REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MARIE BESSON

Rang moyen et agrégation de classements

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 9, nº V1 (1975), p. 37-58

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_1_37_0>

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.A.I.R.O.
(9e année, janvier 1975, V-1, p. 37 à 59)

RANG MOYEN ET AGREGATION DE CLASSEMENTS (*)

par Marie BESSON (1)

Résumé. — *La notion de rang est bien connue pour résumer une structure d'ordre total dans le cas d'ensembles finis.*

Elle est généralisée ici aux structures de préordres quelconques, pour l'appliquer ensuite à certains problèmes statistiques :

— *obtention d'un préordre total à partir d'un ou plusieurs préordres quelconques,*

— *définition de distances entre éléments préordonnés (dans le but d'effectuer des typologies, par exemple).*

I. INTRODUCTION

Pour les ensembles finis munis d'un ordre total, la notion de rang est bien connue. Nous nous proposons dans cet article de la généraliser au cas des préordres quelconques, et de l'appliquer ainsi à certains problèmes d'analyse multicritère, et notamment à l'agrégation de classements.

Considérons les préordres totaux, la détermination d'un rang n'est pas absolument évidente.

Soit par exemple une classe de 24 élèves ou 23 d'entre eux ont pour note B et, le dernier a pour note C.

Devrons-nous dire, comme il est classique de le faire, que les 23 ex-acquo sont premiers (ont pour rang : 1) et que le dernier a pour rang 24 ?

Cela revient à donner une différence de rang égale à $24 - 1 = 23$.

Alors que si nous inversions notre point de vue à partir de la même situation, en considérant que le premier est celui qui a la plus mauvaise note, nous trouverions :

— un premier ayant pour rang 1

— 23 derniers ayant pour rang 2.

(*) Reçu le 26 novembre 1973.

(1) I.U.T. Transport et Logistique, Paris XIII, Villetaneuse.

Nous allons essayer de définir un rang plus « neutre », qui ne soit pas ainsi lié au sens par lequel on considère un même problème ([1]). Un rang correct sera tel que la différence de rangs, dans l'exemple que l'on vient de voir, ne soit ni « 1 », ni « 23 », mais la moyenne entre ces deux valeurs, c'est-à-dire : 12.

Nous lui donnerons le nom de *rang moyen.*

Après avoir défini un tel rang, nous étudierons ses diverses propriétés. Puis nous examinerons certaines de ses utilisations possibles dans le domaine de l'analyse multicritère. Ce sera essentiellement la façon d'obtenir un préordre total unique, à partir d'un ou plusieurs préordres quelconques (ce sera aussi une façon d'obtenir une distance entre des éléments préordonnés).

Nous présenterons ainsi une dérivée de la méthode Électre classique : l'utilisation du rang moyen permettra d'assouplir la demande d'information initiale, et de compléter l'information obtenue comme résultat.

II. RANG MOYEN

2.1. Définition du rang moyen

Soit E un ensemble quelconque à n éléments.

Soit P un préordre quelconque sur E.

Soit x un élément quelconque de E.

Soit $X'(x)$ l'ensemble des éléments y de E vérifiant les relations

yPx et $x \not P y$ (c'est l'ensemble des éléments strictement supérieurs à x, parfois noté Maj (x))

Soit $X''(x)$ l'ensemble des éléments y de E définis par les relations

xPy et $y \not P x$ (c'est l'ensemble des éléments strictement inférieurs à x, parfois noté Min (x))

(X' et X'' sont des applications de E dans $P(E)$).

Considérons les trois applications f, g et r de E dans R^+ (ensemble des réels positifs) définies par les relations I, II, et III ci-dessous :

Rang f :

$$\text{I} \quad \left| \begin{array}{ll} f(x) = 1 & \text{si } X'(x) = \varnothing \\ f(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in X'(x)} f(y) + \left| f^{-1} \operatorname*{Sup}_{y \in X'(x)} (f(y) \right| & \text{si } X'(x) \neq \varnothing \end{array} \right.$$

(1) Situation correspondant à une information se résumant à un préordre.

c'est-à-dire $f(x)$ vaut 1 si aucun élément n'est strictement supérieur à x d'après le préordre P; sinon $f(x)$ est égal à la plus grande valeur prise par f dans X' augmentée du nombre d'éléments de E ayant cette dernière valeur.

Rang g :

$$\text{II} \left| \begin{array}{ll} g(x) = 1 & \text{si } X''(x) = \varnothing \\ g(x) = \operatorname*{Sup}_{y \in X''(x)} g(y) + \left| g^{-1} \operatorname*{Sup}_{y \in X''(x)} g(y) \right| & \text{si } X'(x) \neq \varnothing \end{array} \right.$$

C'est-à-dire : $g(x)$ vaut 1 si aucun élément n'est strictement inférieur à x d'après le préordre P; sinon, $g(x)$ est égal à la plus grande valeur prise par g dans X'' augmentée du nombre d'éléments de E ayant cette dernière valeur.

Rang r :

$$\text{III} \cdot \left| \; r(x) = \frac{f(x) - g(x) + n + 1}{2} \right.$$

Nous conviendrons d'appeler « rangs » (1), ces trois applications f, g et r;

$r(x)$ étant le « rang moyen » de x relatif au préordre P,

$f(x)$ étant le « rang descendant »

$g(x)$ étant le « rang ascendant ».

2.2. Exemple de détermination des rangs associés à un préordre *P* sur *E*

Soit $E = \{ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8 \}$.

Soit P un préordre sur E, défini par sa décomposition en une relation d'équivalence R et une relation d'ordre T sur les classes formées par R (2).

On suppose R définie elle-même par la donnée des classes d'équivalence correspondantes : A, B, F, D et E.

$$\begin{aligned} A &= \{ x_1, x_2 \} \\ B &= \{ x_3 \} \\ F &= \{ x_4, x_5, x_6 \} \\ D &= \{ x_7 \} \\ E &= \{ x_8 \} \end{aligned}$$

T est défini par les relations : ATB, BTF, ATF, DTE.

(1) A ne pas confondre avec les « fonctions de rang » ou « graduation »; voir annexe.
(2) Un préordre est équivalent à une relation d'équivalence dont les classes sont ordonnées.

Si nous convenons de représenter une relation du type « XTY » par une flèche orientée de X vers Y, nous aurons :

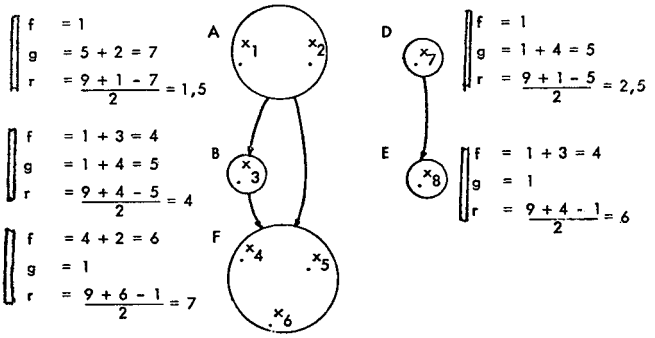


Figure 1

2.3. Si P est un préordre total

Supposons P défini par sa décomposition en classes d'équivalence ordonnées (totalement) $A_1, A_2 \ldots Am$

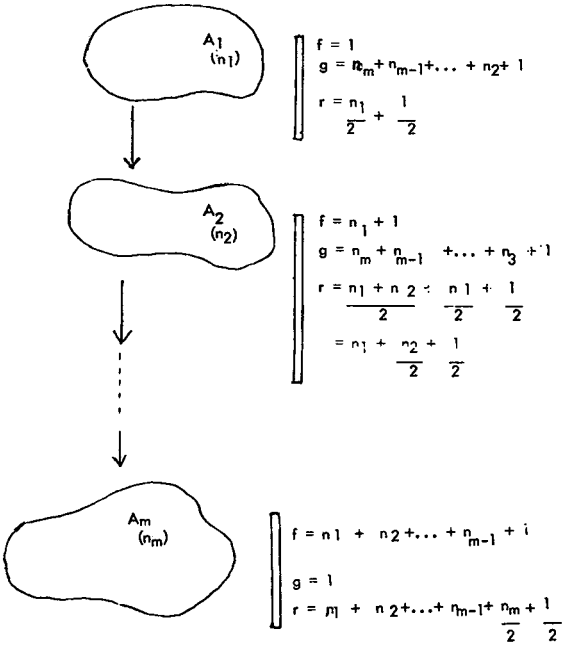


Figure 2

Plus généralement :

Soit n_i le cardinal de A_i.

Soit $x \in A_i$

$$f(x) = 1 + n_1 + n_2 + \dots + n_{i-1}$$
$$g(x) = 1 + n_m + n_{m-1} + \dots + n_{i+1}$$
$$r(x) = \frac{n + 1 + f(x) - g(x)}{2}$$
$$= \frac{2\left(\sum_{j=1}^{i-1} n_j\right) + 1 + n_i}{2} = \sum_{1=1}^{i-1} n_j + \frac{n_i + 1}{2}$$

REMARQUE : Pourquoi ce nom « rang moyen » ? Si chaque classe devient totalement ordonnée, la moyenne des rangs que l'on y trouve n'est autre que le rang moyen.

2.4. Ordre total

Si P est un ordre total, nous aurons alors :

$(\forall x \in E)(r(x) = f(x) =$ (nombre d'éléments de E « meilleurs » que x) $+ 1)$

D'autre part :

$(\forall x \in E)(g(x) = n + 1 - f(x) =$ (nombre d'éléments de E « moins bons » que x) $+ 1)$

En effet, nous aurons alors pour tout x de E.

$$|X'(x)| + |X''(x)| + 1 = n$$
$$f(x) = |X'(x)| + 1$$
$$g(x) = |X''(x)| + 1$$

Donc :

$$f(x) - 1 + g(x) - 1 + 1 = n$$

et :

$$g(x) = n + 1 - f(x)$$

D'autre part, nous aurons :

$$r(x) = \frac{f(x) - g(x) + n + 1}{2}$$
$$= \frac{f(x) - n - 1 + f(x) + n + 1}{2}$$
$$= f(x)$$

N.B.

La fonction g est alors une graduation ([1]).

2.5. Autres types d'ordres

Nous nous proposons ici de calculer nos rangs dans des exemples très divers :

2.5.1. Ordre quelconque

$$E = \{ A, B, C, D, E, F, G, H, I \}$$

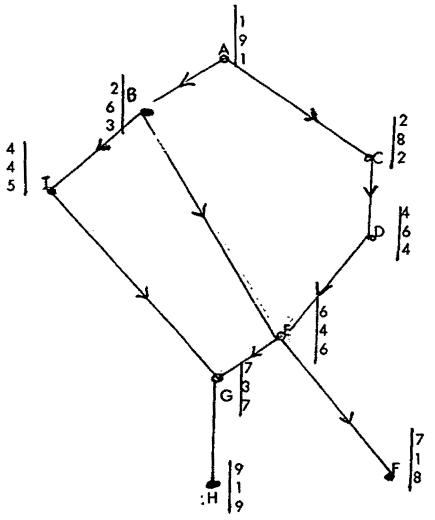


Figure 3

REMARQUE : Une flèche de X vers Y indique que « XPY », P étant la relation d'ordre considérée.

A côté de chaque élément de E, on trouve les valeurs des 3 rangs les unes sous les autres : $\left| \begin{matrix} f \\ g \\ r \end{matrix} \right.$

(1) Voir annexe.

Si nous rangeons ensuite les éléments de E, selon le rang moyen r, nous obtenons l'ordre total suivant :

Figure 4

2.5.2. Ordres gradués

Certains ordres sont dits « gradués » (1). C'est le cas par exemple de ceux qui admettent un minorant universel et vérifient la condition de Jordan Dedekind (1). En voici un exemple.

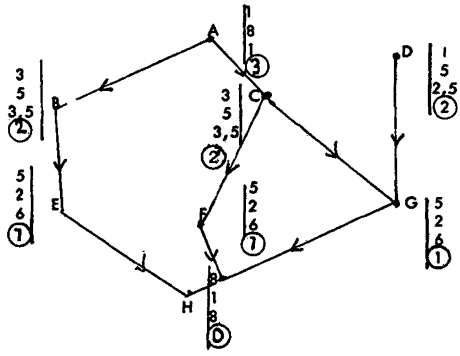


Figure 5

Nous avons pris ici comme graduation (valeur entourée) la hauteur de chaque élément.

REMARQUE :

Si dans un ensemble ordonné et gradué deux éléments ont même graduation, ils ont même rang ascendant g.

(1) Voir annexe.

Rangements comparés suivant

Rang moyen	et graduation
A	*A*
D	*B, C, D*
B, C	*E, F, G*
E, F, G	*H*
H	

2.5.3. Treillis gradué (1)

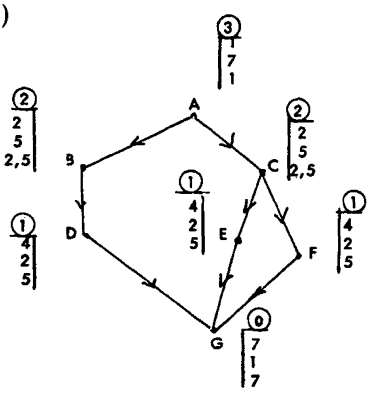


Figure 6

Nous avons pris comme graduation (valeur entourée), la hauteur de chaque élément, *h* (1).

REMARQUE :

Si dans un treillis gradué, deux éléments ont même graduation, ils ont aussi même rang ascendant, même rang descendant et donc même rang moyen.

Les rangements comparés suivant *r*, *f*, *g* ou *h* sont donc identiques.

2.5.4. Treillis modulaire (1)

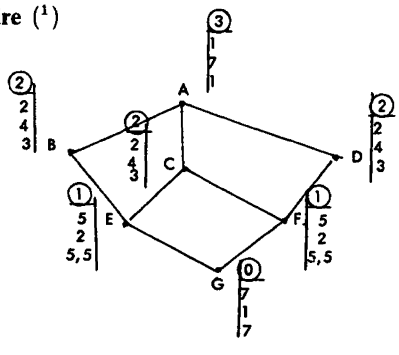


Figure 7

(1) Voir annexe.

La graduation de chaque élément (hauteur) est comme précédemment, entourée sur le dessin.

Comme pour les treillis gradués, les rangements suivant r, f, g ou h demeurent identiques.

2.6. Relation d'équivalence

La notion de rang perd dans ce préordre particulier l'essentiel de son intérêt.

Il est trivial de constater que nous avons alors, pour tout élément x de E :

$$f(x) = 1$$
$$g(x) = 1$$
$$r(x) = \frac{f - g + n + 1}{2} = \frac{n + 1}{2}$$

Tous les éléments de E ont même rang moyen : la moyenne des rangs obtenus dans le cas d'un ordre total. Cela semble logique mais sans guère d'intérêt.

III. UTILISATIONS

3.1. Généralités

Nous venons ainsi de montrer comment, à partir d'un préordre quelconque dans un ensemble E fini, nous pouvons obtenir une application de E dans R, appelée « rang moyen », résumé de l'information initiale.

Observons les *qualités de ce rang moyen :*

1. *Universalité. Unicité*

Ce rang moyen s'applique à tout préordre et dans chaque cas, il est unique.

2. *Compatibilité*

Dans le cas particulier des ordres totaux, nous retrouvons le « rang », au sens trivial du terme, dans la langue française.

3. *Neutralité*

Certains rangs sont liés au sens par lequel on itère pour les déterminer.

C'est le cas des rangs ascendants et descendants. Le rang moyen au contraire est neutre par rapport au sens d'itération.

4. *Sans à priori*

Si aucune information de rangement n'est donnée au départ (relation d'équivalence), aucune information ne sera fournie par notre rang moyen : pour chacun des éléments de E, il prendra en effet la même valeur : la moyenne de tous les rangs possibles.

5. *Correspondance entre préordre et rang moyen :*

Observons maintenant l'application qui fait correspondre un rang moyen à tout préordre quelconque.

Cette application α n'est pas injective. En effet, reprenons l'exemple du paragraphe (2.5.1). Il est clair que l'ordre

« $A\ C\ B\ D\ I\ E\ G\ F\ H$ »

donnerait le même rang moyen :

$$\begin{aligned} r(A) &= 1 \\ r(C) &= 2 \\ r(B) &= 3 \\ r(D) &= 4 \\ r(I) &= 5 \\ r(E) &= 6 \\ r(G) &= 7 \\ r(F) &= 8 \\ r(H) &= 9 \end{aligned}$$

Par contre, *la restriction* α_c *de cette application aux préordres totaux est injective* (la démonstration est triviale).

Mais, ni α, ni α_c ne sont surjectives évidemment.

Étudions maintenant *certaines utilisations possibles.*

3.2. Passage d'un préordre quelconque à un préordre total

Soit P_i un préordre quelconque sur E.

Soit r le rang moyen correspondant.

Le classement des éléments de E, selon ce rang moyen, donne un préordre total sur E. L'application correspondante (d'un préordre quelconque à un préordre total) est idempotente.

3.3. Passage des préordres quelconques pondérés à un préordre total unique

Soient $P_1, P_2 \ldots P_p$ un ensemble de p préordres quelconques sur E.

Soient $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p$ des coefficients de pondération associés à ces préordres.

Soient $x_1, x_2 \dots x_n$ les éléments de E.

Nous pouvons transcrire tous nos rangs moyens sur le tableau suivant :

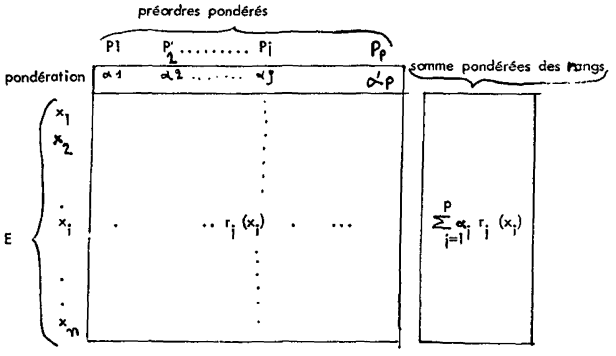


Figure 8

Nous calculons ensuite dans la dernière colonne la somme pondérée des rangs ainsi obtenus. Un classement final suivant cette somme pondérée nous donne un préordre total sur E, résumé de notre p-uplet de préordres quelconques et pondérés du départ.

Nous aurions pu également utiliser pour cela par exemple une dérivée de la méthode Electre classique décrite dans la partie IV de ce texte.

3.4. Distance entre éléments préordonnés

Une troisième utilité de ce rang moyen nous semble être la possibilité de déduire d'un p-uplet de préordres quelconques sur E, des distances entre les éléments de E.

Reprenons les mêmes notations que précédemment.

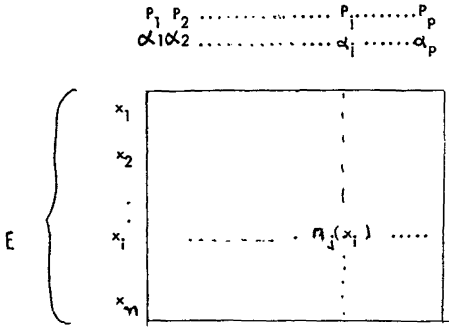


Figure 9

Chaque élément x_i de E correspond ainsi à un vecteur de $\mathbf{R}^p$.

Toute distance sur $\mathbf{R}^p$ définit donc une distance sur E.

REMARQUE :

La détermination de distances entre éléments préordonnés d'un certain ensemble E, nous permettra notamment d'établir des typologies sur E (voir [4] et [10]).

IV. UNE DERIVEE DE LA METHODE ELECTRE

4.1. Données

Soit E un ensemble de n éléments $x_1, x_2 \dots x_j \dots x_n$.

On suppose connu sur E p préordres d'importances relatives $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_i, \dots \alpha_p$

Posons :
$$\pi = \sum_{i \leqslant p} \alpha_i$$

(on aura souvent : « $\pi = 1$ »).

Le problème consiste à trouver un préordre P sur E, résumant ces m préordres pondérés.

4.2. Ensembles de concordance

Considérons ExE, ensemble des couples d'éléments de E.

Nous définirons une famille Q de parties de ExE de la manière suivante :

avec
$$Q = [Qk/k \in (O, 1)]$$
$$(\forall (x, y) \in ExE) \left((x, y) \in Qk \Leftrightarrow \sum_{xPy} \alpha_i \geqslant k \,.\, \pi \right)$$

Nous conviendrons d'appeler Qk « ensemble de concordance au niveau k ». Qk comporte donc tous les couples (x, y) tels que la relation xPy soit acceptée par un ensemble de préordres dont la somme des pondérations est supérieure ou égale à $k \,.\, \pi$.

Notons que :
$$(k > k') \Rightarrow (Q_k \subset Q_{k'})$$

C'est-à-dire il y a monotonie décroissante des Q_k par rapport aux k.

Q est une famille de parties incluses les unes dans les autres.

4.3. Ensembles de discordance

Nous définirons ensuite une famille D de parties de ExE de la manière suivante :

$$D = \{ D_j / j \in (O, 1) \}$$

avec $(\forall (x, y) \in ExE) \quad ((x, y) \in D_j \Leftrightarrow \operatorname*{Sup}_{P_1, P_2 \cdots P_p} (\text{Rang } y - \text{Rang } x) \geqslant j(n - 1))$

(Il s'agit ici de rangs moyens.)

Nous conviendrons d'appeler D_j « ensemble de discordance au niveau j ».

D_j comporte donc tous les couples (x, y) d'éléments de E tels que l'un au moins des critères $P_1, P_2 \ldots P_p$ refuse l'inégalité « x meilleur que y », en plaçant y au moins $j(n - 1)$ rangs au-dessus de x.

Notons que :

$$(j > j') \Rightarrow (D_j \subset D_{j'})$$

donc $(j > j') \Rightarrow (CD_j \supset CD_{j'})$.
(C signifie « complémentaire dans ExE »).

4.4. Relation binaire

Considérons alors l'intersection de Qk et du complémentaire de D_j et enlevons-lui la diagonale de ExE :

$$I_{kj} = [Qk \cap CD_j] - [\text{Diagonale de } ExE]$$

La diagonale en question est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x = y$. Ikj est une fonction croissante de j et décroissante de k.

Nous conviendrons d'accepter la relation « x meilleur que y » si et seulement si : $(x, y) \in I_{kj}$.

4.5. Fermeture réflexo-transitive

Nous prendrons ensuite la fermeture réflexo-transitive de I_{kj} dans le produit cartésien ExE et nous appliquerons le rang moyen r correspondant à ce préordre quelconque.

Le résultat de la méthode Electre n'est autre que le rangement des éléments de E suivant r.

4.6. Exemple d'application du programme Electre utilisé ici

* 4 éléments dans l'ensemble de base
* 5 critères.

Soit E un ensemble quelconque à 4 éléments ($n = 4$)

$$E = \{ x_1, x_2, x_3, x_4 \}$$

Supposons connus 5 préordres totaux sur E : P_1, P_2, P_3, P_4 et P_5 de même importance (équipondération : $(\forall i \leqslant 5)(\alpha_i = 1)$).

Nous convenons de représenter chaque préordre P_i par une colonne telle que :

$x_j P_i x_k \Leftrightarrow x_j$ se trouve, dans la colonne i, sur une ligne précédente, ou à la même ligne que x_k.

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_1	$x_1 x_2$	x_3	x_2	x_1
x_3	x_4	x_1	$x_1 x_3 x_4$	x_2
x_4	x_3	x_2		x_3
x_2		x_4		x_4

Figure 10

Tableau des rangs moyens correspondant

	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_1	1	1,5	2	3	1
x_2	4	1,5	3	1	2
x_3	2	4	1	3	3
x_4	3	3	4	3	4
somme	10	10	10	10	10

Figure 11

Exemple de calcul (pour P_2) :

$$f(x_2) = 1$$

$$g(x_2) = 3$$

$$z(x_2) = \frac{n + 1 + f - g}{2}$$

$$= \frac{5 + 1 - 3}{2} = 1{,}5$$

Tableau des concordances :

$$q(x_j, x_k) = \sum_{i / x_j P_i x_k} q_i$$

$x_k \backslash x_j$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5	2	2	1
x_2	4	5	2	1
x_3	4	3	5	1
x_4	5	4	4	5

Figure 12

Tableau des discordances

$$d(x_j, x_k) = \operatorname*{Sup}_{i \leqslant 4} \begin{pmatrix} \text{rang de } x_j & - \text{ rang de } x_k \\ \text{suivant } P_i & \text{suivant } P_i \end{pmatrix}$$

x_k \ x_j	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	3	2,5	3
x_2	2	0	2,5	2,5
x_3	1	2	0	3
x_4	0	1	1	0

Figure 13

Niveau de concordance choisi : 80 %.

Niveau de discordance choisi : 40 %

Donc : 80 % × somme des pondérations $= \frac{80}{100} . 5 = 4$

et : 40 % (nombre d'éléments de $E - 1$) = 40 % 4 = 1,6.

Ensemble de concordance correspondant (couples d'éléments de E dont la concordance est $\geqslant 4$)

$$Q_{(80\%)} = \{ (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_4), (x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4) \}$$

Ensemble de discordance correspondant (couples d'éléments de E dont la discordance est $\geqslant 1{,}6$)

$$D_{(40\%)} = \{ (x_1, x_2), (x_2, x_1), (x_2, x_3), (x_3, x_1), (x_3, x_2), (x_4, x_1), (x_4, x_2), (x_4, x_3) \}$$

Relation binaire correspondante (couple d'éléments de E dont la concordance est supérieure ou égale à 4 et dont la discordance est inférieure ou égale à 1,6)

$$\begin{aligned} I_{(80\%, 40\%)} &= Q_{80\%} \cap \complement D_{40\%} \\ &= \{ (x_1, x_1), (x_2, x_2), (x_3, x_3), (x_4, x_4), (x_1, x_3), (x_1, x_4), (x_2, x_4), (x_3, x_4) \} \end{aligned}$$

Représentons cet ensemble sous forme de graphe : deux sommets sont liés par une flèche orientée du premier vers le second si – et seulement si – le couple d'éléments de E qu'il constitue appartient à $I_{80\%, 40\%}$

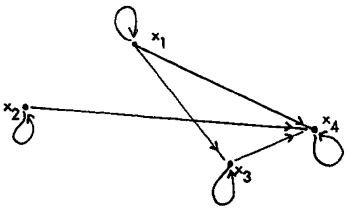


Figure 14

Cette relation binaire est transitive, antisymétrique et réflexive, c'est un ordre (1). (Cet ordre n'est pas total puisque les éléments x_1 et x_2 sont incomparables.)

Il nous reste à le transformer en ordre total.

Pour cela nous faisons le calcul du rang moyen.

(1) Si elle n'avait pas été transitive, nous l'aurions complétée en prenant sa fermeture transitive.

Calculons le rang f pour les 4 éléments :

$$f(x_1) = f(x_2) = 1$$

parce qu'aucun élément ne leur est préféré.

$$f(x_3) = 3$$

parce que x_3 vient après x_1 dont le rang est 1 et qu'il y a deux éléments qui ont pour rang 1.

$$f(x_4) = 4$$

parce que x_4 vient après x_3 dont le rang est 3 et qui est le seul à avoir ce rang 3.

Calculons le rang g par une méthode analogue appliquée en sens inverse :

$$g(x_4) = 1$$

parce qu'aucun élément ne lui est inférieur

$$g(x_3) = g(x_2) = 2$$

parce que x_4, de rang 1, est le seul élément qui leur soit inférieur.

$$g(x_1) = 4$$

parce que x_3, de rang 2, est inférieur à x_1 et qu'il y a deux éléments qui ont pour rang 2.

Le calcul du rang moyen r découle de la formule :

$$r(x) = \frac{n + 1 + f(x) - g(x)}{2}$$

Nous aurons donc :

$$r(x_1) = 1$$
$$r(x_2) = 2$$
$$r(x_3) = 3$$
$$r(x_4) = 4$$

Notre classement final sera donc :

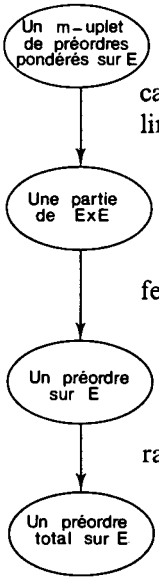
$$\boxed{x_1 > x_2 > x_3 > x_4}$$

4.7. Conclusion et exemples d'utilisation

Ainsi, à partir d'un m-uplet de préordres pondérés quelconques sur E, on obtient un préordre total sur E. Dans la méthode Electre classique, chaque point de vue devait correspondre non pas seulement à un préordre quelconque, mais à une série de notes ; tandis que le résultat était seulement la donnée d'un groupe de 1 ou plusieurs éléments non surclassés (le noyau).

Notre méthode présente ainsi une économie d'information initiale, et un supplément d'information final.

En voici un résumé graphique :



calcul des rangs moyens d'où l'on déduit Q_k, D_l, puis la relation linéaire :

$$I_{k,l} = Q_k \cap \complement D_l$$

fermeture transitive dans le produit cartésien $E \times E$

rangement suivant le rang moyen

Figure 15

REMARQUE :

Il est à noter que cette transformation d'Electre s'est faite en plusieurs étapes :

– en 1970, nous en avons fait une 1e modification dans le cadre du Cetem (voir [3], [7]) en développant en particulier les rangs f et g.

– En 1971, la SEMA créait Electre II qui à partir de données ordinales ou cardinales aboutissait à un préordre total (voir [6], [7]).

Nous avons fait des essais sur des ensembles de faible dimension, à partir de préordres totaux, dans deux domaines très différents :

a) *Dans le domaine maritime :*

Un groupe d'experts en matière de navigation avaient classés un ensemble de 23 caboteurs, suivant les 10 points de vue que voici :

recettes
soutes
frais de port
forme
longueur des écoutilles (aptitude à la charge de conteneurs)
largeur des écoutilles (idem)
portée
tirant d'eau
aides à la navigation (présence éventuelle de goniomètres, etc...)
nombres de ponts (les « sheltered-dock » étant assimilés aux 2 ponts).

Chaque point de vue donnait un préordre total sur l'ensemble E des 23 caboteurs.

Ces préordres étaient pondérés suivant des considérations de rentabilité.

Il s'agissait, à partir de ces 10 points de vue différents, d'obtenir un classement complet sur notre ensemble de 23 caboteurs, et de pouvoir dire ainsi lesquels étaient meilleurs que les autres.

L'application de la dérivée d'Electre a donné de bons résultats ([1]).

b) *En sociologie*

Lors d'une étude comparative sur les emplois du temps dans les divers pays du monde, suivant les critères sexe et état matrimonial, on s'est amusé à considérer (suivant l'optique d'un individu parfaitement paresseux et bon vivant) qu'un emploi du temps était meilleur qu'un autre s'il correspondait à une durée quotidienne plus faible en travail, en transport obligatoire, et en ménage; et à une durée plus longue au contraire en repos, en sommeil, en télévision et en autres loisirs divers (certaines rubriques étaient considérées *a priori* comme neutres, n'apportant ni de l'agrément, ni du désagrément, pour un individu paresseux et bon vivant : tel était le cas pour les courses, la toilette et le soin aux enfants).

A partir de ces préordres totaux sur l'ensemble E des catégories humaines considérées, notre programme a montré, par exemple, que l'emploi du temps le plus enviable de tous était celui des femmes mariées des pays d'Europe de l'ouest !

REMARQUE : Le programme, testé dans le cas où les données de base sont des préordres totaux, ne semble pas poser de difficultés particulières.

ANNEXE

RAPPEL DE CERTAINES DEFINITIONS MATHEMATIQUES

Soit E un ensemble fini quelconque.

Préordre :

Un préordre P sur E est une relation binaire réflexive et transitive.

Préordre total :

Un préordre P sur E est dit « total », s'il permet de comparer tout couple d'éléments de E : $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(xPy$ ou $yPx)$.

(1) Notons que cette même méthode a été également appliquée pour étudier l'approfondissement optimal du chenal de Douala.

Ordre (1) :

Un ordre R sur E est une relation binaire réflexive, antisymétrique et transitive.

Ordre total :

Un ordre R sur E est dit « total » s'il permet de comparer tout couple d'éléments de E.

Relation d'équivallence :

Une relation d'équivallence sur E est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive.

Treillis :

Un treillis est un ensemble ordonné tel que chaque couple (x, y), d'éléments admette un surpremum et un infimum.

Majorant-minorant :

Soit R une relation d'ordre sur E.

Soient x et y deux éléments quelconques différents de E.

On dit que « x est un majorant de y » si et seulement si xRy.

De même, on dit que « x est un minorant de y » si et seulement yRx.

Majorant-universel :

Soit R une relation d'ordre sur E.

Soit x un élément de E.

On dit que « x est un majorant universel de E » si et seulement si on a : $(\forall y \in E)(xRy)$.

Intervalle-intermédiaire :

Si x minore y, on appelle intervalle $[x, y]$, l'ensemble des éléments intermédiaires entre x et y, c'est-à-dire l'ensemble des éléments t tels que : xRt et tRy.

Prédécesseur-Successeur :

On dit que x succède à y si et seulement si x est un majorant de y, distinct de y, et tel qu'il n'y ait aucun élément intermédiaire entre x et y.

---

(1) Ou « ordre au sens large », diffère de l'ordre strict par sa réflexivité.

Maximal-Minimal :

Soit X une partie d'une ensemble ordonné E.

Soit x un élément de E.

On dit que « x est maximal », si et seulement si : (i) $x \in X$
(ii) $(\nexists / y \neq x)(yRx$ et $y \in X)$

Maximum-Minimum :

Soit X une partie d'un ensemble ordonné E.

Soit x un élément de E.

On dit que « x est maximal », si et seulement si : (i) $x \in X$
(ii) $(\forall y \in X)(xRy)$

Sup. demi treillis :

Ordre tel que chaque couple d'éléments de E admette un plus petit majorant commun.

Inf. demi treillis :

Ordre tel que chaque couple d'éléments de E admette un plus grand minorant commun.

Chaîne :

Sous-ensemble totalement ordonné de E.

Longueur d'une chaîne :

Soit m le nombre d'élément d'une chaîne C.

On dit que la longueur de cette chaîne est $m - 1$.

Longueur d'un ensemble ordonné :

Par définition, c'est le supremum de la longueur de ses chaînes c'est-à-dire le plus petit des majorants de ses longueurs.

Hauteur d'un élément :

Soit E un ensemble ordonné de longueur finie, ayant un minorant universel O.

On appelle hauteur d'un élément x de E, la longueur de l'intervalle $[O, x]$: $h(O) = l([O, x])$.

Condition de Jordan Dedekind :

Toutes les chaînes maximales entre 2 éléments ont la même longueur.

Un ensemble E ordonné par R est *semi-modulaire supérieurement* s'il vérifie la condition suivante :

Si x et y succèdent à un même élément z, ils précèdent un même quatrième t.

C'est la condition du quadrilatère.

Profondeur d'un élément :

Soit E un ensemble ordonné, de longueur finie, admettant un majorant universel u.

On appelle « profondeur » d'un élément x de E, la longueur de l'intervalle $[x, u]$:

$$p(x) = l([x, u])$$

Dimension - Codimension :

Soit E un ensemble ordonné admettant un minorant universel O (dualement « majorant universel » u).

On appelle dimension (dualement « codimension ») l'application d suivante :

$$d(x) = h(x) - 1$$
$$(cod(x) = p(x) - 1)$$

Théorème :

Un ensemble ordonné (de longueur finie) semi-modulaire supérieurement, vérifie la condition de Jordan Dedekind.

« *Graduation* » *ou* « *Fonction de rang* »

Un ensemble ordonné E est gradué s'il existe une application g de E dans l'ensemble des entiers positifs ou négatifs Z, vérifiant :

$$i) \quad (xRy \text{ et } y\not{R}x) \Rightarrow (g(y) \leqslant g(x))$$
$$ii) \quad x \text{ précède } y \Rightarrow g(y) = g(x) + 1$$

L'application g est appelée « graduation », ou « fonction de rang ».

Théorème : Un ensemble ordonné gradué (de longueur finie) vérifie la condition de Jordan Dedekind.

Théorème : Un ensemble ordonné, avec minorant (ou majorant) universel vérifie la condition de Jordan Dedekind si et seulement si il est gradué.

En conclusion : Appelons Ω l'ensemble des ensembles ordonnés de longueur finie.

Soit SM le sous-ensemble des semi-modulaires.

Soit G le sous-ensemble des gradués.

Soit $\mathfrak{J}D$ le sous-ensemble de ceux qui vérifient la condition de Jordan Dedekind.

Soit MU le sous-ensemble de ceux qui admettent un minorant universel.

Nous avons :

$$SM \subset \mathfrak{J}D$$
$$G \subset \mathfrak{J}D$$
$$SM \cap MU \subset G \cap MU$$
$$G \cap MU = MU \cap \mathfrak{J}D$$

D'où le graphique :

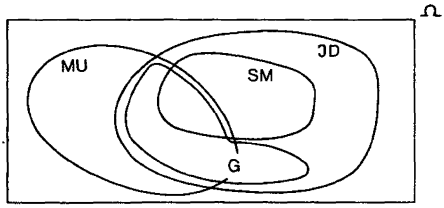


Figure 16

BIBLIOGRAPHIE

[1] BARBUT M. et MONJARET B., *Ordre et classification, algèbre et combinatoire*, UPI 1972 (tomes 1 et 2).

[2] BENAYOUN R., ROY B., SUSSMANN B., *Manuel de référence du programme Electre*, Note de synthèse, Formation, n° 25. Direction scientifique Sema, juin 1966.

[3] BERNARD G. et BESSON M., *Douze méthodes d'analyse multicritère*, RIRO, n° V-3, 1971.

[4] BESSON M., *Iphi, ou un nouveau procédé de typologie*. Séminaires de l'IRIA, classification automatique et perception par ordinateur, 1973.

[5] BESSON M., *A propos des distances entre ensembles de parties*, Mathématiques et sciences humaines, 11 année, n° 42, 1973.

[6] CROLLEAU, et TERGNY J., *Manuel de référence du prog. Electr. II*, déc. 1971.

[7] GUIGOU J. L., *Analyse des données et choix à critères multiples*, Dunod, 1973.

[8] LERMAN I. C., *Les bases de la classification automatique*, Gauthier Villars, 1970.

[9] ROY B., *Algèbre moderne et théorie des graphes*, Dunod, 1969.

[10] ROUX M., « Algorithmes pour construire une hiérarchie particulière ». Thèse de 3e cycle. Stat. math. Déc. 1968. UNIV, Paris.