches par la m-ième.

Preuve

Si i_j et i_l appartiennent à un circuit de valuation nulle, il existe Δ tel que $t_{ij} = t_{il} + \Delta$. Une contrainte faisant intervenir le sommet i_j et un sommet s, par exemple $t_{ij} - t_s \geqslant a$, est équivalente à la contrainte $t_{il} - t_s \geqslant a - \Delta$ faisant intervenir les sommets i_l et s. On sait donc exprimer toutes les contraintes sans utiliser les sommets $i_2, i_3, \ldots, i_m$ qu'on peut alors supprimer, s'il n'y a que des contraintes OU.

Ceci prouvé, considérons une tâche i, et une ressource r, les fonctions $a_{r,i}(t)$ sont en escalier. Introduisons dans un premier temps des tâches $i_1, i_2, \ldots, i_m$ de durée $t_1, t_2, \ldots, t_m$ (cf. fig. 1). On calcule ensuite les ensembles critiques attachés à la ressource r, de manière qu'un ensemble critique ne contienne pas deux des m tâches $i_1, i_2, \ldots, i_m$.

Puisqu'on connaît le décalage Δ entre les deux tâches i et i_j, on peut ramener facilement un ensemble critique faisant intervenir i_j à un ensemble critique faisant intervenir i.

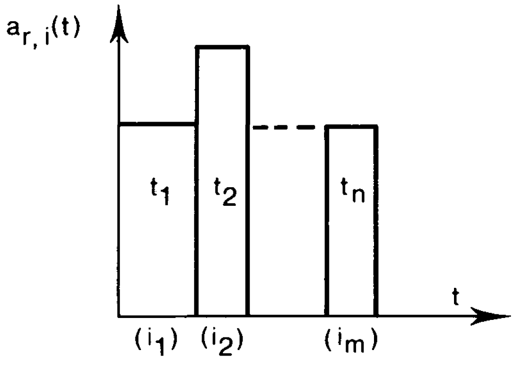

Figure 1

REMARQUE

Les problèmes pouvant être formulés en termes d'ensembles critiques sont nombreux ; citons l'organisation d'une session d'examen.

IV. LE PROBLÈME FONDAMENTAL

1. Une méthode générale

Soit un problème disjonctif dans lequel il s'agit de minimiser t_n, une idée est d'introduire les fonctions économiques intermédiaires

$$t_i - t_j((i, j) \in X \times X - H)$$

qu'il s'agit de minimiser ; cela nous introduit des contraintes conjonctives $t_j - t_i \geqslant a_{ij}$ qui étaient sous-jacentes. Une telle méthode devrait permettre d'augmenter t_n et de supprimer certaines contraintes disjonctives dont l'arbitrage deviendrait alors évident.

2. Une application de cette méthode

Nous supposons que nous avons un sous-graphe de G isomorphe à celui de la figure 2 : $\begin{bmatrix} b & a \\ (\beta\alpha) & (\alpha\beta) \end{bmatrix}$ est une contrainte disjonctive, i (resp. : j) un prédécesseur (resp. : successeur) commun de α et de β.

l_1, l_2, l_3, l_4, l_5 sont respectivement les valuations des plus longs chemins allant de i à α, de α à j, de i à β, de β à j et de i à j.

Règle 7

Si $l_6 = \text{Min}\,(l_1 + a + l_4, l_3 + b + l_2)$ est supérieure à l_5, qu'on introduise la contrainte (α, β) ou la contrainte (β, α), on aura $t_j - t_i \geqslant l_6$. On peut donc introduire un arc conjonctif allant de i à j et de valuation l_6.

REMARQUE 1

l_6 est une fonction d'évaluation du plus long chemin allant de i à j.

REMARQUE 2

Etant donnée $[\alpha, \beta]$ une contrainte disjonctive on étudiera les prédécesseurs (resp. successeurs) communs immédiats (à définir).

REMARQUE 3

L'intérêt est particulièrement évident quand on a des sous-graphes de ce type en série.

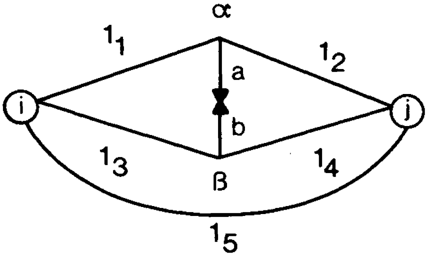

Figure 2

3. Prédécesseurs immédiats, successeurs immédiats

Soit Y une partie de X, on pourrait appeler prédécesseur immédiat de Y tout sommet de $X - Y$ prédécesseur d'au moins un sommet de Y ; mais cette définition, intéressante quand on considère un graphe ayant un nombre minimum d'arcs, perd tout intérêt quand on considère un graphe des plus longs chemins car cette notion se confond alors avec celle d'antécédent. C'est pourquoi nous allons donner une définition plus artificielle, mais qui apportera un maximum de généralité au théorème du paragraphe suivant.

Définition

$P(P \subset X - Y)$ est un ensemble de prédécesseurs immédiats de Y si :

1. Pour tout y de Y, et, tout i de $X - Y$ antécédent de y, il existe un chemin $\mu(i, y)$ de longueur maximale allant de i à y passant par un élément p de P, *et* (1), tel que le sous-chemin allant de i à p n'emprunte que des sommets de $X - Y$

2. P est minimal pour $- l$.

On définit de manière analogue les successeurs immédiats.

(1) REMARQUE : cette hypothèse supplémentaire peut être abandonnée dans le cas des graphes des plus longs chemins.

4. Théorème

Soit $G = (X, U \cup D)$ un multigraphe disjonctif, où U est l'ensemble des contraintes conjonctives, et, D l'ensemble des contraintes disjonctives.

Définition

On dit que Y est une partie de X disjonctivement indépendante si :

1. Y ne contient ni l ni n.

2. Il n'y a pas de contraintes disjonctives entre un sommet de Y et un sommet de $X - Y$.

Théorème

Soit Y une partie disjonctivement indépendante ; s'il existe un arbitrage AY des contraintes disjonctives de Y qui n'augmente pas le chemin le plus long allant de p à s (de longueur l_{ps}) pour tout p (resp. : s) prédecesseur (resp. successeur) immédiat de Y, il y a un arbitrage A^* optimal admettant AY comme sous-arbitrage.

On pourra alors supprimer les sommets de Y sous réserve d'introduire des arcs (p, s) de valuation l_{ps}.

Preuve

Soient $G0$ *le graphe obtenu* en rajoutant au graphe initial les arcs (p, s) de valuation l_{ps}.

$G1$ *le graphe obtenu* en rajoutant à $G0$ les arcs d'un arbitrage $A1$ des disjonctions de $X - Y$.

$G2$ *le graphe obtenu* en rajoutant à $G1$ les arcs de l'arbitrage AY.

Considérons un chemin μ de $G2$ allant de l à n, nous allons associer à μ un chemin μ' de $G1$ plus long que μ et, n'empruntant que des sommets de $X - Y$.

Si $\mu \cap Y = \emptyset$ on pose $\mu' = \mu$; $G2$ est obtenu à partir de $G1$ en rajoutant des éléments de $Y \times Y$; les arcs de μ appartenant à $X - Y \times X - Y$ sont aussi des arcs de $G1$, donc μ est un chemin de $G1$.

Sinon on supprime un par un les éléments de cette intersection de la manière suivante : soit y un tel élément ($y \in \mu \cap Y$), soit i (resp. : j) l'élément de $X - Y$ le plus proche de y sur le sous-chemin de μ allant de l à y (resp. de y à n).

Nous allons remplacer le sous-chemin $C2$ (dans $G2$) de μ, allant de i à j, par un chemin $C1$ de $G1$ plus long que $C2$ et n'empruntant que des sommets de $X - Y$.

$C2$ s'écrit $iy_1 y_2 \dots y_p j$, où $y_1 y_2 \dots y_p$ sont des éléments de Y ; pour obtenir $G2$, on a rajouté à $G0$ des éléments de $Y \times Y$ et de $X - Y \times X - Y$, l'arc (i, y_1) élément de $X - Y \times Y$ et arc de $G2$, est donc aussi un arc de $G0$ (même raisonnement pour (y_p, j)) d'après la définition des prédécesseurs et des successeurs immédiats, il existe dans $G0$ un chemin maximal $\mu(i, y_1)$ (resp. :

$\mu(y_p, j)$) et un prédécesseur (resp. : successeur) immédiat p (resp. : s) tel que le sous chemin de $\mu(i, y_1)$ (resp. : $\mu(y_p, j)$) allant de i à p (resp. : de s à j) n'emprunte que des éléments de $X - Y$; remplaçons d'abord dans $C2$ les arcs (i, y_1) et (y_p, j) par les chemins $\mu(i, y_1)$ et $\mu(y_p, j)$ on obtient un chemin $C'1$ plus long que $C2$; remplaçons dans $C'1$ le sous-chemin allant de p à s par l'arc (p, s) de valuation l_{ps}, on obtient alors un chemin $C1$ de $G1$ plus long que $C2$ qui n'emprunte que des sommets de $X - Y$.

En remplaçant $C2$ par $C1$ dans μ, on obtient un nouveau chemin μ_1 plus long que μ et tel que :

$$|\mu_1 \cap Y| < |\mu \cap Y|.$$

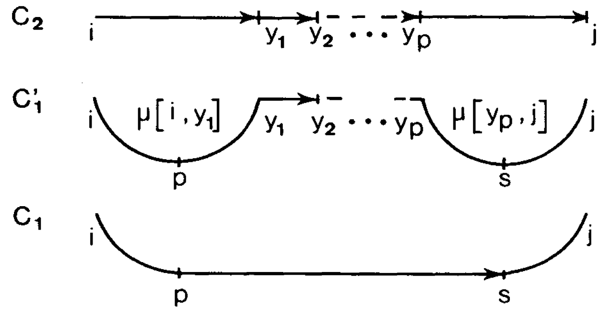

Figure 3

On itère si la nouvelle intersection n'est pas vide ; on trouve finalement un chemin de $G2$ n'empruntant que des sommets de $X - Y$ donc un chemin de $G1$ (cf. raisonnement pour $\mu \cap Y = \emptyset$).

Supposons maintenant que $A1$ soit un sous-arbitrage d'un arbitrage A^* optimal de graphe associé $G3$; $G1$ est alors un sous-graphe de $G3$. Le raisonnement précédent permet d'affirmer que le plus long chemin de $G2$ est de longueur inférieur au plus long chemin de $G1$, donc de $G3$ sur-graphe de $G1$; cela entraîne que $A1 \cup AY$ est optimal.

REMARQUE 1

Le théorème se généralise de la manière suivante :

Soit Y une partie de X, ne contenant ni 1 ni n, partitionnée en deux ensembles $Y1$ et $Y2$ tel qu'il n'y ait pas de disjonctions entre des sommets de $Y1$ et des sommets de $X - Y$.

Soit P (resp. : S) une partie de X contenant $Y2$, et, ensemble de prédécesseurs (resp. : successeurs) immédiats de $Y1$; si AY est un arbitrage des contraintes disjonctives de $Y \times Y$ qui n'augmente le chemin le plus long allant de p à s (pour tout p et tout s), il y a un arbitrage optimal admettant AY comme sous-arbitrage.

On pourra supprimer $Y1$ sous réserve d'introduire des arcs $(p\,;\,s)$ de valuation 1_{ps}.

REMARQUE 2

L'idée de ce théorème est d'essayer de traiter localement un problème disjonctif; il n'est pas utilisé dans l'exemple ni dans l'algorithme mais devrait avoir de nombreuses applications pratiques.

REMARQUE 3

Dans le cas du problème fondamental, les parties de X disjonctivement indépendantes forment une partition de $X - \{ l, n \}$.

Corollaire 1

Si Y est inclus dans $X - \{ l, n \}$ et, s'il n'y a pas d'arcs disjonctifs faisant intervenir les sommets de Y, sous réserve d'introduire certaines contraintes conjonctives, on peut supprimer Y.

Corollaire 2

Soient un sous-projet d'entrée E et de sortie S, Y l'ensemble des tâches de sous-projet; on peut d'abord arbitrer les disjonctions de ce sous-projet, puis introduire un arc (E,S) valué par le plus long chemin de ce sous-projet, enfin supprimer Y.

Corollaire 3

Soit $[\alpha, \beta]$ une contrainte disjonctive; si $Y = \{ \alpha, \beta \}$ satisfait aux conditions du théorème, on sait arbitrer la disjonction et supprimer les sommets α et β.

V. UN ALGORITHME

Soit un problème d'ordonnancement dont les contraintes non conjonctives sont formulables en termes d'ensembles critiques.

1. Travaux préliminaires

On calcule les ensembles critiques à 2 éléments.

On considère le problème disjonctif associé où on ne tient compte que des contraintes disjonctives et conjonctives.

On applique les règles 4 et 6, permettant de supprimer certains sommets du graphe, et de se ramener à un problème fondamental.

On applique, pour chaque disjonction, la règle 7 qui nous introduit des arcs conjonctifs permettant éventuellement de supprimer certains sommets (théorème), certaines disjonctions (dont l'arbitrage devient trivial).

2. Méthode arborescente

Le graphe a n sommets, et, m contraintes disjonctives.

On se propose de mettre en œuvre une méthode PSES de fonction d'évaluation t_n.

Les sommets de l'arborescence seront stockés dans une pile, sous forme de trois tableaux.

a. Une matrice des plus longs chemins (la fonction d'évaluation est un élément extrême de cette matrice) de taille $n \times n$.

b. Un tableau de dimension m, qui donne pour la k-ième contrainte disjonctive le nombre NB(k) de fois où la règle 7 a été appliquée à cette disjonction.

c. Un tableau de dimension m, qui donne l'état ETAT (k) de la k-ième disjonction (arbitrée dans le sens $+$, le sens $-$, non arbitrée).

A. Initialisations

On aura avantage à avoir un bon ordonnancement réalisable qui donne une évaluation de f^* (temps minimum) ; cela pourra se faire par des méthodes classiques dans le cas où les a_{ij} sont positifs ; sinon on posera $f^* = +\infty$.

Initialiser la pile en mettant dans celle-ci un sommet, celui qui correspond au graphe conjonctif.

B. Méthode PSES

a. *Choix d'une disjonction*

Si la pile est vide, l'algorithme est fini ; on conclut soit en disant que le problème n'a pas de solution, soit en donnant la solution optimale.

Sinon, soit S le sommet au-dessus de la pile ; on choisit l'arc disjonctif non encore arbitrée, (α, β) qui augmente le plus t_n ; cela nous introduit deux nouveaux sommets $S1$ et $S2$. Cf. [8]. On va en b.

b. *Calculs intermédiaires*

Retirer S de la pile.

Si $f(S2) < f^*$ resp. $f(S1) < f^*$) calculer les matrices $A(S2)$ (resp. $A(S1)$) obtenues en rajoutant l'arc (β, α) (resp. (α, β)) dans la matrice $A(S)$.

(Si $f(S2) \geqslant f^*$ ce calcul est inutile car $S2$ ne sera pas mis dans la pile.)

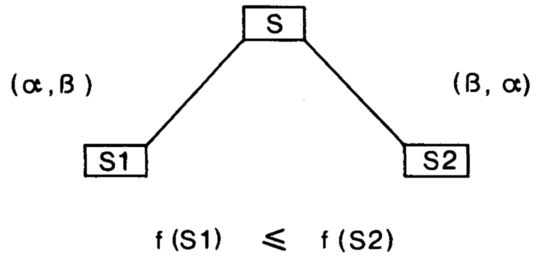

Figure 4

Si on doit calculer $A(S2)$ (resp. $A(S1)$), on appliquera la règle 7 à un petit nombre de contraintes disjonctives $[i, j]$ qui rendent minimales les quantités :

$$NB(S, i, j)/(a_{ij} + a_{ji})$$

on aura alors une meilleure évaluation de $f(S2)$ (resp. $f(S1)$ qui peut nous amener éventuellement au rejet de $S2$ (resp. $S1$) si $S1$ et $S2$ ont été tous deux rejetés, on revient en a. sinon on va en c.

c. *Mise à jour de la pile*

Changer éventuellement d'indexation de manière que $f(S1) \leqslant f(S2)$. Si $S1$ et $S2$ sont des sommets terminaux (i.e. toutes les disjonctions ont été arbitrées) $S1$ est une solution meilleure que toutes celles déjà rencontrées. Poser $f^* = f(S1)$. Ecrire $S1$ et revenir en a. Sinon, on met $S2$ au-dessus de la pile, si nécessaire, puis $S1$.

3. Méthode sérielle

On a alors géré les contraintes les plus difficiles : il est donc justifié de mettre en œuvre une méthode sérielle, dans laquelle on donne la priorité aux tâches ayant les marges libres les plus faibles dans l'ordonnancement trouvée en 2.

REMARQUE

S'il y a beaucoup d'ensembles critiques à 3 éléments, on pourra envisager de mettre en œuvre une méthode PSES pour les ensembles critiques de cardinal 3 avant de faire la méthode sérielle.

VI. UN EXEMPLE

Le tableau ci-dessous décrit le problème :

Références i des taches	Exigences conjonctives	Durée	Corporation 1	Corporation 2
1	5 jours depuis 0	16	1 équipe	7 hommes
2	1 jour depuis 0	14	1	10
3	3 jours depuis 0	10		11
4	1, et 2 achevés	8		15
5	2 avancée au 6/7	10		17
6	2 avancée au 5/7 3 avancée au 7/10	6		25
7	4, 5, 6 achevées 10 à moitié achevée	17	1	4
8	4, 5 achevées	18	1	3
9	4, achevées	8	1	10
10	6, 8 achevées 9 au 7/8	8		20, puis 15, puis 10
11	10 achevée	15	1	12

On dispose d'une équipe de la corporation 1 et de 30 hommes de la corporation 2.

La tâche 10 est décomposée en trois tâches 10 *a*, 10 *b*, 10 *c* de durées respectives 4, 2 et 2 (cf. fig. 5).

1. Travaux préliminaires

A. La corporation 1

La corporation 1 nous introduit une clique de disjonction à 6 éléments { 1, 2, 7, 8, 9, 11 } ; du fait de l'existence de certains chemins positifs *cette clique* se réduit à trois disjonctions : [1, 2], [8, 7], [7, 11].

B. La corporation 2

Les disjonctions [2, 6], et [3, 6] s'arbitrent en introduisant des arcs (2, 6), et, (3, 6) de valuations 14 et 10.

Les disjonctions [3, 10 *a*], (4, 10 *a*], (5, 10 *a*], (5, 10 *b*], (6, 10], [6, 11], [10, 11] sont trivialement vérifiés du fait de l'existence de chemins positifs. *Il reste à arbitrer cinq disjonctions* : [1, 6], [4, 5], [4, 6], [5, 6], [6, 7].

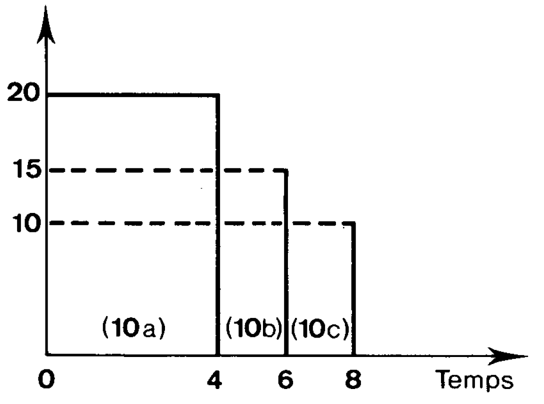

Figure 5

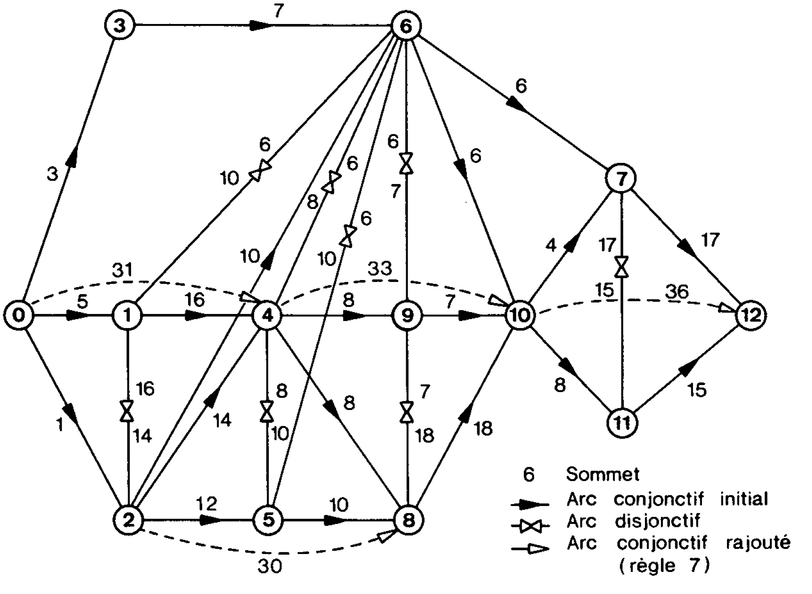

Figure 6

C. Règle 7

On considère le problème à huit disjonctions défini ci-dessus. La règle 7 nous introduit quatre arcs :

(0, 4) de valuation 31
(4, 10) de valuation 33
(10, 12) de valuation 36
(2, 8) de valuation 30

EXEMPLE

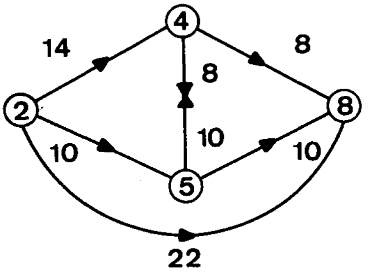

Figure 7

$$\text{Inf}\,(12 + 10 + 8{,}14 + 8 + 10) = \text{Inf}\,(30, 32) = 30$$

qui est supérieur à 22.

2. Méthode PSES

Elle conduit directement à l'optimum ; il n'a pas été nécessaire d'appliquer une nouvelle fois la règle 7.

3. Méthode sérielle

En plaçant en priorité les tâches ayant les plus petites marges, on trouve un ordonnancement optimal. La figure 9 en donne le diagramme de Gantt.

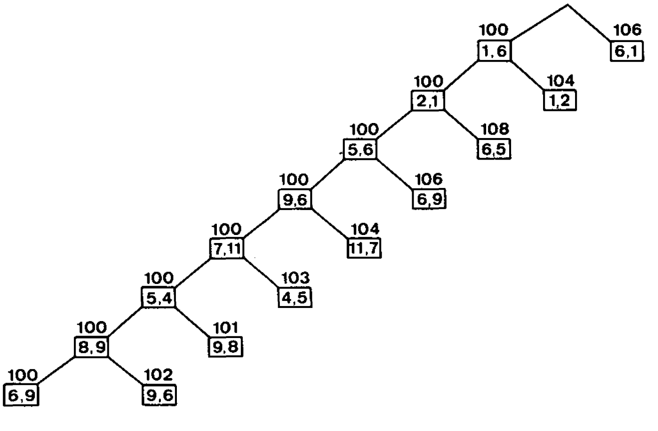

Figure 8

α, β arc disjonctif choisi, conduisant à l'évaluation v

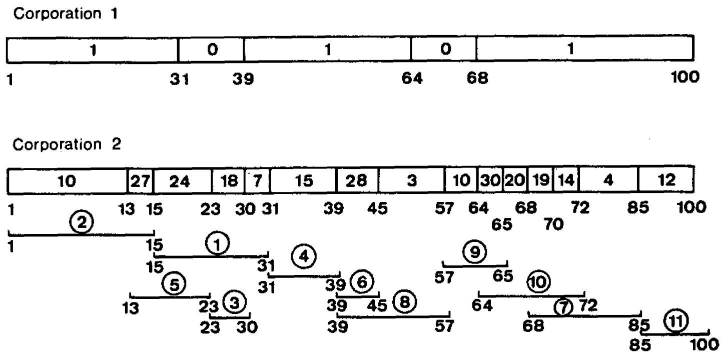

Figure 9

Diagramme de Gantt

L'axe des temps est en abscisse

CONCLUSION

L'algorithme ci-dessus basé sur la règle 7, donne une bonne évaluation des plus longs chemins entre deux sommets ; il est cependant limité aux graphes disjonctifs fondamentaux n'ayant pas plus d'une cinquantaine de sommets.

Pour les graphes plus importants, les idées développées dans cet article doivent être fructueuses car, elles amènent à décomposer un problème en plusieurs sous-problèmes ; ainsi dans l'exemple décrit dans [9], la règle 7 et le corollaire 3 permettent d'arbitrer définitivement les disjonctions, une par une, et donc d'obtenir immédiatement l'optimum.

Remerciements. — Je remercie M. J. L. Laurière des conseils qu'il m'a prodigués lors de cette étude. Je remercie aussi M. Yves Tabourier de ses informations.

BIBLIOGRAPHIE

[1] E. BALAS, *Disjunctive graph and degree constrained subgraph*, Naval research logistics quarterly, March 70, vol. 17, n° 1, 1970.

[2] C. BERGE, *Graphes et hypergraphes* (1970).

[3] R. FAURE, Polycopié de théorie des Graphes (Paris 6), 1969.

[4] I. NABESCHIMA, *Algorithms and reliable heuristic programs for multiproject scheduling with resource constraints and related parallel scheduling*, University of electro-communications, Chofu Tokio, Japan, 1973.

[5] J. L. LAURIÈRE, *Sur la coloration de certains hypergraphes. Application aux problèmes d'emploi du temps.* Thèse de 3e cycle (Paris 6) ; 1970.

[6] B. ROY, *Algèbre moderne et théorie des graphes* (tome 2), 1970.

[7] B. ROY, *Cheminement et connexité dans les graphes*, Application aux problèmes d'ordonnancements, METRA n° 1, 1962.

[8] Y. TABOURIER, *Ordonnancements à contraintes purement disjonctives*, RIRO, 1969.

[9] A. DURAND, *Une méthode optimale de traitement des contraintes disjonctives dans les problèmes d'ordonnance*, RIRO, 1967, n° 3, p. 49-61.