

A. HAURIE

B. JACQUET

A. VAN PEETERSSEN

**Commande optimale d'un modèle  
économétrique du Canada**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 9, n° V2 (1975), p. 5-31

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1975\\_\\_9\\_2\\_5\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_2_5_0)

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## COMMANDE OPTIMALE (\*) D'UN MODELE EGONOMETRIQUE DU CANADA

par A. HAURIE, B. JACQUET et A. VAN PEETERSSEN (1)

---

*Résumé. — Un modèle économétrique du Canada de dimension moyenne est considéré comme un système dynamique dont les commandes sont le taux de change et les dépenses d'investissement du gouvernement. La commande optimale relativement à un critère faisant intervenir l'inflation, la consommation, le déficit de la balance des paiements et le chômage est calculée. Un problème déterministe est résolu par la méthode des multiplicateurs de Hestenes. Le problème stochastique est ensuite considéré comme une adaptation de la commande aux perturbations. La méthode de Kalman est utilisée.*

*Cette recherche a bénéficié d'une subvention du Conseil des Arts du Canada (S73935) et a été présentée au colloque « Structures Economiques et Econométriques » de l'Association Rhodanienne pour l'Avancement de l'Econométrie (Lyon 1974).*

### 1. INTRODUCTION

Cette étude a pour but d'explorer la possibilité d'utiliser les techniques modernes de commande optimale des systèmes pour définir des politiques économiques à partir d'un modèle économétrique.

Depuis quelques années, l'idée d'utiliser une technique d'optimisation plutôt qu'une simulation pour tester un modèle économétrique ou explorer diverses politiques économiques a été avancée par plusieurs auteurs (cf. références [1]-[5]). Pour le Canada l'étude de Holbrook [4] est particulièrement importante. Les difficultés majeures à surmonter dans cette approche sont en particulier les suivantes :

— Un modèle économétrique est en général un système stochastique non linéaire, défini par des équations implicites.

— La dimension du problème d'optimisation est souvent très grande.

---

(\*) Reçu août 1974.

(1) Ecoles des Hautes Etudes Commerciales. Affiliée à l'Université de Montréal.

Dans cette étude nous proposons de chercher une solution approximative au problème sous la forme d'une politique en boucle ouverte adaptée. La politique en boucle ouverte est obtenue comme la solution d'un problème déterministe. L'adaptation de la commande aux perturbations est envisagée comme un problème de régulation au voisinage d'une trajectoire et d'une politique nominales. Pour réaliser l'optimisation du système déterministe associé, nous utiliserons la méthode récemment proposée par Hestenes [8] et détaillée en [9]-[11] sous le nom de méthode des multiplicateurs ou aussi du Lagrangien généralisé.

En section 2, nous exposons le problème général de la commande optimale d'un modèle économétrique. En section 3, nous présentons la méthode des multiplicateurs telle que nous l'avons utilisée. En section 4, le problème de l'adaptation de la commande est abordé. En section 5, le modèle économétrique est exposé. Les résultats de l'optimisation du système déterministe sont donnés en section 6 et ceux de l'adaptation de la commande en section 7. Deux annexes décrivant respectivement l'organisation des programmes et la technique de Kalman complètent l'exposé.

## 2. COMMANDE OPTIMALE ET MODÈLES ÉCONOMÉTRIQUES

Un modèle économétrique est la représentation mathématique de l'économie, c'est-à-dire, en général, d'un système dynamique, stochastique, non linéaire et héréditaire. Ainsi une spécification économétrique peut généralement se mettre sous la forme d'un ensemble de relations :

$$\Phi^i[y(i), y(i-1), \dots, y(i-\delta); z(i), z(i-1), \dots, z(i-\delta); \\ u(i), u(i-1), \dots, u(i-\delta); \varepsilon(i)] = 0, \quad i = \delta, \delta+1, \dots, K \quad (2.1)$$

où

$y(i)$  est le vecteur des  $v$  variables endogènes en période  $i$ .

$z(i)$  est le vecteur des  $\mu$  variables exogènes non commandables en période  $i$ .

$u(i)$  est le vecteur des  $\eta$  variables de décision en période  $i$ .

$\varepsilon(i)$  est le vecteur des perturbations aléatoires en période  $i$ .

Le problème de l'estimation des paramètres d'une spécification économétrique a été le principal objet d'investigation de la part des économètres. Cependant une fois le modèle obtenu se pose le problème de son utilisation pour analyser les différentes politiques économiques possibles. A ce point, en général, on procède par simulation de façon à tester différents scénarios. La difficulté majeure, comme dans toute simulation, provient de la multiplicité des scénarios ou des politiques envisageables. Les techniques d'optimisation peuvent alors être d'une grande utilité pour guider l'expérimentateur. On considère ainsi un critère de performance, construit à partir de différents objectifs dont on spécifie l'importance relative, et on cherche les politiques

rendant minimal ce critère. Par un choix approprié des objectifs et des pondérations on peut alors explorer systématiquement toute une classe de politiques efficaces. Ce critère prendra la forme :

$$f(\bar{y}, \bar{u}, \bar{z}) \triangleq \sum_{i=\delta}^K g^i[y(i), \dots, y(i-\delta); z(i), \dots, z(i-\delta); u(i), \dots, u(i-\delta); \varepsilon(i)] \quad (2.2)$$

Malheureusement, il n'existe pas de méthode générale pour optimiser des systèmes stochastiques aussi généraux que (2.1) et (2.2). On est donc amené à procéder de la façon heuristique suivante :

i) On considère le système déterministe obtenu en remplaçant dans (2.1) et (2.2) chaque vecteur aléatoire  $\varepsilon(i)$  par son espérance mathématique (en général nulle).

ii) On procède à l'optimisation de ce système déterministe et on obtient une *politique optimale en boucle ouverte*

$$\bar{u}^* = \{ u^*(i) : i = \delta, \dots, K \}$$

et une *trajectoire nominale*

$$\bar{y}^* = \{ y^*(i) : i = \delta, \dots, K \}.$$

iii) On définit un système auxiliaire, linéaire, à coûts quadratiques et à bruit gaussien (système L.Q.G.) en considérant les variations premières des équations d'état fournies par (2.1) au voisinage de  $(\bar{u}^*, \bar{y}^*)$  et la variation seconde du critère (2.2) sous les contraintes (2.1).

iv) On calcule à partir de ce système L.Q.G. la stratégie de commande optimale qui définit une politique d'adaptation de la commande en boucle ouverte  $\bar{u}^*$  aux perturbations aléatoires affectant la trajectoire  $\bar{y}^*$ . Cette adaptation se fait au moyen d'un retour d'état linéaire (linear feedback)

$$\delta u^*(i) = -c(i) \delta y^*(i) - d(i), \quad i = \delta, \dots, K-1. \quad (2.3)$$

On peut considérer aussi le problème plus général où il y a des erreurs sur l'observation de  $\delta y^*(i)$ . L'optimisation du système auxiliaire L.Q.G. se fait suivant la méthode de Kalman [6] qui est une forme d'utilisation du principe de certitude équivalente. Pour la détermination de la commande optimale en boucle ouverte nous avons le choix entre un grand nombre de méthodes de la programmation mathématique. Comme les relations (2.1) définiront des contraintes sous forme de fonctions implicites avec des retards dans les variables, les méthodes basées sur l'utilisation du principe du maximum (cf. [2], [3]) ne seront pas efficaces. Comme dans la phase (iii) de la procédure décrite précédemment, on doit avoir une bonne évaluation des multiplicateurs de Lagrange, une méthode simple de pénalisation des contraintes ne sera pas non plus très efficace. Nous avons donc opté pour la méthode récemment proposée par Hestenes [8] et baptisée méthode des multiplicateurs. Cette

méthode utilise une approche mixte faisant intervenir à la fois le multiplicateur de Lagrange et une pénalité quadratique. Elle permet d'obtenir la convergence vers la contrainte sans faire tendre la pénalité vers l'infini ce qui donne une bonne évaluation des multiplicateurs.

### 3. MISE EN ŒUVRE DE LA MÉTHODE DES MULTIPLICATEURS DE HESTENES

Posons  $x = \{ (y(k), u(k)) : k = 0, 1, \dots, K \}$ . Pour des valeurs spécifiées des variables exogènes et en remplaçant les perturbations aléatoires par leurs espérances mathématiques, on est amené à résoudre un problème de la forme :

$$\begin{cases} \text{Min } f(x) & f: E^r \rightarrow R \\ \varphi(x) = 0 & \varphi: E^r \rightarrow E^q, q < r. \end{cases} \quad (3.1)$$

La méthode des multiplicateurs consiste à considérer l'expression

$$W(x, \lambda, k) \triangleq f(x) + \lambda^T \varphi(x) + k \varphi^T(x) \varphi(x) \quad (3.2)$$

que l'on rend minimale pour  $\lambda \in E^q$  et  $k \in R, k > 0$  donnés. Pour  $k$  fixé on procède à une évaluation séquentielle de  $x$  et de  $\lambda$  basée sur les règles de récurrence suivantes :

$$(i) \quad W_x(x^\sigma, \lambda^\sigma, k) = 0 \quad (3.3)$$

$$(ii) \quad \lambda^{\sigma+1} = \lambda^\sigma + 2 k \varphi(x^\sigma) \quad (3.4)$$

qui pour  $\sigma$  donné constituent un « cycle ». A la fin de chaque cycle la pénalité intervenant dans l'expression (3.2) a augmenté de  $2 k \varphi^T(x) \varphi(x)$ . On voit que dans cette méthode la convergence vers la contrainte est obtenue en changeant d'un cycle à l'autre le multiplicateur  $\lambda$ .

La mise en œuvre de cette méthode peut bénéficier de plusieurs modifications indiquées par Miele *et al.* [9] et destinées à en accélérer la convergence. Nous utiliserons un algorithme du gradient et nous mettrons à jour l'évaluation du multiplicateur après chaque itération en modifiant quelque peu l'expression (3.4) de façon à rendre minimale à chaque itération l'expression  $\| F_x(x, \lambda) \|^2$  où

$$F(x, \lambda) \triangleq f(x) + \lambda^T \varphi(x).$$

Nous utiliserons aussi une procédure d'ajustement à chaque itération de la constante de pénalité  $k$  de façon à minimiser la distance  $\| \varphi(x) \|^2$ . En bref l'algorithme se présente ainsi :

1.  $x^0, \lambda^0$  et  $k^0$  étant donnés, prendre  $x = x^0, \lambda = \lambda^0, k = k^0$ .
2. Calculer  $\varphi(x)$  et  $f(x)$ .

3. Calculer  $\varphi_x$  et  $f_x$  et en déduire

$$\begin{aligned} F_x &\triangleq f_x + \varphi_x \lambda \\ P_x &\triangleq 2 \varphi_x \varphi \\ \beta(x, \lambda) &\triangleq - \frac{P_x^T F_x}{P_x^T P_x} \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \lambda' &= \lambda + 2 \beta(x, \lambda) \varphi(x) \\ F_x(x, \lambda') &= f_x + \varphi_x \lambda'. \end{aligned} \quad (3.6)$$

4. Si pour des seuils  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  préétablis, on a

$$P(x) \triangleq \|\varphi(x)\|^2 < \varepsilon_1 \quad (3.7)$$

$$Q(x, \lambda') \triangleq \|F_x(x, \lambda')\|^2 < \varepsilon_2 \quad (3.8)$$

alors la procédure est terminée, sinon on continue.

5. Calculer le gradient

$$W_x(x, \lambda') = F_x(x, \lambda') + k P_x(x)$$

et modifier  $x$  et  $k$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x &\rightarrow x - \alpha W_x \\ k &\rightarrow \frac{2 P(x)}{P_x^T P_x}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

6. Retourner en 2 en posant  $\lambda = \lambda'$ .

A l'usage, il est apparu qu'il était important de faire décroître les deux fonctions  $P(x)$  et  $Q(x, \lambda)$  à un même rythme ce qui nous a amené à changer l'expression de  $k$  fournie en (3.9) en :

$$k' = k \cdot \left[ \frac{P(x)}{Q(x, \lambda')} \right]^n$$

pour  $n = 3$  de bons résultats ont été obtenus.

Pour plus de détails sur les propriétés générales de ces méthodes numériques, on pourra consulter les travaux récents de T. Rockafellar [10] et Martenson [11].

#### 4. COMMANDE OPTIMALE STOCHASTIQUE DU SYSTÈME LINÉAIRE, QUADRATIQUE, GAUSSIEN AUXILIAIRE

Puisqu'un modèle économétrique décrit un système stochastique, il faudra nécessairement tenir compte des perturbations pouvant affecter la trajectoire nominale  $\tilde{y}^*$  en causant une déviation  $\delta \tilde{y}^*$  et corriger en conséquence la

commande  $\tilde{u}^*$  en faisant dépendre de façon rétroactive la correction  $\delta\tilde{u}^*$  des déviations  $\delta\tilde{y}^*$ .

Pour le développement qui va suivre, nous supposons qu'un seul retard intervient dans les expressions (2.1) et (2.2). Le Lagrangien du problème (3.1) prend alors la forme :

$$L(\tilde{y}, \tilde{u}, \lambda) = \sum_{i=1}^K g^i[y(i), y(i-1); u(i), u(i-1)] + \lambda^T(i) \varphi^i[y(i), y(i-1); u(i), u(i-1)] \quad (4.1)$$

Pour une commande et une trajectoire optimales ( $\tilde{u}^*$ ,  $\tilde{y}^*$ ) et pour  $\lambda$  correspondant aux multiplicateurs de Lagrange la variation première de  $L(\tilde{y}, \tilde{u}, \lambda)$  s'annule. La variation seconde sera une forme quadratique d'expression suivante :

$$d^2L = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^K [\delta y(i)^T, \delta u(i)^T, \delta y(i-1)^T, \delta u(i-1)^T] \frac{\partial^2 H^*(i)}{\partial \xi^2} \begin{bmatrix} \delta y(i) \\ \delta u(i) \\ \delta y(i-1) \\ \delta u(i-1) \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

où  $\frac{\partial^2 H^*(i)}{\partial \xi^2}$  est la matrice des dérivées secondes de

$$H(i) \triangleq g^i + \lambda^T(i) \varphi^i,$$

prises par rapport aux variables d'indice  $i$  et  $i-1$  au point

$$(y^*(i), u^*(i), y^*(i-1), u^*(i-1)).$$

Considérons aussi les variations premières des contraintes (2.1) que nous égalons à zéro pour  $i = 1, \dots, K$

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_{y(i)}^i \delta y(i) + \varphi_{u(i)}^i \delta u(i) + \varphi_{y(i-1)}^i \delta y(i-1) + \varphi_{u(i-1)}^i \delta u(i-1) \} \\ &\triangleq A^i \delta y(i) + B^i \delta u(i) + C^i \delta y(i-1) + D^i \delta u(i-1). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Tous les gradients sont ici calculés au point  $(y^*(i), u^*(i), y^*(i-1), u^*(i-1))$ . Il est bien connu (cf. Bryson et Ho [7]) que l'ajustement de la commande optimale à des perturbations des contraintes (2.1) se fera en rendant minimale l'expression quadratique (4.2) sous les contraintes linéaires (4.3). Pour réaliser cela, il est pratique de se ramener à la forme du problème de commande à équations d'état linéaires et à critère quadratique. On considère comme variables d'état le vecteur

$$\delta x(i) = \begin{bmatrix} \delta y(i) \\ \delta u(i) \end{bmatrix}$$

et comme variable de commande le vecteur  $m(i-1) \triangleq \delta u(i)$ .

Les équations (4.3) peuvent alors s'écrire pour  $i = 1, \dots, K$

$$\delta x(i) = \begin{bmatrix} -A^{i-1} B \\ \hline I \end{bmatrix} m(i-1) + \begin{bmatrix} -A^{i-1} C^i & -A^{i-1} D^i \\ \hline 0 & 0 \end{bmatrix} \delta x(i-1) \quad (4.4)$$

$$\triangleq \theta^i \delta x(i-1) + \Omega^i m(i-1)$$

et le critère quadratique (4.2) prend la forme

$$J = d^2 L = \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{K-1} [\delta x(i)^T, m(i)^T] \times$$

$$\times \begin{bmatrix} \theta^{iT} F_1^i + F_2^i + \theta^{iT} F_{12}^i + F_{12}^{iT} \theta^i & \Omega^{iT} F_1^i \theta^i + \Omega^{iT} F_{12}^i \\ \hline F_{12}^{iT} \Omega^i + \theta^{iT} F_1^{iT} \Omega^i & \Omega^{iT} F_1^i \Omega^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta x(i) \\ m(i) \end{bmatrix} \quad (4.5)$$

où on a posé :

$$F_1^i \triangleq \frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i)^2} \quad F_2^i \triangleq \frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i-1)^2} \quad F_{12}^i = \frac{\partial^2 H(i)}{\partial x(i) \partial x(i-1)}$$

Nous noterons :

$$\begin{bmatrix} M^i & N^i \\ N^{iT} & P^i \end{bmatrix}$$

la matrice partitionnée intervenant dans le terme d'indice  $i$  du critère (4.5). Les équations (4.4) et (4.5) représentent alors le problème de commande linéaire-quadratique auxiliaire permettant d'adapter la commande optimale à d'éventuelles perturbations.

Comme nous envisageons des perturbations aléatoires et comme les mesures des variables économiques sont souvent entachées d'erreurs, nous devons considérer finalement la version stochastique de ce problème linéaire-quadratique auxiliaire, définie par :

(i) Les équations d'état stochastiques :

$$\delta x(i) = \theta^i \delta x(i-1) + \Omega^i m(i-1) + \eta(i-1) \quad i = 1, \dots, K \quad (4.6)$$

où  $\eta(i)$  est une variable aléatoire.

(ii) Le système d'observation des variables

$$s(i) = \Gamma^i \delta x(i) + v(i) \quad i = 0, \dots, K-1 \quad (4.7)$$

où  $v(i)$  est une variable aléatoire et  $\Gamma^i$  une matrice donnée.

(iii) Le critère de performance  $\bar{J} = E[J]$  où  $J$  est défini en (4.5).

La commande optimale d'un tel système fait intervenir une boucle de rétroaction linéaire associant la commande à la meilleure estimation de l'état obtenue à partir des observations. Nous rappellerons en annexe 2 les éléments principaux de cette théorie développée initialement par Kalman [6].



## 5. LE MODÈLE ÉCONOMÉTRIQUE CANADIEN UTILISÉ

Le but de la politique économique est de garder la situation économique aussi proche que possible d'un cheminement considéré comme le plus désirable. En cas de divergence croissante entre ce sentier désiré et le cheminement réel, les responsables de la politique économique subissent des pressions pour modifier quelques variables économiques appropriées, appelées instruments, pour tenter de remettre l'économie sur une voie plus satisfaisante.

Au lieu de tester à priori certaines politiques économiques, en simulant leur impact avec un modèle économétrique, la théorie de la commande optimale mettra en évidence la meilleure parmi toutes les solutions possibles en termes d'un critère approprié de bien-être. En outre si la politique « optimale », telle qu'issue du modèle, est manifestement erronée, la théorie de la commande optimale devient un instrument pour tester la validité du modèle utilisé.

Finalement l'optimisation fournira certaines informations sur la sensibilité de l'économie ou du moins de sa représentation dans le modèle, quand, à l'optimum, le critère de bien-être, les instruments ou le monde extérieur changent.

En économie, les objectifs sont presque toujours incohérents et contradictoires ; il est supposé que l'on cherche à maximaliser une « fonction d'objectif » qui combine les différentes variables d'état et également les instruments (par exemple, les gouvernements n'aiment pas accroître les taxes ou les taux d'intérêt même si ceci s'avérerait nécessaire) ; alternativement, on peut essayer de minimaliser une « fonction de coûts » ou « fonction de pertes » qui va combiner la différence entre le niveau réel des instruments et des variables d'état avec le niveau désiré pour ces variables.

En face d'objectifs économiques contradictoires, les préférences des agents économiques peuvent se traduire marginalement par une pondération des objectifs. Il est clair que la fiabilité des résultats va dépendre de la qualité du modèle économétrique et de la pondération adoptée pour construire le critère de performance. Cette pondération, rarement connue de façon explicite, peut aussi évoluer en fonction de la situation économique à cause des pressions exercées par les administrés (cf. Villanueva [12]). Nous avons donc choisi le critère de performance suivant :

$$J = \alpha_1 10^4 \left( \frac{U}{U + L} - 0,04 \right)^2 + 2 \alpha_2 10^{-5} \left( \frac{PM \cdot M}{TCH} - PX \cdot X \right)^2 + 0,5 \alpha_3 PGNP - 2 \alpha_4 (C + VB) . \quad (5.1)$$

La valeur de la cible concernant le taux de chômage, 0,04, correspond à un taux de chômage de 2 % car la variable  $L$  représente environ la moitié de la main-d'œuvre. Dans cette fonction de coût les variables qui interviennent

directement sont le taux de chômage  $\frac{U}{U+L}$ , la balance des paiements

$$\frac{PM.M}{TCH} - PX.X,$$

l'indice implicite des prix du produit national brut et la consommation privée plus l'investissement industriel ( $C + VB$ ); cette fonction de coût inclut également un instrument :  $TCH$ , le taux de change du dollar canadien vis-à-vis du dollar américain. Dans cette fonction, les paramètres  $\alpha_i$  sont tous égaux à 0,25 et seront modifiés plus tard pour tester la sensibilité des variables à un changement dans les poids de la fonction d'objectif. Les autres coefficients servent à rendre à peu près homogènes les différents termes de la fonction de coût.

Cette fonction de coût implique que le décideur est intéressé simultanément à combattre l'inflation et le chômage, à maximiser la consommation plus l'investissement industriel et également à équilibrer la balance des paiements. Nous avons considéré deux instruments : les investissements du gouvernement  $VG_V$  et le taux de change du dollar canadien vis-à-vis du dollar américain ; le choix du taux de change comme instrument est particulier au Canada qui a une longue expérience de taux de change flottants.

Les contraintes — c'est-à-dire les équations du modèle économétrique utilisé — sont les suivantes :

$$\begin{aligned} L_t &= [\phi_t \cdot \exp(28.5425 - 0.013052 t) \cdot K_t^* - 0.458891] \frac{1}{0.541109} \\ w_t &= w_{t-1} \left( 1 + \frac{.101732}{U_t} + 1.1102 \frac{PC_t - PC_{t-1}}{PC_{t-1}} - .007099 \right) \\ x_t &= \exp^{-3.63677} * \left( \frac{TW_t}{PW_t} \right)^{1.19418} * \left( \frac{TCH_t PX_t}{PW_t} \right)^{-2.38836} \\ PG_t &= PG_{t-1} + 1.27032 (w_t - w_{t-1}) + 0.193366 \left( \frac{PM_t}{TCH_t} - \frac{PM_{t-1}}{TCH_{t-1}} \right) \\ C_t &= .001444 + 1.02187 C_{t-1} + 0.383001 (Y_t - Y_{t-1}) \\ PV_t &= 51.4721 + 0.544331 w_t + 0.090655 PM_{t-1} / TCH_{t-1} \end{aligned}$$

Figure 01.

$$PC_t = 44.0771 + 0.421171 W_t + 0.234515 PM_t / TCH_t$$

$$VB_t = .116227 + 0.894199 VB_{t-1} + .375629 (GNP_t - GNP_{t-1})$$

$$PX_t = PX_{t-1} \left( 1. - .010629 + 0.436778 \frac{W_t - W_{t-1}}{W_{t-1}} + .311649 \frac{PM_t / TCH_t - PM_{t-1} / TCH_{t-1}}{PM_{t-1} / TCH_{t-1}} \right)$$

$$\text{Log } M_t = -6.09271 + 1.00299 \text{ Log } GNP_t - 0.817498 \text{ Log } \frac{PM_t}{PGNP_t \cdot TCH_t}$$

$$U_t = U_{t-1} - 9.82897 + 0.589410 IMM_t - 5.37580 (L_t - L_{t-1}) \frac{U_t}{L_t + U_t}$$

$$VAGv_t = 0.217726 + 0.361932 Gv_t$$

$$\text{Log } DTXv_t = -3.80834 + 1.45288 \text{ Log } PIV_t$$

$$(IT_v - SU_v) = -680790 + 0.143445 GNPv_t$$

$$RENTv = -0.045379 + 0.137836 PDIv_t$$

$$TNAL_t = -2105.53 + 2.52416 L_t$$

$$GNP = C + G + X - M + DS + V$$

$$V = VG + VH + VB$$

$$C_v = C \cdot PC$$

$$G = G_v / PG$$

$$X_v = X \cdot PX$$

Figure 02.

$$M_v = M \cdot PM / TCH$$

$$V_v = V \cdot PV$$

$$VH_v = VH \cdot PV$$

$$VB_v = VB \cdot PV$$

$$DS_v = DS \cdot PCNP$$

$$GNP_v = C_v + G_v + X_v - M_v + V_v + DS_v$$

$$PCNP = GNP_v / GNP$$

$$NNI_v = GNP_v - CAC\phi_v - (IT_v - SU_v)$$

$$PI_v = NNI_v + TRFG_v + IPD_v + ICD_v - NDE_v$$

$$PDI_v = PI_v - DTX_v - TRTG_v$$

$$Y = PDT_v / PC$$

$$S_v = PDI_v - C_v$$

$$GDPF_v = GNP_v - (IT_v - SU_v)$$

$$GDPI_v = GDPF_v - VAAG_v - VAFO_v - VAFI_v - VAG\phi_v - RENT_v$$

$$\phi = GDPI_v / PCNP$$

$$K_t = (1 - .08) K_{t-1} + .89 VB_{t-1}$$

$$K_t^* = K_t \cdot \frac{TNAL}{TNAL + U}$$

Figure 03.

## LISTE DES VARIABLES

Toutes les variables de la comptabilité nationale sont aux prix constants de 1961 à moins qu'elles ne soient suivies d'un suffixe « v », dans lequel cas elles sont à prix courants ; ces variables sont exprimées en milliards de dollars canadiens, les indices des prix sont à base 1961 = 100 ; la main-d'œuvre, le chômage et l'immigration sont exprimés en milliers.

SYMBOLE	DÉFINITION	SYMBOLE	DÉFINITION
1. C	Consommation privée	30. PW	Prix mondiaux (Prix des exportations des régions développées ; Nations-Unies)
2. Cv	Consommation privée	31. PDIv	Revenu personnel disponible
3. CACØv	Amortissement du capital	32. Piv	Revenu personnel
4. DS	Variation de stock	33. RENTv	Loyers payés par les locataires et loyers imputés
5. DSv	Variation de stock	34. TRFGv	Transferts du gouvernement aux personnes
6. DTXv	Taxes directes	35. TRTGv	Transferts des personnes au gouvernement
7. G	Consommation publique courante	36. TW	Commerce mondial (importations, C.I.F.)
8. Gv	Consommation publique courante	37. U	Chômage
9. GDPFv	Produit intérieur brut aux coûts du facteur	38. IMM	Immigration
10. GDPIv	Produit intérieur brut « des secteurs industriels »	39. VAAGv	Valeur ajoutée dans l'agriculture
11. GNP	Produit national brut	40. VAFØv	Valeur ajoutée dans la sylviculture
12. GNPv	Produit national brut	41. VAFiv	Valeur ajoutée de la pêche et piégeage
13. ICDv	Intérêt de la dette des consommateurs	42. VAGOv	Valeur ajoutée des gouvernements
14. IPDv	Intérêt de la dette publique	43. V	Formation brute de capital fixe
15. ITv-SUv	Taxes indirectes moins subsides	44. Vv	Formation brute de capital fixe
16. K	Capital dans les secteurs industriels	45. VG	Investissements des gouvernements
17. L	Main-d'œuvre (nombre d'employés dans les entreprises utilisant 20 ou plus d'employés)	46. VGv	Investissements des gouvernements
18. M	Importation de biens et services	47. VB	Investissements industriels non résidentiels
19. Mv	Importation de biens et services	48. VBv	Investissements industriels non résidentiels
20. NDEv	Profits non distribués aux personnes	49. VH	Investissements résidentiels
21. NNiv	Revenu national net (coûts des facteurs)	50. VHv	Investissements résidentiels
22. NVPav	Revenu net de placements versé aux non-résidents	51. W	Salaires (salaire hebdomadaire moyen en dollars)
23. Ø	Produit intérieur brut du secteur industriel	52. X	Exportations de biens et services
24. PC	Indice des prix implicite de la consommation privée	53. Xv	Exportations de biens et services
25. PG	Indice des prix implicite de la consommation publique	54. Y	Revenu personnel disponible aux prix constants de 1961
26. PGNP	Indice des prix implicite du produit national brut	55. T	Temps
27. PM	Indice des prix implicite des importations en biens et services	56. TNAL	Total de l'emploi non agricole
28. PV	Indice des prix implicite de la formation brute de capital fixe	57. Sv	Epargne personnelle
29. PX	Indice des prix implicite des exportations en biens et services	58. K*	Capital industriel utilisé
		59. TCH	Taux de change du dollar canadien vis-à-vis du dollar américain.

Ce système contient 39 équations simultanées, la moitié de ces équations sont non linéaires dans les variables endogènes. Il contient 16 équations de comportement estimées d'abord par la méthode des moindres carrés ordinaires et, ensuite, par la méthode des doubles moindres carrés (Klein [13]) en ayant recours aux variables instrumentales de F. Fisher [14]; et il contient également 23 identités de la comptabilité nationale. En outre pour chaque période, ce modèle nécessite les valeurs prises par quelque 20 variables exogènes. Comme la plupart des modèles utilisés couramment, ce modèle-ci est du type keynesien où la demande joue un rôle déterminant avec quelques boucles qui le rendent simultané.

La demande finale, qui est composée de la consommation publique, de la consommation privée, des investissements industriels, des investissements en logements, des variations de stock, des exportations desquelles on soustrait les importations, définit le niveau du produit national brut simultanément en termes réels et en termes nominaux. De ce produit national brut à prix courants nous soustrayons différents postes comme l'amortissement, les taxes directes et indirectes, les intérêts et divers transferts pour obtenir le revenu personnel disponible qui va déterminer la consommation privée.

Egalement de cette estimation du produit national brut, nous pouvons calculer le niveau de l'emploi par une fonction de production. Les changements dans l'emploi induisent des changements dans le chômage et ainsi des changements dans les salaires. Les variations de salaires et les variations de l'indice implicite des prix à l'importation déterminent des variations des prix pour les autres postes de la demande finale.

Les indices des prix implicites sont utilisés non seulement pour calculer la demande finale à prix courants mais ils sont également utilisés dans l'équation du commerce extérieur, parce que les exportations et les importations varient avec la demande — respectivement les importations mondiales et la demande intérieure — et également avec les prix relatifs intérieurs par rapport aux prix mondiaux.

Finalement les modifications dans le produit national brut induisent de nouveaux investissements industriels; cette partie-ci du modèle n'est pas très élaborée, puisque l'on s'est dispensé d'introduire les taux d'intérêt dans la fonction d'investissement. Cependant cette fonction d'investissement nécessite seulement un seul retard, alors que des fonctions d'investissement plus compliquées incorporeraient un plus grand nombre de retards. Comme première approximation nous avons choisi de garder la structure la plus simple.

Ce système de 39 équations simultanées non linéaires est résolu aisément en 9 ou 10 itérations par période par la méthode Gauss-Seidel, pour chaque période le point de départ étant la solution d'équilibre de la période précédente. La prévision pour les années 1972-1981 la plus probable, ou disons, la prévision standard, à partir de laquelle nous essaierons d'optimiser le modèle,

est reproduite dans le tableau suivant ; toutes les variables sont en milliards de dollars sauf indications contraires.

Comme on le constate aisément, ce modèle pêche par optimisme quant à l'inflation prédite, ce qui n'est pas étonnant lorsqu'on sait qu'il fut estimé sur la période 1950-1969, et que depuis la relation entre la demande et la pression inflationniste ne s'est pas améliorée.

## 6. RÉSULTATS DE L'OPTIMALISATION DU MODÈLE DÉTERMINISTE

En appliquant au modèle économétrique précédent la technique et l'algorithme décrits en section 3 nous obtenons (1) une valeur minimale de 3,380 pour la fonction de coût donnée en (5.1). La solution de comparaison décrite au tableau 1 donnait à la fonction de coût une valeur de 3,510. Ces résultats peuvent donc sembler modestes puisque la réduction de coût par rapport à cette solution de comparaison n'est que d'environ 4 %. Cependant une analyse comparative des politiques associées à ces deux solutions montrent des différences notables. Le tableau 2 décrit la politique optimale et en le comparant au tableau 1 on voit que, si le produit national brut n'a cru en termes réels que d'une façon infime (de \$ 113,8 à \$ 114,5) et l'inflation a légèrement diminuée (0,1 % en moyenne par an dans le taux d'accroissement annuel moyen de l'indice des prix implicites du PNB), nous voyons croître le bloc consommation privée plus investissements industriels non résidentiels à prix constants de 4,22 % par an contre 3,73 % dans la solution de comparaison.

Pour le chômage les progrès sont plus marqués. La politique optimale diminue le chômage de 304 600 hommes/année au bout de 10 ans soit, en moyenne, 30 460 hommes-année par an.

Enfin au chapitre de la balance des paiements, la politique optimale réduit le surplus extérieur cumulé de 27,1 milliard de dollars.

Du côté des instruments nous voyons, et ceci fut pour nous le principal enseignement économique de cet exercice, l'efficacité du flottement organisé — *managed floating* — du dollar canadien pour réduire les exportations et accroître les importations, diminuant ainsi le boni de la balance des paiements et la pression inflationniste.

La chute dans l'activité économique consécutive à cette réévaluation du dollar et ses répercussions sur l'emploi étant évitées par un surcroît cumulé de 12,2 milliards d'investissements gouvernementaux ou 1,22 milliard par an en moyenne.

---

(1) En moins d'une minute CPU d'IBM 370-50.

TABLEAU 1. — *Solution de comparaison*

	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
Produit national brut: GNP	66.6	69.9	74.3	79.0	83.9	88.5	93.3	98.0	102.8	108.0	113.8
<u>Objectifs:</u>											
. Déflateur implicite du PNB (1961 = 100)	138.2	143.1	146.2	149.4	153.8	158.7	164.1	170.4	177.3	184.9	193.2
. Consommation privée et investissements des entreprises C + VB	49.9	52.0	54.0	56.2	58.5	60.5	62.7	64.7	66.8	69.2	72.0
. Balance des paiements: - $\frac{PM - M}{TCH} + X - PX$	.1	3.0	3.4	4.0	4.6	5.8	6.0	7.9	9.0	10.1	11.9
. Chômage (en milliers)	552.0	604.2	550.6	503.7	465.0	453.3	435.6	430.5	424.0	413.4	392.3
<u>Instruments:</u>											
. Investissements du gouvernement VG <sub>v</sub>		3.8	4.0	4.2	4.5	4.8	5.2	5.6	6.0	6.5	7.0
. Taux de change CA \$ / US \$ : TCH		1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.	1.

TABLEAU 2. — *Résultats de l'optimisation*

	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
Produit National Brut (milliards) à prix constants	70.9	74.8	79.1	83.9	88.6	93.6	98.4	103.4	108.6	114.5
<u>Objectifs:</u>										
. PGNP (1961=100.)	142.	144.8	148.3	151.9	156.6	161.9	168.1	175.02	182.7	191.3
. C + VB (milliards)	52.9	54.8	57.0	59.5	61.9	64.5	67.0	69.6	72.4	75.4
. $X - PX - M - \frac{PM}{TCH}$ (milliards)	2.37	2.76	3.23	3.49	4.05	4.43	4.58	4.67	4.49	4.54
. U (milliers)	543.	524.	492.	457.	434.	408.	396.	384.	372.	352.
<u>Instruments</u>										
. Investissements des gouvernements	4.41	4.05	3.9	4.17	4.8	5.77	6.79	7.99	9.68	12.13
. Taux de change CA\$/US.\$ = TCH	1.01	1.02	1.024	1.03	1.04	1.05	1.06	1.068	1.078	1.09

Les graphiques de la figure 1 donnent une idée des cheminements des variables objectifs et des instruments dans le temps dans la solution initiale et la solution optimale.

Au point optimal, le vecteur  $\lambda$  des multiplicateurs nous montre l'impact qu'aura, sur la valeur de la fonction de coût, une perturbation d'une des contraintes du modèle. Après avoir par des moyens algébriques, réuni (concaténé) quelques équations pour en réduire le nombre de 39 à 22, en abandonnant quelques variables secondaires, nous restons avec une matrice de 10 vecteurs — un par année — ayant chacun 22 multiplicateurs.



Ces vecteurs sont reproduits dans le tableau 3, ligne par ligne, pour chaque année, et pour chaque contrainte définissant dans l'ordre suivant les variables : U, W, VB, C, PG, PX, K, M, X, GNP, K\*, L, TNAL, PV, PC, GNPV, PGNP, PIV, DTXv, Y, GDPIv,  $\emptyset$ .

Ces vecteurs vont être principalement utilisés pour définir le critère du problème de commande linéaire-quadratique auxiliaire permettant d'adapter la solution aux perturbations.

TABLEAU 3

MULTIPLICATEURS DE LAGRANGE (EN POURCENT) :

ANNEE :	EQUATIONS																					
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
1972	178	117	-10	-88	-6	-10	-14	2	-1	-33	2	0	10	4	40	21	14	0	2	-1	-1	-2
1973	154	89	8	-79	-6	-14	-11	-4	5	-21	0	1	8	3	31	15	10	-1	2	0	4	7
1974	138	67	17	-75	-8	-14	-5	-9	10	-13	-2	1	7	3	22	11	7	-1	1	0	5	10
1975	126	50	15	-74	-9	-10	2	-12	13	-7	-3	2	5	2	14	8	6	-1	1	0	6	12
1976	116	40	5	-75	-10	-3	8	-13	16	-6	-2	2	6	2	9	6	6	-1	1	0	4	10
1977	96	33	-8	-75	-9	4	12	-13	16	-7	-1	2	5	2	6	5	6	-2	1	-1	2	7
1978	78	30	-22	-72	-8	12	14	-9	13	-12	0	0	4	2	8	5	9	-2	2	-3	0	1
1979	58	26	-30	-64	-7	17	13	-4	8	-21	1	-1	4	2	14	7	14	-1	4	-5	-5	-7
1980	38	20	-30	-49	-5	18	10	3	1	-33	1	-3	2	2	23	10	21	0	5	-8	-11	-21
1981	18	11	-20	-27	-2	12	7	10	-2	-50	5	-7	0	3	32	16	32	2	6	-10	-20	-44

## SOLUTION OPTIMALE

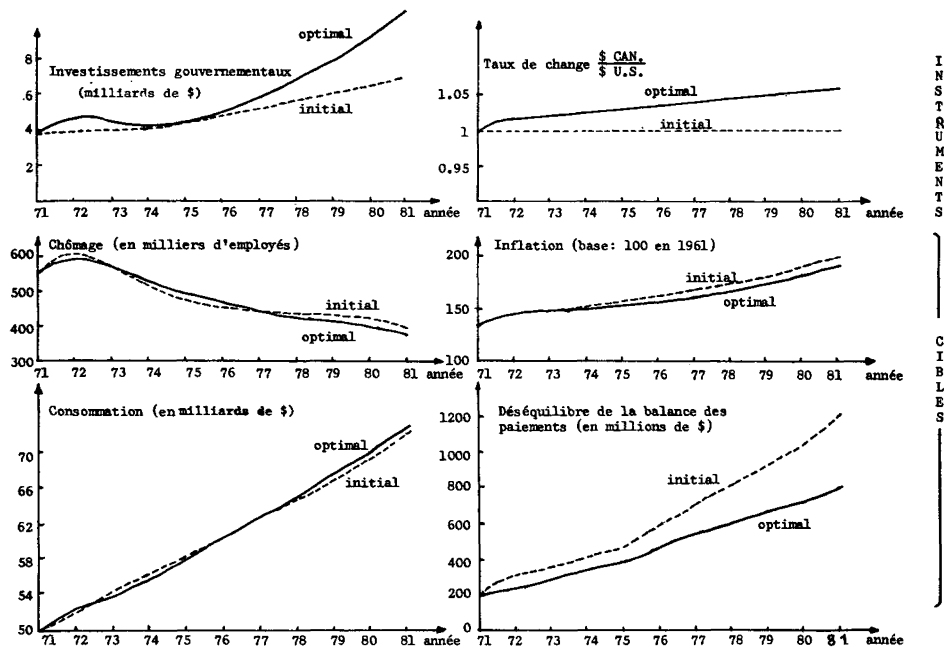


Figure 1

Politique optimale du modèle déterministe

Nous avons finalement fait varier la pondération dans le critère en donnant différentes valeurs au rapport des pondérations concernant le taux de chômage et l'inflation respectivement dans le critère (5.1). Le poids des autres termes du critère a été maintenu égal à celui du taux de chômage. Sur la figure 2 nous avons porté les valeurs prises par les termes de chômage et d'inflation intervenant dans le critère.

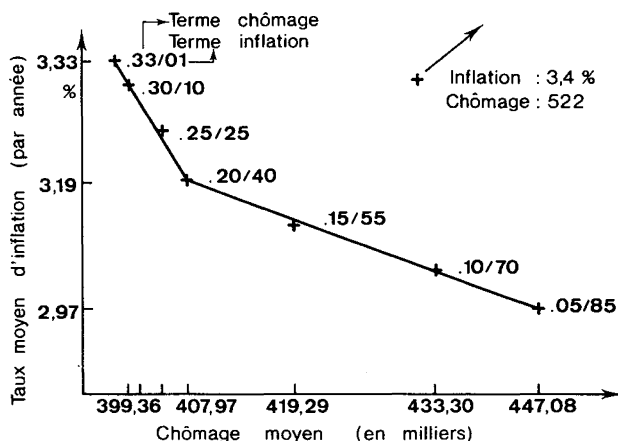


Figure 2

Variation des composantes du critère quand les pondérations changent

En joignant les points, nous obtenons le lieu des solutions optimales qu'il est possible d'atteindre dans l'espace « inflation-chômage », tout point non optimal se trouve plus haut et/ou plus à droite de cette enveloppe, il en est ainsi de la solution de départ qui impliquait 522 000 chômeurs en moyenne par an avec une inflation de 3,41 % l'an.

Cette courbe enveloppe nous permet de calculer le trade-off possible entre ces deux objectifs primordiaux de la politique économique.

Nous constatons qu'aux environs de 408 000 chômeurs et de 3,19 % d'inflation, le modèle modifie son comportement : pour un nombre de chômeurs supérieur à 408 000 chômeurs le trade-off est de

$$39\,110/0,22 = 177\,772 \text{ chômeurs}$$

par pour-cent d'inflation en plus, alors qu'en deçà de 408 000 chômeurs le trade-off est de  $8\,610/0,14 = 61\,500$  chômeurs par pour-cent d'inflation en plus, soit près du tiers du nombre précédent.

## 7. ADAPTATION DE LA COMMANDE OPTIMALE AUX PERTURBATIONS

### 7.1. Equations fondamentales de la commande optimale

Au voisinage de la solution optimale, le système est soumis à des perturbations aléatoires, de moyenne nulle et d'écart type donné selon l'approche proposée en section 4. L'adaptation de la commande optimale va consister à rechercher à chaque période  $i$ , les corrections  $m(i)$  qu'il faut apporter aux variables de décision  $u(i+1)$ , de façon à rester sur la trajectoire optimale. Après avoir obtenu, à l'aide du filtre de Kalman, la meilleure estimation de l'état, compte tenu des perturbations aléatoires et des erreurs d'observation, nous pouvons écrire le critère (4.5) sous la forme suivante :

$$J = \sum_{i=0}^{K-1} J_i + \delta \hat{x}_{(K)}^T S_K \delta \hat{x}_{(K)}$$

avec

$$J_i = \frac{1}{2} [\delta \hat{x}_{(i)}^T, m(i)^T] \cdot \begin{bmatrix} M^i & N^i \\ N_i^T & P^i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \hat{x}(i) \\ m(i) \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

où  $\delta \hat{x}(i)$  représente la meilleure estimation de l'état, c'est-à-dire de la perturbation de la variable  $x$ , à l'étape  $i$  et  $S_k = M^i$  pour  $i = k$ .

On trouvera en annexe 2 un rappel des calculs conduisant aux résultats suivants établis selon les principes de la programmation dynamique

$$m(i) = K(i) \cdot \delta \hat{x}(i) \quad (7.2)$$

avec :

$$K(i) = H_i^{-1} (B_i^T S_{i+1} A_i + N_i^T) \quad (7.3)$$

et :

$$H_i = B_i^T S_{i+1} B_i + P_i \quad (7.4)$$

$$S_i = A_i^T S_{i+1} A_i - K_i^T (B_i^T S_{i+1} B_i + P_i) K_i + M_i \quad (7.5)$$

l'équation (7.5) est l'équation de Riccati en temps discret, caractéristique de l'optimisation des systèmes linéaires à critère quadratique. La matrice  $K(i)$  représente en fait le gain en boucle fermée du système et assure l'adaptation de la commande par la rétroaction linéaire (7.2). Le problème de la détermination de la meilleure estimation linéaire des perturbations  $\delta x$  est présenté en annexe 2 ainsi que les détails des procédés de filtrage.

### 7.2. Calcul de la matrice de gain de la boucle fermée

Le tableau 4 décrit les matrices  $K(i)$  définies en (7.3) pour chaque année  $i$ . Selon la définition de l'état pour le système L.Q.G. donnée en section 4, les colonnes de chaque matrice  $K(i)$  correspondent aux variables suivantes :

U, W, VB, C, PG, PX, K, M, X, GNP, K\*, L, TNAL, PV, PC, GNPv, PGNP, PIV, DTXv, Y, GDPI, Ø, VGv, Tch.

TABLEAU 4. — Matrices de gain du système en boucle fermée

MATRICE DE GAIN POUR 1981																			
0.23	0.15	-1.21	-1.31	0.07	0.24	0.09	0.0	0.0	0.54	0.0	0.12	0.0	0.0	-0.43	0.0	0.0	0.0	0.0	0.49
0.0	0.13																		0.0
0.02	-0.53	-0.35	-0.48	-0.03	-0.45	-0.02	0.0	0.0	0.14	0.0	-0.02	0.0	0.0	0.98	0.0	0.0	0.0	0.0	0.18
0.0	-0.17																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1980																			
0.24	0.37	-1.32	-1.48	0.09	0.29	0.12	0.0	0.0	0.60	0.0	0.13	0.0	0.0	-0.76	0.0	0.0	0.0	0.0	0.55
0.0	0.15																		0.0
-0.16	-0.51	-0.19	-0.23	-0.03	-0.70	-0.09	0.0	0.0	0.05	0.0	-0.09	0.0	0.0	1.06	0.0	0.0	0.0	0.0	0.09
0.0	-0.27																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1979																			
0.24	0.30	-1.35	-1.56	0.08	0.37	0.13	0.0	0.0	0.62	0.0	0.14	0.0	0.0	-0.67	0.0	0.0	0.0	0.0	0.58
0.0	0.18																		0.0
-0.10	-0.76	-0.10	-0.02	-0.06	-0.80	-0.10	0.0	0.0	0.01	0.0	-0.10	0.0	0.0	1.46	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01
0.0	-0.31																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1978																			
0.16	0.29	-1.32	-1.48	0.09	0.26	0.12	0.0	0.0	0.60	0.0	0.12	0.0	0.0	-0.62	0.0	0.0	0.0	0.0	0.56
0.0	0.13																		0.0
-0.09	-0.59	-0.10	-0.17	-0.04	-0.81	-0.10	0.0	0.0	0.00	0.0	-0.10	0.0	0.0	1.21	0.0	0.0	0.0	0.0	0.07
0.0	-0.31																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1977																			
0.15	0.19	-1.28	-1.46	0.07	0.30	0.12	0.0	0.0	0.58	0.0	0.12	0.0	0.0	-0.46	0.0	0.0	0.0	0.0	0.55
0.0	0.14																		0.0
-0.03	-0.83	-0.06	0.03	-0.07	-0.86	-0.11	0.0	0.0	-0.01	0.0	-0.11	0.0	0.0	1.57	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.01
0.0	-0.34																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1976																			
0.12	0.24	-1.26	-1.47	0.08	0.24	0.12	0.0	0.0	0.57	0.0	0.11	0.0	0.0	-0.51	0.0	0.0	0.0	0.0	0.55
0.0	0.11																		0.0
-0.07	-0.74	-0.08	-0.07	-0.04	-0.94	-0.14	0.0	0.0	-0.02	0.0	-0.13	0.0	0.0	1.43	0.0	0.0	0.0	0.0	0.02
0.0	-0.38																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1975																			
0.10	0.13	-1.21	-1.41	0.06	0.27	0.12	0.0	0.0	0.55	0.0	0.11	0.0	0.0	-0.35	0.0	0.0	0.0	0.0	0.53
0.0	0.12																		0.0
-0.00	-0.92	-0.05	0.09	-0.09	-0.87	-0.13	0.0	0.0	-0.03	0.0	-0.12	0.0	0.0	1.69	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.03
0.0	-0.35																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1974																			
0.07	0.19	-1.20	-1.44	0.07	0.23	0.11	0.0	0.0	0.54	0.0	0.10	0.0	0.0	-0.42	0.0	0.0	0.0	0.0	0.54
0.0	0.10																		0.0
-0.06	-0.79	-0.09	-0.04	-0.05	-0.92	-0.16	0.0	0.0	-0.02	0.0	-0.14	0.0	0.0	1.49	0.0	0.0	0.0	0.0	0.01
0.0	-0.38																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1973																			
0.06	0.11	-1.15	-1.37	0.05	0.27	0.12	0.0	0.0	0.53	0.0	0.10	0.0	0.0	-0.29	0.0	0.0	0.0	0.0	0.51
0.0	0.11																		0.0
0.02	-0.97	-0.05	0.14	-0.10	-0.79	-0.15	0.0	0.0	-0.03	0.0	-0.13	0.0	0.0	1.73	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.05
0.0	-0.33																		0.0
MATRICE DE GAIN POUR 1972																			
0.04	0.17	-1.16	-1.40	0.05	0.25	0.11	0.0	0.0	0.53	0.0	0.10	0.0	0.0	-0.36	0.0	0.0	0.0	0.0	0.52
0.0	0.11																		0.0
0.01	-0.80	-0.16	0.01	-0.07	-0.76	-0.17	0.0	0.0	0.00	0.0	-0.14	0.0	0.0	1.48	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.06
0.0	-0.31																		0.0

Les lignes de chaque matrice  $K(i)$  correspondent aux variables de contrôle  $V_{g_v}$  et Tch.

Ainsi pour l'année 1973 l'équation d'adaptation de la commande prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \delta V G_V^{73} &= 0,06 \delta U^{72} + 0,11 \delta W^{72} - 1,15 \delta V_B^{72} - 1,37 \delta C^{72} + 0,05 \delta P_G^{72} \\ &\quad + 0,27 \delta P_X^{72} + 0,12 \delta K^{72} + 0,53 \delta GNP^{72} + 0,10 \delta L^{72} \\ &\quad - 0,29 \delta P_C^{72} + 0,51 \delta Y^{72} + 0,11 \delta Tch^{72} \\ \delta Tch^{73} &= 0,02 \delta U^{72} - 0,97 \delta W^{72} - 0,05 \delta V_B^{72} + 0,14 \delta C^{72} - 0,10 \delta P_G^{72} \\ &\quad - 0,79 \delta P_X^{72} - 0,15 \delta K^{72} - 0,03 \delta GNP^{72} - 0,13 \delta L^{72} \\ &\quad + 1,73 \delta P_C^{72} - 0,05 \delta Y^{72} - 0,33 \delta Tch^{72} . \end{aligned}$$

Remarquons que seules les variables entrant dans la dynamique du modèle figurent dans ce tableau. Ceci s'explique par le fait que les autres variables n'apparaissant pas à l'instant  $i - 1$ , ne sont pas prises en compte dans la détermination de  $\delta u(i) = m(i - 1)$ . Il nous serait néanmoins possible de calculer la sensibilité des variables de contrôle par rapport à ces variables d'état, en faisant intervenir la sensibilité de celles-ci par rapport aux variables dynamiques, puis la matrice de gain  $K$ .

### 7.3. Application du filtre de Kalman à une simulation

La simulation a porté sur 3 exemples définis comme suit :

- 1) Toutes les variables d'état sont observées avec la même erreur, toutes les variables sont soumises à des perturbations de même variance.
- 2) Sept variables seulement sont observées (U, W, VB, PX, L, Tch,  $VG_V$ ).
- 3) Les mêmes variables qu'en 2) sont observées; mais avec des erreurs plus importantes.

EXEMPLE	VARIANCE MAXI. SUR L'OBSERVATION	VARIANCE MAXI. SUR LES ÉQUATIONS	VARIANCE DE L'ÉTAT INITIAL
1	0,32	0,32	0,32
2	0,55	0,85	0,22
3	1,15	1,45	0,22

On trouvera en figure 3, les courbes de quatre variables, pour les 3 exemples traités. Les deux premières variables U et L bénéficient d'une bonne observation, mais sont définies par des équations d'état peu précises (donc perturbées). Les deux dernières variables Tch et  $VG_V$  sont les variables de décision.

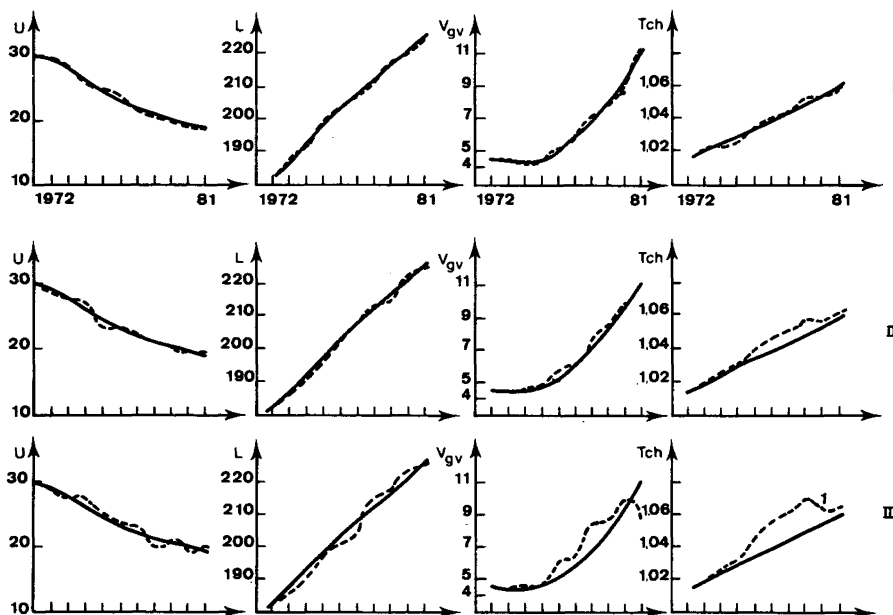


Figure 3

Simulation d'une commande optimale L.Q.C.

## 8. CONCLUSION

Au terme de cette étude nous pouvons constater que l'utilisation des techniques de la commande optimale peut contribuer à valider et à tester des modèles économétriques. En effet, les résultats de la section 6 tendent à montrer que les politiques « optimales » tendent à conserver un sens économique et permettent d'explorer la sensibilité du système à diverses variations des paramètres.

La méthode des multiplicateurs de Hestenes est facile à mettre en œuvre et semble bien adaptée à des systèmes de dimension moyenne.

L'adaptation de la commande optimale à des perturbations est possible, si les perturbations ne sont pas trop importantes, par le traitement d'un problème auxiliaire de régulation en moyenne quadratique. Cependant, dans l'état actuel de l'économétrie cela reste encore un exercice à caractère académique.

La commande optimale de systèmes de plus grande dimension ne pourra être envisagée qu'à partir de techniques de décomposition des programmes mathématiques. Une direction de recherche intéressante serait de pouvoir allier les avantages des méthodes du Lagrangien généralisé et de la décomposition des programmes.

## REFERENCES

- [1] A. NORMAN, Optimal Economic Policy and Econometric Model, Proceedings 1971 IEEE Conference on Decision and Control.
- [2] D. A. KENDRIK, Economic Model and Control Systems, Proceedings 1971 IEEE Conference on Decision and Control.
- [3] H. KIM, L. M. GOREUX, Optimal Economic Policy under Uncertainty in Simultaneous Implicit Dynamic Systems, Proceedings 1972 IEEE Conference on Decision and Control.
- [4] R. S. HOLBROOK, *An Approach to the Choice of Optimal Policy Using Large Econometric Models*, Bank of Canada, 1973.
- [5] R. PINDYCK, *Optimal Planning for Economic Stabilization*, North Holland, 1973.
- [6] R. E. KALMAN, *A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems*, Trans. ASME, Vol. 82D, 1960.
- [7] A. E. BRYSON, Y. C. HO, *Applied Optimal Control*, Ginn, 1969.
- [8] M. R. HESTENES, *Multiplier and Gradient Methods*, JOTA, 1969.
- [9] A. MIELE, P. E. MOSELEY, E. E. CRAGG, *On the Method of Multipliers for Mathematical Programming Problems*, JOTA, 1972.
- [10] R. T. ROCKAFELLAR, *The Multiplier Method of Hestenes and Powell Applied to Convex Programming*, JOTA, 1973, pp. 555-562.
- [11] K. MARTENSSON, *A New Approach to Constrained Function Optimization*, JOTA, 1973, pp. 531-554.

- [12] VILLANUEVA, *Endogeneity of Policy Variables : an Empirical Study of the Discount Rate in Belgium*, Mimeographed, International Monetary Fund, Washington DC, 1970.
- [13] C. R. KLEIN, *A Textbook of Econometrics*, Second Edition 1974, Prentice Hall, Inc, 436 pages, Chapitre IV, § 4, p. 155 et suivants.
- [14] F. FISHER, *Dynamic Structure and Estimation in Economy-Wide Econometric Models* in Duesenberry-Fromm-Klein-Kuh (eds), « The Brookings Quaterly Econometric Model of the United States », Chicago, Rand-Mc Nally, 1965, pp. 589-636.
- [15] I. B. RHODES, *A Tutorial Introduction to Estimation and Filtering*, IEEE Trans on Automatic Control, Dec. 1971.

## ANNEXE 1

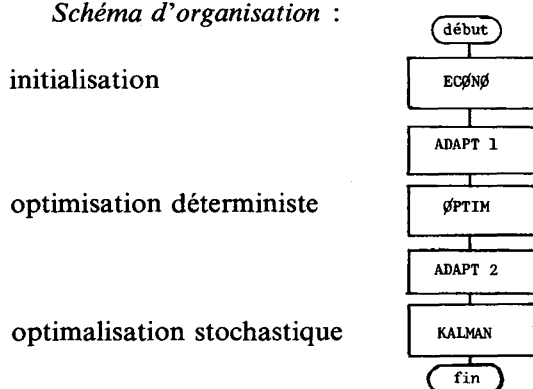
### ORGANISATION DES PROGRAMMES

Trois programmes principaux, indépendants les uns des autres, ont été utilisés :

- 1) le programme 'ECØNØ', qui résout, pour un choix de variables exogènes et de variables de contrôle fixées, la solution déterministe du modèle ;
- 2) le programme 'ØPTIM', qui, à partir d'une solution de départ, applique la méthode des multiplicateurs ;
- 3) le programme 'KALMAN', qui, à partir de la solution optimale déterministe, étudie l'influence de perturbations de l'état, sur la commande : ce programme comprend 2 parties : une partie filtrage-estimation de l'état et une partie optimisation.

Ces trois programmes peuvent être considérés comme des blocs, des « packages » ayant une application générale ; il est donc nécessaire d'adapter les données du problème, aux formulations requises par ces programmes, par l'intermédiaire de programmes d'adaptation.

*Schéma d'organisation :*



**Figure 4.**

## ANNEXE 2

RAPPELS CONCERNANT LA COMMANDE OPTIMALE  
DES SYSTÈMES L.Q.G.

## a) Prédiction et filtre de Kalman en temps discret

Considérons d'une part un système dynamique en temps discret, à  $n$  dimensions, décrit par les équations d'état suivantes :

$$x_{k+1} = A_k x_k + B_k u_k + D_k \xi_k \quad (1)$$

et d'autre part un vecteur d'observation à  $m$  dimensions :

$$z_k = C_k x_k + \theta_k. \quad (2)$$

L'état initial du système est, par hypothèse, un vecteur aléatoire tel que :

$$E \{ x_0 \} = m_0 \quad \text{et} \quad \text{cov} [x_0, x_0] = \Sigma_0. \quad (3)$$

Le vecteur de contrôle  $u_k \in \mathbf{R}^r$  est supposé connu pour toutes les valeurs de  $k$ . Les bruits du système  $\{ \xi_k \}$  et d'observation  $\{ \theta_k \}$  sont supposés non corrélés de moyennes nulles et de covariance connue, i.e. les vecteurs aléatoires à  $q$  et  $m$  dimensions.  $\xi_k$  et  $\theta_k$  ont les propriétés statistiques suivantes pour tout  $k, j = 0, 1, 2, \dots$

$$\begin{aligned} E \{ \xi_k \} &= 0, & E \{ \theta_k \} &= 0; \\ \text{cov} [\xi_k, \xi_j] &= \Xi \delta_{kj} : \Xi \text{ définie non négative} \\ \text{cov} [\theta_k, \theta_j] &= \Theta \delta_{kj} : \Theta \text{ définie positive} \\ \text{cov} [\xi_k, \theta_j] &= 0 \end{aligned} \quad (4)$$

où  $\delta_{kj}$  est le delta de Kronecker défini par

$$\delta_{kj} = \begin{cases} 1 & k = j \\ 0 & k \neq j. \end{cases} \quad (5)$$

De plus, il est supposé que l'état initial  $x_0$  est non corrélé avec les vecteurs de bruit  $\xi_k$  et  $\theta_k$  pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$ , i.e.

$$\begin{aligned} \text{cov} [\xi_k, x_0] &= 0 \\ \text{cov} [\theta_k, x_0] &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Les matrices  $A_k$ ,  $B_k$ ,  $C_k$  et  $D_k$  sont supposées connues et non aléatoires pour toute valeur de  $k$  et ont les dimensions appropriées. Pour chaque valeur de  $k = 0, 1, 2, \dots$ , notons par  $z_k$  la séquence  $\{ z_j \}_{j=0 \text{ à } k}$  des vecteurs d'observation jusqu'à un temps  $k$  inclus, i.e.

$$z_k \triangleq \{ z_j \}_{j=0 \text{ à } k}.$$



Le problème est de trouver pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$  le meilleur estimateur linéaire de l'état à l'instant  $k + 1$ , connaissant la séquence d'observation de  $t = 0$  à  $t = k$  inclus, i.e. trouver le meilleur estimateur linéaire

$$\hat{x}_{k+1|k} \triangleq E^* \{ x_{k+1} \mid z_k \}$$

du vecteur aléatoire  $x_{k+1}$  en termes de la séquence  $z_k$  des vecteurs aléatoires d'observation  $z_0, z_1, \dots, z_k$ . Ce problème est traité dans la littérature [15] et la solution est donnée par la proposition suivante.

### Proposition

Le meilleur estimateur linéaire  $\hat{x}_{k+1|k}$  de l'état  $x_{k+1}$ , en termes de la séquence  $z_k = \{ z_j \}_{j=0,k}$  peut être exprimé par une relation de récurrence utilisant  $\hat{x}_{k|k-1}$  et  $z_k$  donnée par :

$$\hat{x}_{k+1|k} = A \hat{x}_{k|k-1} + B_k u_k + L_k [z_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}] \quad (7)$$

avec condition initiale

$$\hat{x}_{0|-1} = m_0 \triangleq E \{ x_0 \} \quad (8)$$

où la matrice gain est donnée pour tout  $k$  par :

$$L_k = A_k \Sigma_k C_k^T [C_k \Sigma_k C_k^T + \Theta_k]^{-1} \quad (9)$$

et où la matrice  $\Sigma_k$  définie non négative de dimension  $n \times n$  est la matrice de covariance de l'erreur d'estimation

$$\tilde{x}_{k|k-1} = x_k - \hat{x}_{k|k-1} \quad (10)$$

c'est-à-dire

$$\Sigma_k = \text{cov} [\tilde{x}_{k|k-1}, \tilde{x}_{k|k-1}] ,$$

et peut être précalculé en utilisant la relation itérative suivante :

$$\Sigma_{k+1} = A_k [\Sigma_k - \Sigma_k C_k^T [C_k \Sigma_k C_k^T + \Theta_k]^{-1} C_k \Sigma_k] A_k^T + D_k \Xi_k D_k^T \quad (11)$$

avec condition initiale

$$\Sigma_0 \triangleq \text{cov} [x_0, x_0] . \quad (12)$$

Cette proposition nous permet d'examiner la structure de l'estimateur ainsi défini.

Le filtre est composé de 3 parties :

- 1) Un modèle de la contrepartie déterministe du système.
- 2) Une matrice de gain  $L_k$  variant avec le temps.
- 3) Une boucle de rétroaction de gain unitaire et négatif.

A chaque instant  $k = 0, 1, 2, \dots$ , la boucle de rétroaction engendre le terme

$$\tilde{z}_{k|k-1} = z_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}$$

qui est non corrélé avec la séquence des observations passées  $z_{k-1}$  et représente l'information supplémentaire obtenue de par la nouvelle observation  $z_k$ . Ceci agit sur le système par une matrice de gain  $L_k$  et génère le meilleur estimateur linéaire

$$E^* \{ x_{k+1} | \tilde{z}_{k|k-1} \} = L_k(z_k - C_k \hat{x}_{k|k-1}). \quad (13)$$

En même temps, le modèle déterministe du système engendre le meilleur estimateur linéaire

$$\hat{x}_{k+1|k-1} = E^* \{ x_{k+1} | z_{k-1} \} = A_k \hat{x}_{k|k-1} + B_k u_k, \quad (14)$$

lequel peut être simplement ajouté à  $E^* \{ x_{k+1} | \tilde{z}_{k|k-1} \}$  pour donner le meilleur estimateur linéaire de l'état au temps  $k+1$ ,

$$\hat{x}_{k+1|k} = E^* \{ x_{k+1} | Z_k \} = E^* \{ x_{k+1} | Z_{k-1}, \tilde{z}_{k|k-1} \}. \quad (15)$$

Nous pouvons représenter la structure du filtre par le schéma suivant :

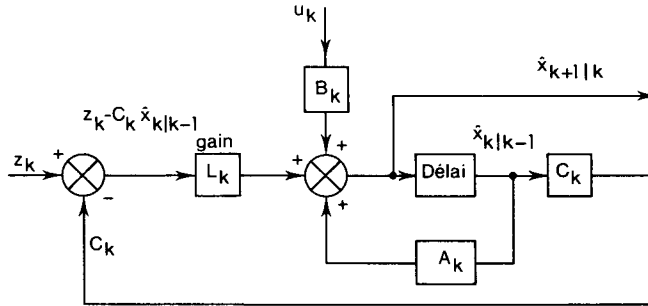


Figure 5

## b) Recherche de la commande optimale

Détails de la programmation dynamique : soit  $J_N(Z_{N-1}) \triangleq$  la valeur optimale de  $J$  pour un processus de contrôle à un étage, débutant à  $k = N-1$  et connaissant l'ensemble d'observations  $Z_{N-1} = \{ z_0, z_1, \dots, z_{N-1} \}$  et utilisant la commande optimale  $u_{N-1}$

$$J_N(Z_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \frac{1}{2} E \times \left\{ x_N^T S_N x_N + [x_{N-1}^T, u_{N-1}^T] \begin{bmatrix} M_{N-1} & N_{N-1} \\ N_{N-1}^T & P_{N-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-1} \\ u_{N-1} \end{bmatrix} / Z_{N-1} \right\} \quad (16)$$

utilisant les équations d'état en (2), nous avons

$$J_N(Z_{N-1}) = \min_{u_{N-1}} \frac{1}{2} E \{ x_{N-1}^T (A_{N-1}^T S_N A_{N-1} + M_{N-1}) x_{N-1} + 2 x_{N-1}^T (A_{N-1}^T S_N B_{N-1} + N_{N-1}) u_{N-1} + u_{N-1}^T (B_{N-1}^T S_N B_{N-1} + P_{N-1}) u_{N-1} / Z_{N-1} \}. \quad (17)$$

En laissant de côté les termes inutiles, nous obtenons

$$\frac{dJ_N}{du_{N-1}}(Z_{N-1}) = (B_{N-1}^T S_N A_{N-1} + N_{N-1}^T) E(x_{N-1} | Z_{N-1}) + \\ + (B_{N-1}^T S_N B_{N-1} + P_{N-1}) u_{N-1} = 0. \quad (18)$$

Si nous posons

$$\hat{x}_{N-1|N-1} = E[x_{N-1} | Z_{N-1}],$$

la commande optimale devient :

$$u_{N-1} = -(B_{N-1}^T S_N B_{N-1} + P_{N-1})^{-1} \{ (B_{N-1}^T S_N A_{N-1} + N_{N-1}^T) \hat{x}_{N-1|N-1} \}. \quad (19)$$

En substituant (19) dans (17) et en faisant quelques simplifications, nous obtenons

$$J_N(Z_{N-1}) = \frac{1}{2} E \{ x_{N-1}^T (A_{N-1}^T S_N A_{N-1} + M_{N-1} - \\ - E_{N-1}^T (B_{N-1}^T S_N B_{N-1} + P_{N-1}) E_{N-1}) x_{N-1} | Z_{N-1} \} \quad (20) \\ + \text{termes constantes}. \quad (21)$$

En posant

$$u_{N-1} = -E_{N-1} \hat{x}_{N-1|N-1} \quad (22)$$

avec

$$E_{N-1} = H_{N-1}^{-1} (B_{N-1}^T S_N A_{N-1} + N_{N-1}^T) \quad (23)$$

et

$$H_{N-1} = (B_{N-1}^T S_N B_{N-1} + P_{N-1}) \quad (24)$$

et si nous posons

$$S_{N-1} = A_{N-1}^T S_N A_{N-1} + M_{N-1} - E_{N-1}^T (B_{N-1}^T S_N B_{N-1} + P_{N-1}) E_{N-1} \quad (25)$$

nous obtenons

$$J_N(Z_{N-1}) = \frac{1}{2} E \{ x_{N-1}^T S_{N-1} x_{N-1} | Z_{N-1} \} + \text{termes constants}. \quad (26)$$

Maintenant, utilisant le principe d'optimalité nous avons

$$J_{N-1}(Z_{N-2}) = \frac{1}{2} \min_{u_{N-2}} \\ E \left\{ J_N(Z_{N-1}) + [x_{N-2}^T, u_{N-2}^T] \begin{bmatrix} M_{N-2} & N_{N-2} \\ N_{N-2}^T & P_{N-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{N-2} \\ u_{N-2} \end{bmatrix} / Z_{N-2} \right\}$$

et comme

$$E \{ J_N(Z_{N-1}) | Z_{N-2} \} = E \{ E \{ x_{N-1}^T S_{N-1} x_{N-1} | Z_{N-1} \} | Z_{N-2} \}$$

nous sommes ramenés à une forme similaire à la précédente ; on peut donc utiliser la même procédure jusqu'à l'étape première.

Les résultats sont donc les suivants :

avec

$$u_k = - E_k \hat{x}_{k|k}$$

$$E_k = H_k^{-1} (B_k^T S_{k+1} A_k + N_k^T)$$

$$H_k = B_k^T S_{k+1} B_k + P_k$$

$$S_k = A_k^T S_{k+1} A_k - E_k^T (B_k^T S_{k+1} B_k + P_k) E_k + M_k .$$