REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

J. L. NICOLAS

Sur un problème d'optimisation en nombres entiers de T.L. Saaty

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 9, n^{o} V2 (1975), p. 67-82

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_2_67_0>

R.A.I.R.O.
(9e année, juin 1975, V-2, p. 67 à 82)

SUR UN PROBLEME D'OPTIMISATION EN NOMBRES ENTIERS DE T. L. SAATY (*)

par J. L. NICOLAS (1)

Résumé. — *On résout le problème suivant : Etant donné un entier C, trouver des entiers n,* x_1, $x_2, \ldots, x_n$, *tels que* $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = C$ *et maximisant la quantité* $\prod_{i=1}^{n} (x_i)^i$.

INTRODUCTION

Dans son livre *Optimization in integers and related extremal problems*, Thomas L. SAATY étudie le problème suivant : ([5], p. 191-197).

Problème 1

Etant donné un entier C, trouver un entier n et des entiers $x_1, \ldots, x_n$, satisfaisant la contrainte :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = C$$

et maximisant la quantité

$$\prod_{i=1}^{n} x_i^i$$

ou ce qui est équivalent, maximisant

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} i \log x_i .$$

(*) Reçu avril 1974.

(1) Département de Mathématiques. UER des Sciences de Limoges.

Après avoir énoncé ce problème, T. L. Saaty, démontre le lemme 1 ci-dessous, ainsi que plusieurs inégalités, qui permettent d'obtenir une solution graphique du problème 1 pour une valeur numérique donnée de C. Il résout en particulier le problème 1 pour $C = 100$.

Lemme 1

Les x_i, solutions du problème 1 vérifient :

$$1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant 3 .$$

La solution du problème 1 est déterminée par les trois entiers n, r, s :

$$\begin{aligned} x_1 = x_2 = \cdots = x_r &= 1 \\ x_{r+1} = x_{r+2} = \cdots = x_{r+s} &= 2 \\ x_{r+s+1} = \cdots = x_n &= 3 \end{aligned}$$

les nombres n, r, s sont liés par la relation :

$$C = 3\,n - r - (r + s) . \tag{1}$$

Démonstration

Il est clair que pour maximiser $\prod_{i=1}^{n} x_i^i$, les x_i doivent être rangés par ordre croissant. Il reste à montrer que $x_n \leqslant 3$. Si $x_n = 4$, on trouve une meilleure solution avec $x_n = 2$ et $x_{n+1} = 2$. Si $x_n = m \geqslant 5$, on trouve une meilleure solution avec $x_n = m - 3$ et $x_{n+1} = 3$ puisque l'on a :

$$(m - 3)^n\, 3^{n+1} > (m - 3)^n\, 3^n \geqslant m^n .$$

Enfin la relation (1) est obtenue en remplaçant dans la contrainte $\sum_{i=1}^{n} x_i = C$ les variables x_i par leurs valeurs.

Nous nous proposons de démontrer le théorème suivant qui donne une solution générale du problème 1. On désigne par $[x]$ la partie entière de x et par $\{ x \}$ sa partie fractionnaire. On a donc :

$$x = [x] + \{ x \} \qquad \text{avec} \qquad 0 \leqslant \{ x \} < 1 .$$

Théorème 1

Soit

$$a = \frac{\log 2}{\log 3} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{3\,a(1 - a)}{9\,a(1 - a) - 1} .$$

La solution (n, r, s) du problème 1 peut être obtenue de la façon suivante :

1° On pose $N = [(C - 1)\,b]$ et $\tau = \{ (C - 1)\,b \}$.

On a toujours $n = N$ ou $n = N + 1$.

i) Si

$$\tau > \tau_0 = 1 - \frac{1}{9\,a(1-a) - 1} = 0{,}087\,3$$

alors $n = N + 1$.

ii) Si $\tau < \tau_0$, on calcule :

$$R = [(3\,N - C + 1)\,(1 - a)]\,, \qquad R + S = [(3\,N - C + 1)\,a]$$

et

$$\varepsilon = \{\,(3\,N - C + 1)\,a\,\}\,.$$

Si $\varepsilon < 2 - 3\,a = 0{,}107\ldots$ et si l'inégalité :

$$N - (R + S) > a(2\,R - (R + S) + 2)$$

est satisfaite, $n = N + 1$, sinon $n = N$.

Si $\varepsilon > 2 - 3\,a$ et si l'inégalité :

$$a(2(R + S) - R + 2) > 2(R + S) + 2 - N$$

est satisfaite, $n = N + 1$, sinon $n = N$.

2° Le nombre n étant déterminé, les nombres r et s définis dans le lemme 1 valent :

$$r = [(3\,n - C + 1)\,(1 - a)] \qquad \text{et} \qquad r + s = [(3\,n - C + 1)\,a]\,.$$

Au paragraphe 1, nous allons d'abord étudier quelques propriétés de la fonction $[x]$. Au paragraphe 2, nous étudierons le problème 1 lorsque n est fixé, et $x_i \leqslant 3$ pour $1 \leqslant i \leqslant n$, avant de démontrer le théorème 1 (paragraphe 3). Enfin au paragraphe 4, nous verrons une autre méthode de résolution qui s'appuie sur les méthodes d'optimisation en nombres réels. Une table numérique est donnée à la fin.

Au paragraphe 2, pour résoudre le problème 1 avec n fixé, nous utiliserons la méthode des multiplicateurs de Lagrange en nombres entiers qui a été utilisée en Théorie des nombres par Ramanujan pour étudier les nombres hautement composés (cf. [3] et [4]).

1. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION « PARTIE ENTIÈRE »

On désigne par $[x]$ la partie entière du nombre réel x. C'est le plus grand entier $\leqslant x$. On a les propriétés suivantes, pour m et n entiers, x et y réels :

$$[n + x] = n + [x] \tag{1}$$

$$[x] + [n - x] = n - 1 \qquad \text{si} \qquad x \notin \mathbf{Z} \tag{2}$$

$$m \geqslant [nx + y] \Leftrightarrow n \leqslant \left[\frac{m + 1 - y}{x}\right] \tag{3}$$

si $nx + y \notin \mathbf{Z}$ et $x > 0$

$$m \geqslant [nx] \Leftrightarrow n \leqslant \left[\frac{m+1}{x}\right] \tag{4}$$

si $nx \notin \mathbf{Z}$ et $x > 0$.

Démonstration de (2)

On écrit $x = [x] + \alpha$ avec $0 < \alpha < 1$ d'où

$$n - x = n - [x] - \alpha = (n-1) - [x] + 1 - \alpha$$

avec $0 < 1 - \alpha < 1$ donc $[n - x] = n - 1 - [x]$.

Démonstration de (3)

On a les équivalences successives :

$$\begin{aligned} m \geqslant [nx + y] &\Leftrightarrow m - [nx + y] \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow [m - nx - y + 1] \geqslant 0 \quad \text{en utilisant (2)} \\ &\Leftrightarrow m - nx - y + 1 \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{m + 1 - y}{x} - n \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow \left[\frac{m + 1 - y}{x} - n\right] \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow n \leqslant \left[\frac{m + 1 - y}{x}\right]. \end{aligned}$$

Démonstration de (4)

Si l'on fait $y = 0$ dans (3), on obtient (4).

REMARQUES

Pour utiliser les formules (2), (3) et (4), on aura à s'assurer que certaines quantités ne sont pas dans $\mathbf{Z}$. En fait ces quantités seront irrationnelles. Par exemple, $a = \dfrac{\log 2}{\log 3}$ est irrationnel. Si l'on avait $\dfrac{\log 2}{\log 3} = \dfrac{p}{q}$, on en déduirait $3^p = 2^q$, ce qui est impossible.

On sait même démontrer que a est transcendant (cf. [2], chapitre 3), c'est-à-dire n'est racine d'aucun polynôme à coefficients entiers. On en déduit que $b = \dfrac{3\,a(1-a)}{9\,a(1-a) - 1}$ est transcendant : Si b vérifiait une équation algébrique, en y remplaçant b par sa valeur, on trouverait une équation algébrique vérifiée par a.

2. ÉTUDE DU PROBLÈME 1 AVEC UN NOMBRE FIXE DE VARIABLES

Théorème 2

Soit n un entier fixé, et des variables x_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ ne prenant que les valeurs 1, 2 ou 3 liées par la relation

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = C .$$

Le maximum de $\prod_{i=1}^{n} x_i^i$ est obtenu :

i) Si

$$3\,n \geqslant C \geqslant \left[\frac{\log 8/3}{\log 2} n + 2 - \frac{\log 3}{\log 2}\right]$$

pour :

$$r = [(3\,n - C + 1)(1 - a)] \qquad \text{et} \qquad r + s = [(3\,n - C + 1)\,a]$$

avec

$$a = \frac{\log 2}{\log 3}.$$

ii) Si

$$1 + \left[\frac{\log 8/3}{\log 2} n\right] \geqslant C \geqslant n$$

avec

$$r = 2\,n - C \qquad \text{et} \qquad r + s = n .$$

La démonstration du théorème 2 résultera de la proposition 1 et du lemme 2.

Proposition 1 (multiplicateur de Lagrange en nombres entiers, cf. [3]).

Soit ρ un nombre réel positif, soit $E \subset \mathbf{R}^n$ et f et g des applications de $E \to \mathbf{R}$. Si la fonction $f(x) - \rho g(x)$ admet un maximum absolu sur l'ensemble E qu'elle atteint en $x^* \in E$, alors x^* est solution du problème de programmation mathématique :

$$\begin{cases} g(x) \leqslant A \\ \max f(x) \qquad \text{pour} \qquad x \in E \end{cases}$$

avec $A = g(x^*)$.

Démonstration

Soit $y \in E$, vérifiant $g(y) \leqslant A$, on a :

$$f(y) - \rho g(y) \leqslant f(x^*) - \rho g(x^*)$$

ce qui entraîne :

$$f(y) \leqslant f(x^*) - \rho(A - g(y)) \leqslant f(x^*)$$

Lemme 2

La fonction $h(u) = i \log u - \rho u$ atteint son maximum pour $u \in \{ 1, 2, 3 \}$ au point :

$$\begin{array}{lll} u = 1 & \text{si} & \rho \geqslant i \log 2 \\ u = 2 & \text{si} & i \log 2 \geqslant \rho \geqslant i \log \frac{3}{2} \\ u = 3 & \text{si} & i \log \frac{3}{2} \geqslant \rho . \end{array}$$

Démonstration

On calcule

$$h(u + 1) - h(u) = i \log \frac{u + 1}{u} - \rho$$

pour $u = 1$ et $u = 2$.

Démonstration du théorème 2

On applique la proposition 1 à l'ensemble $E \subset \mathbf{R}^n$ formé des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, chaque x_i ne prenant que les valeurs 1, 2, 3. On pose

$$g(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i \qquad \text{et} \qquad f(x) = \sum_{i=1}^{n} i \log x_i .$$

Pour tout nombre réel $\rho > 0$, la fonction $f(x) - \rho g(x)$ atteint son maximum sur E en un point $x^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ et les valeurs de x_i^* sont données par le lemme 2 : On a :

$$\begin{cases} x_1^* = \cdots = x_r^* = 1 & \text{avec} \quad r = \min\left(\left[\dfrac{\rho}{\log 2}\right], n\right) \\ x_{r+1}^* = \cdots = x_{r+s}^* = 2 & \text{avec} \quad r + s = \min\left(\left[\dfrac{\rho}{\log 3/2}\right], n\right) \end{cases} . \tag{5}$$

Si l'on choisit ρ différent d'un multiple de log 2 ou de log 3/2, le maximum est atteint en un seul point de E.

En choisissant différentes valeurs de ρ, il se trouve que l'on peut obtenir pour

$$g(x^*) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*$$

n'importe quelle valeur comprise entre n et 3 n.

Posons

$$\alpha = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3/2} .$$

Soit m un entier et faisons $\rho = \dfrac{m}{\alpha}$.

Si $\rho < (n+1)\log 3/2$, c'est-à-dire si :

$$m < (n+1)\frac{\log 3}{\log 2}$$

on a par (5) :

$$r = \left[\frac{\rho}{\log 2}\right] = \left[\frac{m \log 3/2}{\log 3}\right] = [m(1-a)]$$

$$r + s = \left[\frac{\rho}{\log 3/2}\right] = \left[\frac{m \log 2}{\log 3}\right] = [ma] .$$

D'après la formule 2,

$$r + r + s = [ma] + [m(1-a)] = m - 1$$

et d'après la formule 1

$$C = 3n - (r + r + s) = 3n - m + 1 .$$

En choisissant

$$\rho = \frac{m}{\alpha} \qquad \text{avec} \qquad m = 1, 2, \ldots, \left[(n+1)\frac{\log 3}{\log 2}\right]$$

on obtient ainsi une solution du problème 1, pour les valeurs suivantes de C :

$$C = 3n, 3n - 1, \ldots, 3n - \left[(n+1)\frac{\log 3}{\log 2}\right] + 1 ,$$

solution qui est fournie par

$$r = [(3n - C + 1)(1 - a)] \qquad \text{et} \qquad r + s = [(3n - C + 1)a] .$$

Comme

$$3n - \left[(n+1)\frac{\log 3}{\log 2}\right] + 1 = \left[3n - (n+1)\frac{\log 3}{\log 2}\right] + 2$$

(formule (2)), on démontre ainsi la partie (i) du théorème 2.

Si l'on choisit $\rho > n \log 3/2$, les formules (5) donnent $r + s = n$ et la formule (1) : $C = 2n - r$.

Pour ρ légèrement supérieur à $n \log 3/2$, on obtient :

$$r = \left[\frac{n \log 3/2}{\log 2}\right] \qquad \text{et} \qquad C = 2n - \left[\frac{n \log 3/2}{\log 2}\right] = \left[\frac{\log 8/3}{\log 2} n + 1\right]$$

et cela démontre la partie (ii) du théorème 2.

On remarque enfin que l'on a :

$$\left[\frac{\log 8/3}{\log 2} n + 2 - \frac{\log 3}{\log 2}\right] \leqslant \left[\frac{\log 8/3}{\log 2} n + 1\right]$$

et donc n'importe quel C, tel que $n \leqslant C \leqslant 3n$ rentre dans la partie i) ou la partie ii) du théorème 2.

3. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Une solution du problème 1 vérifie le lemme 1 et on a :

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=r+1}^{r+s} i \log 2 + \sum_{i=r+s+1}^{n} i \log 3 =$$

$$= (\log 3)\left(\frac{n(n+1)}{2} - (1-a)\frac{(r+s)(r+s+1)}{2} - a\frac{r(r+1)}{2}\right).$$

La constante C étant donnée, pour chaque valeur de n comprise entre $\frac{C}{3}$ et C, la fonction f atteint son maximum pour des valeurs de r et s fournies par le théorème 2.

Soit $h(n)$ la valeur de ce maximum. Il faut regarder pour quelle valeur de n, la fonction $h(n)$ est maximale et, pour cela, calculer $h(n+1) - h(n)$.

Lorsque

$$1 + \left[\frac{\log 8/3}{\log 2} n\right] \geqslant C \geqslant n,$$

ou ce qui est équivalent par la formule (4) lorsque :

$$1 + \left[(C-1)\frac{\log 2}{\log 8/3}\right] \leqslant n \leqslant C \tag{6}$$

on a : $r + s = n, r = 2n - C$ et

$$h(n) = \sum_{i=r+1}^{n} i \log 2 = (\log 2)\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{r(r+1)}{2}\right).$$

S'il existe deux entiers consécutifs n et $n+1$ vérifiant l'inégalité (6), on a :

$$h(n+1) - h(n) = \log 2(n + 1 - (2r+3)) = \log 2(2(C-1) - 3n)).$$

Mais en posant

$$u = \frac{\log 2}{\log 8/3},$$

l'inégalité (6) donne :

$$n \geqslant 1 + [u(C-1)] \geqslant u(C-1)$$

d'où il vient :

$$h(n+1) - h(n) \leqslant (C-1)(2-3u)\log 2 < 0 \qquad \text{pour} \qquad C \geqslant 2\,.$$

On conclut que sur l'ensemble des n vérifiant les inégalités (6), la fonction h est décroissante et donc maximale pour :

$$n = 1 + \left[\frac{\log 2}{\log 8/3}(C-1)\right].$$

Lorsque n vérifie :

$$3n \geqslant C \geqslant \left[\frac{\log 8/3}{\log 2}n + \frac{\log 4/3}{\log 2}\right]$$

ou, ce qui est équivalent, par la formule (3), lorsque n vérifie :

$$\frac{C}{3} \leqslant n \leqslant \left[C\frac{\log 2}{\log 8/3} + \frac{\log 3/2}{\log 8/3}\right] \tag{7}$$

les valeurs de r et s sont fournies par la partie (i) du théorème 2.

Comme on a :

$$1 + (C-1)\frac{\log 2}{\log 8/3} < C\frac{\log 3/2}{\log 8/3}$$

les inégalités (6) et (7) sont toutes deux vérifiées pour

$$n = 1 + \left[\frac{\log 2}{\log 8/3}(C-1)\right]$$

et le maximum de la fonction h est obtenu pour un n vérifiant les inégalités (7).

S'il existe deux entiers consécutifs n et $(n+1)$ vérifiant les inégalités (7), on calcule $h(n+1) - h(n)$:

On pose :

$$\varepsilon = \{(3n - C + 1)a\}$$

et l'on a

$$r + s = (3n - C + 1)a - \varepsilon$$

et

$$r = (3n - C + 1)(1-a) - (1-\varepsilon)\,. \tag{8}$$

On distingue deux cas :

1) Si $\varepsilon < 2 - 3a = 0{,}11\ldots$, lorsque n augmente d'une unité, $r + s$ augmente de 1 et r augmente de 2, on a alors :

$$h(n) = (\log 3)\left(\frac{n(n+1)}{2} - (1-a)\frac{(r+s)(r+s+1)}{2} - a\frac{r(r+1)}{2}\right)$$

et

$$\begin{aligned} h(n+1)-h(n) &= (\log 3)\,((n+1)-(1-a)\,(r+s+1)-a(2\,r+3)) \\ &= (\log 3)\,(n(1-9\,a(1-a))+(C-1)\,3\,a(1-a)+\varepsilon(1-3\,a)) \end{aligned} \tag{9}$$

compte tenu de (8).

2) Si $\varepsilon > 2 - 3\,a$, lorsque n augmente de 1, $r + s$ augmente de 2 et r augmente de 1, et on a :

$$\begin{aligned} h(n+1)-h(n) &= (\log 3)\,((n+1)-(1-a)\,(2(r+s)+3)-a(r+1)) \\ &= (\log 3)\,(n(1-9\,a(1-a))+(C-1)\,3\,a(1-a)-(2-3\,a)\,(1-\varepsilon))\,. \end{aligned} \tag{10}$$

Dans tous les cas, on a :

$$h(n+1) - h(n) = (\log 3)\,(9\,a(1-a) - 1)\,(-n + (C-1)\,b - \theta(\varepsilon)) \tag{11}$$

avec

$$b = \frac{3\,a(1-a)}{9\,a(1-a) - 1}$$

et :

$$\theta(\varepsilon) = \begin{cases} \dfrac{(2-3\,a)\,(1-\varepsilon)}{9\,a(1-a)-1} & \text{si} \quad \varepsilon > 2 - 3\,a\,. \\ \dfrac{(3\,a-1)\,\varepsilon}{9\,a(1-a)-1} & \text{si} \quad \varepsilon < 2 - 3\,a\,. \end{cases} \tag{12}$$

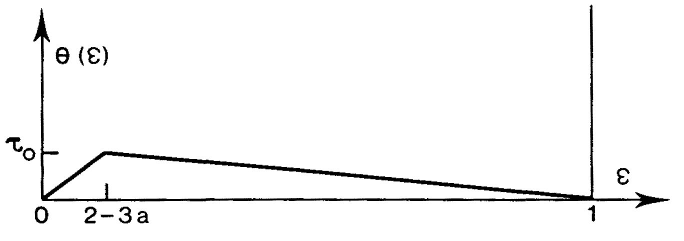

Figure 1.

On remarque que

$$\theta(\varepsilon) \leqslant \theta(2 - 3\,a) = \tau_0 = 1 - \frac{1}{9\,a(1-a) - 1} = 0{,}087\,3\,.$$

Discussion de l'égalité (11)

Si l'on pose $(C-1)\,b = N + \tau$ avec $0 \leqslant \tau < 1$, on a :

$$h(n+1) - h(n) = (\log 3)\,(9\,a(1-a) - 1)\,(N - n + \tau - \theta)\,. \tag{13}$$

Pour $n \geqslant N + 1$, on a $h(n+1) - h(n) < 0$.

Pour $n \leqslant N - 1$, on a $h(n + 1) - h(n) > 0$.

Pour $n = N$, $h(n + 1) - h(n)$ est du signe de $(\tau - \theta)$.

On conclut que h atteint son maximum pour $n = N$ ou $n = N + 1$ et si $\tau > \tau_0$, le maximum est atteint pour $n = N + 1$.

Il reste à vérifier que $N = [(C - 1)\, b]$ et $N + 1$ vérifient les inégalités (7).

Comme

$$1 - b - \frac{\log 3/2}{\log 8/3} < 0$$

et que

$$b < \frac{\log 2}{\log 8/3},$$

on a toujours

$$b(C - 1) + 1 \leqslant C \frac{\log 2}{\log 8/3} + \frac{\log 3/2}{\log 8/3}$$

d'où l'on tire :

$$N + 1 = [b(C - 1)] + 1 \leqslant \left[C \frac{\log 2}{\log 8/3} + \frac{\log 3/2}{\log 8/3} \right].$$

Enfin, on aura sûrement $\frac{C}{3} \leqslant N$ si l'on a :

$$\frac{C}{3} + 1 \leqslant b(C - 1).$$

Ce qui est réalisé pour $C \geqslant 6$.

Pour $C \geqslant 6$, les nombres $n = N$ et $n = N + 1$ vérifient les inégalités (7). Pour $C \leqslant 5$, $n = N + 1$ vérifie les inégalités (7) et comme d'après la table (p. 81) on a pour $C \leqslant 5$, $\tau > \tau_0$, le théorème 1 est valable pour toutes les valeurs de C.

Etude du cas $\tau < \tau_0$

Le maximum est atteint pour $n = N$ ou $n = N + 1$ suivant le signe de

$$h(N + 1) - h(N).$$

Si $\varepsilon < 2 - 3a$, la formule (9) donne :

$$h(N + 1) - h(N) = (\log 3)\,(N - (R + S) - a(2R + 2 - (R + S)).$$

Si $\varepsilon > 2 - 3a$, la formule (10) donne

$$h(N + 1) - h(N) = (\log 3)\,(a(2(R + S) + 2 - R) - (2(R + S) + 2 - N)).$$

Ce qui démontre la partie ii) du théorème 1.

On peut donner une autre forme à la discussion du cas $\tau < \tau_0$:

Si l'on pose

$$d = \frac{a}{9\,a(1-a)+1} = (3\,b-1)\,a$$

et $(C-1)\,d = M + \zeta$ avec $M = [(C-1)\,d]$, on aura :

$$\begin{aligned}\varepsilon = \{(3\,N-(C-1))\,a\} &= \{3(C-1)\,b - 3\,\tau\}\\ &= \{(3\,b-1)\,a(C-1) - 3\,\tau\}\\ &= \{(C-1)\,d - 3\,a\tau\}\\ = \{M + \zeta - 3\,a\tau\} &= \{\varepsilon - 3\,a\tau\}.\end{aligned}$$

Comme $\tau < \tau_0$, on a : $3\,a\tau < 3\,a\tau_0$ et l'on doit distinguer 3 cas :

1) $$3\,a\tau < \zeta < 3\,a\tau + 2 - 3\,a.$$

On a alors :

$$\varepsilon = \zeta - 3\,a\tau < 2 - 3\,a$$

la formule (12) donne

$$\theta = \frac{3\,a-1}{9\,a(1-a)-1}\,\varepsilon$$

d'où l'on tire par (13) :

$$h(N+1) - h(N) = (\log 3)\,((6\,a-1)\,\tau - (3\,a-1)\,\zeta).$$

2) $\zeta < 3\,a\tau$. On a alors

$$\varepsilon = 1 + \zeta - 3\,a\tau > 2 - 3\,a,$$

ce qui donne :

$$\theta = \frac{(2-3\,a)\,(3\,a\tau-\zeta)}{9\,a(1-a)-1}$$

d'où il vient :

$$h(N+1) - h(N) = (\log 3)\,((3\,a-1)\,\tau + (2-3\,a)\,\zeta) > 0$$

3) $3\,a\tau + 2 - 3\,a < \zeta$. On a alors : $\varepsilon = \zeta - 3\,a\tau > 2 - 3\,a$ d'où l'on tire :

$$h(N+1) - h(N) = (\log 3)\,((3\,a-1)\,\tau - (2-3\,a)\,(1-\zeta)).$$

On résume les trois cas sur le graphique ci-après.

Si le couple (ζ, τ) est en dessous de la ligne en trait plein alors $n = N$. S'il est au-dessus $n = N + 1$.

L'intérêt de cette méthode est de montrer que pour $\tau < \tau_0$, il y a autant de chances d'avoir $n = N$ que $n = N + 1$: Comme les nombres b et

$$d = (3\,b-1)\,a$$

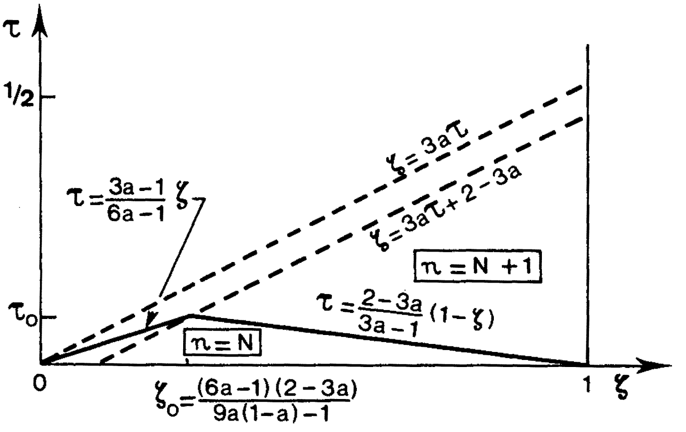

Figure 2.

sont linéairement indépendants sur **Q**, on sait (cf. : [1], chapitre XXIII) que les couples (τ, ζ) sont uniformément répartis dans le carré $(0, 1) \times (0, 1)$.

4. AUTRE MÉTHODE DE DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1

Compte tenu du lemme 1, le problème 1 revient à résoudre le problème de programmation mathématique suivant, en nombres entiers :

$$\begin{cases} -x - y + 3z = C \\ \max \psi(x, y, z) = -a\dfrac{x(x+1)}{2} - (1-a)\dfrac{y(y+1)}{2} + \dfrac{z(z+1)}{2}. \end{cases}$$

Résolvons d'abord ce problème en nombres réels. On doit avoir :

$$a\frac{2x+1}{2} = (1-a)\frac{2y+1}{2} = \frac{2z+1}{6} = \lambda$$

et l'on trouve la solution : x^*, y^*, z^* :

$$\begin{cases} x^* = (C-1)\dfrac{1-a}{9a(1-a)-1} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(3a-2)^2}{9a(1-a)-1}\right) \\ y^* = (C-1)\dfrac{a}{9a(1-a)-1} + \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(3a-1)^2}{9a(1-a)-1}\right) = M + \zeta + \dfrac{1-\zeta_0}{2} \\ z^* = (C-1)\,b + \dfrac{1/2}{9a(1-a)-1} = N + \tau + \dfrac{1-\tau_0}{2}. \end{cases}$$

Faisant le changement de variable $x = x^* + X, y = y^* + Y, z = z^* + Z$; on est amené à résoudre :

$$\begin{cases} X + Y - 3\,Z = 0 \\ \max \psi = -\,aX^2 - (1 - a)\,Y^2 + Z^2 \end{cases}$$

lorsque $X + x^*$, $Y + y^*$ et $Z + z^*$ sont entiers.

Remplaçant Y par $3\,Z - X$, on obtient :

$$\psi = -\,X^2 + 6(1 - a)\,XZ + (9\,a - 8)\,Z^2 = -\,F(X, Z)$$

avec

$$F(X, Z) = (X - 3\,(1 - a)\,Z)^2 + (9\,a(1 - a) - 1)\,Z^2\,.$$

On doit donc minimiser la quantité $F(X, Z)$.

Soit z l'entier le plus voisin de z^* et x l'entier le plus voisin de

$$x^* - 3(1 - a)\,(z - z^*)\,.$$

On a alors :

$$F(X, Z) \leqslant \frac{1}{4} + (9\,a(1 - a) - 1)\,\frac{1}{4} = \frac{9\,a(1 - a)}{4} \leqslant 0{,}53\,.$$

On peut donc toujours trouver X et Z tels que $F(X, Z) \leqslant 0{,}53$.

Inversement si

$$Z \quad > 0{,}7 > \sqrt{\frac{9\,a(1 - a)}{4(9\,a(1 - a) - 1)}}\,,$$

alors

$$F(X, Z) > \frac{9\,a(1 - a)}{4}\,.$$

Le minimum de $F(X, Z)$ est donc atteint pour une valeur de Z inférieure à 0,7 et il y a au plus deux entiers z tels que $z - z^*$ $\leqslant 0{,}7$. On retrouve ainsi le résultat du théorème 1 : il y a au plus deux choix possibles pour la valeur de n.

Applications numériques

1) $C = 100$, $(C - 1) = 99$, $(C - 1)\,b = 63{,}75 - 0{,}63 = 63{,}12$.

On a $\tau > \tau_0$ donc $n = N + 1 = 64$.

On a ensuite : $3\,n - C + 1 = 93$ d'où $r + s = 58$ et $r = 34$.

2) $C = 194$, $C - 1 = 193$, $(C - 1)\,b = 123{,}047$. On a $\tau < \tau_0$.

On a : $(3\,N - C + 1) = 176$; $R = [176(1 - a)] = 64$

$R + S = [176\,a] = 111$ et $\varepsilon = \{\,176\,a\,\} = 0{,}044 < 2 - 3\,a$.

On a ensuite

$2\,R - (R + S) + 2 = 19$; $N - (R + S) = 12$ et $19\,a = 11{,}988$

la solution est donc : $n = 124$, $r = 66$, $r + s = 112$.

VALEURS NUMERIQUES

$\log 2 = 0,69315$	$\log 3 = 1,09861$	$\log 3/\log 2 = \frac{1}{a} = 1,58496$
$1/\log 2 = 1,44270$	$1/\log 3 = 0,91024$	$\log 2/\log 3 = a = 0,63093$
$\frac{\log 8/3}{\log 2} = 3 - \frac{\log 3}{\log 2} = 1,41504$	$\frac{\log 2}{\log 8/3} = 0,70670$	$\frac{\log 3/2}{\log 8/3} = 0,41339$
$\alpha = \frac{1}{\log 2} + \frac{1}{\log 3/2} = 3,90900$	$\frac{1}{\alpha} = 0,25582$	$\frac{1}{\log 3/2} = 2,46630$
$9\,a(1-a)-1 = 1,09572$	$\frac{2-3\,a}{9\,a(1-a)-1} = 0,09785$	$\frac{3\,a-1}{9\,a(1-a)-1} = 0,81480$
$\frac{1}{9\,a(1-a)-1} = 0,91265$	$d = \frac{a}{9a(1-a)-1} = 0,57581$	$\frac{1-a}{9\,a(1-a)-1} = 0,33683$
$\frac{(3\,a-2)^2}{9\,a(1-a)-1} = 0,01049$	$\frac{(3a-1)^2}{9\,a(1-a)-1} = 0,72744$	$\frac{9\,a(1-a)}{4} = 0,52393$
$\frac{3\,a-1}{6\,a-1} = 0,32050$	$\frac{2-3\,a}{3\,a-1} = 0,12008$	$\zeta_o = \frac{(6a-1)(2-3a)}{9a(1-a)-1} = 0,27256$
$\tau_o = 1 - \frac{1}{9a(1-a)-1} = 0,08736$	$2 - 3a = 0,10721$	$\sqrt{\frac{9a(1-a)}{4(9a(1-a)-1)}} = 0,69149$

TABLE des MULTIPLES de b, a, 1 -a

	b	a	$1-a$
1	0.6375483	0.6309298	0.3690702
2	1.2750965	1.2618595	0.7381405
3	1.9126448	1.8927893	1.1072107
4	2.5501930	2.5237190	1.4762810
5	3.1877413	3.1546488	1.8453512
6	3.8252895	3.7855785	2.2144215
7	4.4628378	4.4165083	2.5834917
8	5.1003860	5.0474380	2.9525620
9	5.7379343	5.6783678	3.3216322
10	6.3754825	6.3092975	3.6907025

RÉFÉRENCES

[1] HARDY (G. H.) and WRIGHT (E. M.) *An Introduction to the theory of numbers*, 4th edition, Oxford, at the Clarendon Press, 1960.

[2] LANG (S.), *Introduction to the transcendental numbers*, New York, Addison Wesley, 1966 (Addison Wesley Series in Mathematics).

[3] NICOLAS (J. L.), *Des exemples de programmation non linéaire en théorie des nombres*, Séminaire de théorie des nombres Delange-Pisot-Poitou, 14e année, 1972-73, n° 10, 11 p.

[4] RAMANUJAN (S.), *Highly composite numbers*, Proc. London math. Soc., series 2, t. 14, 1915, p. 347-400 and Collected papers, p. 78-128, Cambridge, at the University Press, 1927.

[5] SAATY (T. L.), *Optimization in integers and related extremal problems*, McGraw-Hill, 1970.