

R. LAURINI

**Modèle de reconstitution de l'évolution  
démographique intercensitaire en milieu urbain**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 9, n° V1 (1975), p. 19-36

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1975\\_\\_9\\_1\\_19\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_1_19_0)

© AFCET, 1975, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## MODELE DE RECONSTITUTION DE L'EVOLUTION DEMOGRAPHIQUE INTERCENSITAIRE EN MILIEU URBAIN \*

par R. LAURINI <sup>(1)</sup>

---

*Résumé. — La planification du développement d'une agglomération urbaine nécessite un modèle de projections démographiques. Mais lorsque les données sont insuffisantes, il faut reconstituer l'histoire de la population afin d'en appréhender les paramètres d'évolution, notamment ceux qui concernent les migrations. Le but de cet article est de déterminer les pyramides des âges annuelles moyennes :*

- de tous les immigrants,*
- des immigrants venant habiter seulement les logements neufs,*
- du solde des migrations dans les logements anciens.*

*Il est alors possible de déterminer par année une estimation de la population par tranche d'âges et par sexe.*

*Ce modèle a été appliqué à diverses villes de la Communauté Urbaine de Lyon, en utilisant les recensements INSEE (1962, 1968) ainsi que les logements neufs mis en service entre ces dates.*

Le rôle du planificateur est de prévoir et de maîtriser le développement d'une agglomération urbaine ou d'une région. Dans ce but, il doit bien connaître le passé afin d'en tirer des tendances. Une fois connue de manière suffisamment précise l'évolution antérieure, il sera possible d'en faire une modélisation et une identification à partir des données existantes et finalement en déduire les valeurs numériques des paramètres.

Grâce à ces paramètres et à sa connaissance de l'environnement, le planificateur pourra réaliser des projections selon diverses hypothèses. Mais hélas, souvent les données sont insuffisantes ou regroupées de façon peu utilisable. Il se pose alors le problème suivant : comment faire pour reconstituer point par point l'évolution antérieure.

C'est le rôle d'un tel modèle de reconstituer les données manquantes. Il se trouvera donc en amont du processus de planification qui utilise essentiellement un modèle de projections.

---

(1) Département d'Informatique de l'I.N.S.A. de Villeurbanne.

(\*) Reçu le 2 juillet 1973.

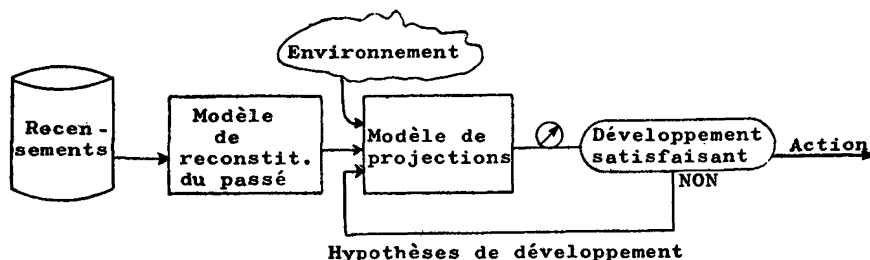


Figure 1

Notre propos ici est donc d'écrire un modèle d'interpolation entre les recensements 1962 et 1968 du développement démographique en milieu urbain. Ainsi grâce à cette reconstitution du passé, on déterminera les paramètres (notamment taux de migrations) de l'évolution urbaine qui serviront de base pour des projections démographiques. Celles-ci seront utilisées :

- d'une part pour connaître l'évolution de la population,
- d'autre part, pour déterminer les équipements indispensables pour couvrir les besoins des habitants, c'est-à-dire prévoir un développement plus harmonieux de l'espace urbain.

L'Atelier d'Urbanisme de Lyon nous a chargé de réaliser un tel modèle pour la Communauté Urbaine de Lyon (COURLY), ce qui nous a amené à réaliser trois sous-ensembles :

- évolution d'une population stable,
- peuplement des logements neufs,
- modèles d'emménagement/déménagement ;

avec les données suivantes :

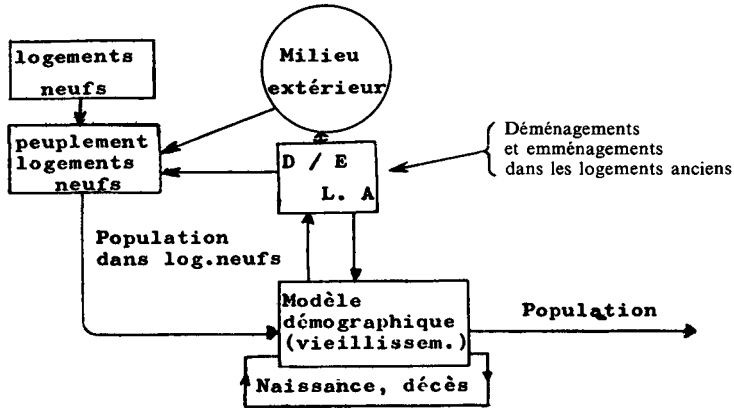
- population par tranche d'âge de 5 ans et par sexe en 1962 et 1968,
- nouveaux logements mis en service par année avec distinction de type,
- taux de fécondité par âge et total de mortalité pour le département du Rhône, pour l'agglomération lyonnaise et la ville de Lyon en 62 et 68.

Pour le calcul de l'évolution de la population d'une année à l'autre la formule fondamentale est la suivante :

$$P_{i+1} = AP_i + S_i$$

où

- $P_i$  population par tranche d'âge à l'année  $i$
- $A$  matrice de transition (vieillesse, décès, naissance)
- $S_i$  solde des migrations à l'année  $i$ .



**Figure 2**

Le vecteur population sera ainsi formé :

$P$	{	— nombre de femmes de	0 à 4 ans
		—	5 à 9 —
		—	.
		—	.
		—	.
		—	70 à 74 —
		—	75 et +
		— nombre d'hommes de	0 à 4 ans
		—	5 à 9 —
		—	.
		—	.
		—	70 à 74 —
—	75 et +		

ce qui donne un vecteur à 32 composantes (espace  $R^{32}$ ). Nous avons décidé de travailler sur ce vecteur car l'encombrement mémoire et le nombre de calculs sont beaucoup moins importants qu'en gardant des tranches d'âge d'un an ( $R^{200}$ ). En revanche, la procédure de vieillissement d'un an est plus délicate : en effet, dans une tranche d'âge donnée, en l'absence de mortalité, si la population est uniforme dans cette tranche, 1/5 de la population passe dans la tranche supérieure et 4/5 y reste.

De plus, alors que la plupart des modèles d'évolution démographique ne s'occupent, à cause de la fécondité, que de la population féminine, ou encore par souci de simplification, ne font aucune distinction de sexe, de notre côté, nous avons préféré travailler avec ces deux catégories de population [1],[2], [8], [9], [12].

Dès lors, notre modèle se caractérise :

- par la distinction des sexes,
- le découpage en tranches d'âge de 5 ans,
- des bonds d'une année.

## I. EVOLUTION DE LA POPULATION STABLE

Selon le cas, nous travaillerons dans  $R^{200}$  ou  $R^{32}$ . On appellera par la suite « contraction » des vecteurs et des matrices, la transformation qu'ils subissent en passant de  $R^{200}$  à  $R^{32}$  et « dilatation » la transformation inverse.

Nous verrons successivement le calcul de :

- la matrice  $A$  dans  $R^{200}$  et ses propriétés,
- la contraction de  $A$  dans  $R^{32}$  et ses conséquences.

### I.1. Calcul de $A$ dans $R^{200}$

Cette matrice définit l'opérateur qui fait passer une population de l'année  $i$  à l'année  $i + 1$ . Elle a la forme suivante :

$$A = \begin{pmatrix} F & 0 \\ G & H \end{pmatrix} = (A_{ij})$$

Les sous-matrices  $F$ ,  $G$ ,  $H$  étant respectivement :

- $F$  : transformation de la population féminine,
- $G$  : naissance de garçons,
- $H$  : vieillissement de la population masculine.

Figure 3

Les caractéristiques du mouvement naturel de la population entraînent les relations suivantes sur les éléments de cette matrice :

#### a) Mortalité et vieillissement

Ces phénomènes correspondent à la sous-diagonale de  $A$ . Si on pose  $s_{i+1}$  le taux de survie (population passant de l'âge  $i$  à l'âge  $i + 1$ ) on a :

$$(A_{i+1,i}) = s_{i+1}$$

#### b) Fécondité

Elle correspond aux lignes horizontales de  $A$ . Soient :

- $f_i$  le taux de fécondité à l'âge  $i$ ,
- $\tau_m$  le taux de masculinité des naissances,
- $\tau_f$  le taux de féminité des naissances.

On a les relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} (A_{1,i}) &= \tau_f f_i \\ (A_{101,i}) &= \tau_m f_i \end{aligned} \right\} \tau_m + \tau_f = 1$$

$$\tau_m = 0,512$$

$$\tau_f = 0,488$$

c) *Caractéristiques de la matrice A dans  $R^{200}$*

En utilisant la décomposition de  $A$  en sous-matrices, son polynôme caractéristique s'écrit :

$$D(A - \lambda I) = D(F - \lambda I) \cdot D(H - \lambda I)$$

Or :

$$D(H - \lambda I) = \lambda^{100}$$

De plus, la sous-matrice  $F$  a une forme voisine de celle de Frobenius ; il est alors aisé d'écrire son polynôme caractéristique de degré 100 :

$$D(F - \lambda I) = \lambda^{100} - \sum_{i=0}^{100} \lambda^{100-i} (A_{1,i}) \prod_{j=1}^{j=i} (A_{j,j-1})$$

Deux remarques sont à formuler :

- $\lambda = 0$  est solution d'ordre 100 ; donc  $A$  est singulière ;
- $\lambda_{\text{MAX}}$  (valeur propre maximale) est souvent proche de 1 dans les populations existantes. Son calcul nécessite la résolution d'une équation de 100° degré. Elle a été résolue par la méthode de la position fausse en écrivant le polynôme sous la forme de Horner.

Voici quelques valeurs de  $\lambda_{\text{MAX}}$  :

— France.....	1966 : 1,0113
— France.....	1968 : 1,0126
— Rhône.....	1968 : 1,0121
— Agglomération lyon. ....	1968 : 1,0118
— Lyon.....	1968 : 1,0104
— Villeurbanne .....	1968 : 1,0126

## 1.2. Calcul de $A$ dans $R^{32}$

La difficulté de ce calcul réside dans le fait suivant :

- si la contraction d'un vecteur est une opération linéaire, en revanche sa dilatation ne l'est pas.

En effet, la contraction correspond à la prémultiplication par la matrice non inversible que voici :

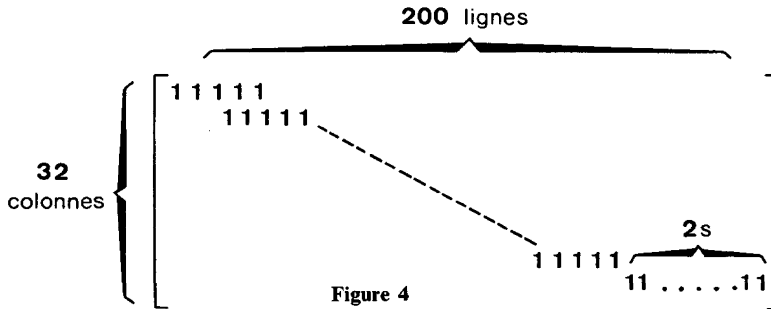


Figure 4

Il est donc indispensable de trouver un autre procédé pour l'estimation de  $A$  dans  $R^{32}$ .

Dans ce but posons :

$P_j^a$  la population (scalaire) de l'âge  $j$  à l'année  $a$ ,  
 $P_{i,j}^a$  — de tranche d'âge  $i$  à  $j$  à l'année  $a$ ,  
 $s_{i+1}$  le taux de survie entre l'âge  $i$  et  $i + 1$ .

Nous avons les relations :

$$P_{i,i+4}^a = \sum_{j=i}^{i+4} P_j^a$$

$$P_{i,i+4}^{a+1} = \sum_{j=i}^{i+4} s_j P_{j-1}^a$$

Soient :

$\alpha_{i,j}$  la proportion des personnes restant dans la tranche  $i$  à  $j$ ,  
 $\beta_{i,j}$  la proportion des personnes passant dans la tranche  $i$  à  $j$ .

On cherchera alors à mettre les relations précédentes sous la forme :

$$P_{K;K+4}^{a+1} = \beta_{K;K+4} P_{K-5;K-1}^a + \alpha_{K;K+4} P_{K;K+4}^a$$

On montre en annexe I que :

$$\alpha_{K;K+4} = \frac{\sum_{i=K+1}^{j=K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j}{1 + \sum_{i=K+1} \prod_{j=K+1} s_j}$$

$$\beta_{K;K+4} = \frac{\prod_{j=K-4}^{j=K} s_j}{1 + \sum_{i=K-4}^{K-1} \prod_{j=K-4}^{j=i} s_j}$$

De même, pour la natalité, si on appelle :

- $F_{K;K+4}^a$  la contribution de naissances apportées par les femmes d'âges  $K$  à  $K + 4$  à l'année  $a$ ,
  - $f_K$  la fécondité d'une femme d'âge  $K$ , il vient :
- il vient :

$$\begin{aligned} F_{K;K+4}^{a+1} &= f_K P_K^a + f_{K+1} P_{K+1}^a + \dots f_{K+4} P_{K+4}^a \\ &= \sum_{i=K}^{K+4} f_i P_i^a \end{aligned}$$

Or :

$$P_i^a = P_K^a \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j$$

donc :

$$F_{K;K+4}^{a+1} = \left[ f_K + \sum_{i=K+1}^{K+4} f_i \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j \right] P_K^a$$

Or :

$$P_{K;K+4}^a = P_K^a \left[ 1 + \sum_{i=K+1}^{i=K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j \right]$$

Par conséquent : si on appelle  $\varphi_{K;K+4}$  la contribution aux naissances de la classe d'âge  $K; K + 4$  :

$$\begin{aligned} F_{K;K+4}^{a+1} &= \varphi_{K;K+4} P_{K;K+4}^a \\ \varphi_{K;K+4} &= \frac{f_K + \sum_{i=K+1}^{K+4} f_i \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j}{1 + \sum_{i=K+1}^{i=K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j} \end{aligned}$$

Ainsi, donc tous les termes non nuls de  $A$  dans  $R^{32}$  sont déterminés par les  $\alpha, \beta, \varphi$ .

Dans  $R^{32}$ ,  $A$  a la forme suivante :

- les lignes horizontales correspondent à  $\tau_f \varphi$  et  $\tau_m \varphi$ ,
- la diagonale horizontale correspond aux  $\alpha$ ,
- la sous-diagonale horizontale correspond aux  $\beta$ .

$A =$

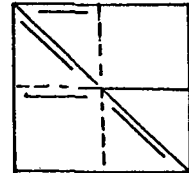


Figure 5



Si l'on veut faire évoluer une population de  $N$  années dans  $R^{32}$ , il faudra veiller à ce que les opérations de contraction et d'élévation à la puissance ne sont pas commutatives.

En refaisant les calculs avec un pas de  $N$  années, on obtient les résultats suivants :

si  $1 \leq N \leq 5$  :

$$\beta_{K;K+4}^N = \frac{\sum_{i=K+N-1}^{i=K+N-1} \prod_{j=i}^{j=i} s_j}{1 + \sum_{i=K+4}^{i=K} \prod_{j=i}^{j=K-4} s_j}$$

$$\alpha_{K;K+4}^N = \frac{\sum_{i=K+N}^{i=K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j}{1 + \sum_{i=K+1}^{i=K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j}$$

Pour la natalité, il faut considérer que les naissances forment une entrée ; donc la contribution de l'année  $n[1 \leq n \leq N]$  sera :

$$\gamma_n = f_{K+n-1} + \sum_{i=K+1}^{K+4} f_{i+n-1} \prod_{j=K+1}^{j=i+n-1} s_j$$

et par conséquent :

$$\varphi_{K;K+4}^N = \frac{\gamma_N + \sum_{n=1}^{N-1} \gamma_n s_{N-n}}{1 + \sum_{i=K+1}^{i=K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j}$$

Nous adopterons la convention suivante pour les calculs ultérieurs :

- dans  $R^{200} A^N$  sera une puissance effective de  $A$ ,
- dans  $R^{32} A^N$  sera le résultat des calculs de contraction avec un pas de  $N$  années.

## II. PEUPLEMENT DES LOGEMENTS NEUFS

Dans le recensement I.N.S.E.E. de 1968, pour la COURLY, nous avons relevé un échantillon de 126 îlots dont tous les logements avaient été construits après 1962 (10 000 logements environ).

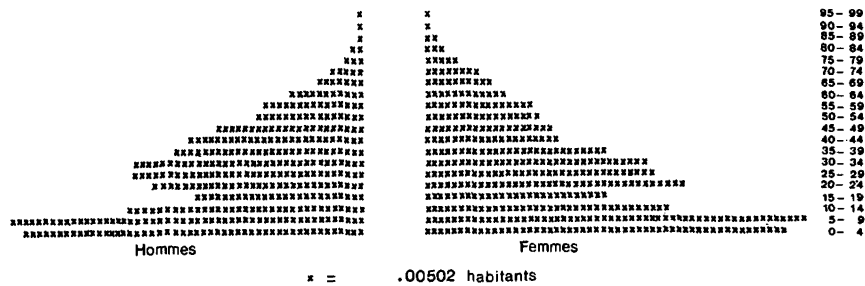
Pour déterminer le peuplement des différents types de logements, nous avons fait plusieurs hypothèses :

- le solde des migrations est nul durant ces six années (en effet, la structure de la population entrante est la même que celle de la population sortante);
- la population totale ( $N_i$ ) est une fonction linéaire du nombre de logements de chaque type ; ceci provient du fait que la population est entièrement déterminée par le type de logements qu'elle occupe.

Dès lors, on a :

$$N_i = \sum_j [H_{ij}^{\text{Prop}} I_j^{\text{Prop}} + H_{ij}^{\text{Loc}} I_j^{\text{Loc}}]$$

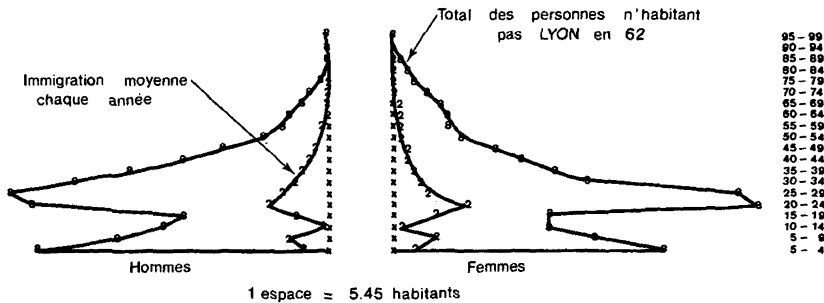
- Prop ou Loc en indice indiquent qu'il s'agit de propriétaires ou de locataires.
- $H_{ij}$  nombre moyen de personnes d'âge  $i$  habitant le logement de type  $j$ .



Pyramide moyenne des âges dans un logement neuf

Toutes catégories confondues

Figure 6



Pyramide des âges des immigrants à Lyon

Figure 7

Dès lors, les  $H_{ij}^{\text{Prop}}$  et  $H_{ij}^{\text{Loc}}$  forment une matrice  $H$  que l'on détermine par régression multiple, et on pourra écrire :

$$N_i = H_{ii}$$

avec  $I_i$  vecteur des logements construits à l'année  $i$ .

### III. MODELES D'EMMENAGEMENTS-DEMENAGEMENTS

#### 1° Calcul du solde des migrations dans les logements anciens

Chaque année, nous avons (vectoriellement) :

$$P_{i+1} = AP_i + S_i$$

Dès lors, à l'année  $n$  on aura :

$$P_n = A^n P_0 + \sum_{i=1}^n A^{n-i} S_i$$

Plusieurs composantes, qui peuvent se résumer dans le tableau ci-dessous, apparaissent dans les migrations à l'intérieur d'une zone urbaine :

	IMMIGRATION	ÉMIGRATION
Logements neufs de l'année .....	1	3
Logements anciens .....	2	4

Parmi ces quatre cas, nous constatons que :

- le cas (3) est négligeable : en effet, rares sont les gens qui emménagent et déménagent la même année dans un logement neuf;
- les cas (2) et (4) seront regroupés dans un seul cas; on y adjoindra l'émigration due aux démolitions de logements, ainsi que celle due aux désaffectations;
- le cas (1) est de loin le plus important : c'est l'immigration dans les logements neufs.

Posons  $E_i$  vecteur émigration à l'année  $i$

- $I_i$  — immigration
- $N_i$  — population dans les logements neufs
- $M_i$  — solde des migrations dans les logements anciens.

On a les relations :

$$\begin{aligned} S_i &= E_i - I_i \\ &= N_i + M_i \end{aligned}$$

D'autre part, on a :  $N_i = Hl_i$ .

$P_n$  devient alors :

$$P_n = A^n P_0 + \sum_{i=1}^n A^{n-i} (Hl_i + M_i)$$

soit :

$$P_n - A^n P_0 - \sum_{i=1}^n A^{n-i} (Hl_i) = \sum_{i=1}^n A^{n-i} M_i$$

Nous connaissons tous les éléments du second membre de cette équation et sa valeur peut être calculée; en revanche, la séquence des  $M_i$  est inconnue : nous avons ainsi une équation vectorielle à  $n$  inconnues vectorielles.

Pour résoudre l'équation (ci-dessus) de migrations, nous devons par conséquent formuler des hypothèses sur la série chronologique des  $M_i$ . Nous allons supposer que le solde ( $M_i$ ) des emménagements/déménagements dans les logements anciens est constant dans la période  $[0, n]$  : en effet, à cause de l'inertie des phénomènes étudiés, cette hypothèse est valable [5], [6]. Nous allons alors supposer :

$$M_i = M \quad \forall i$$

ce qui donne :

$$\left[ \sum_{i=1}^n A^{n-i} \right] M = P_n - A^n P_0 - \sum_{i=1}^n A^{n-i} Hl_i$$

Finalement, le calcul de  $M$  revient à la résolution d'un système linéaire, qui pose cependant quelques problèmes (voir annexe II).

## 2° Calcul de toutes les migrations

De plus, pour certains niveaux d'aggrégats, l'I.N.S.E.E. donne le total des immigrants par communes entre 1962 et 1968 (recensement au quart) ( $T_n$ ).

Alors :

$$T_n = \sum_{i=1}^n A^{n-i} I_i$$

En supposant :

$$\begin{aligned} I_i &= I \quad \text{et} \quad S_i = S \quad \forall i \\ I &= \left( \sum_{i=1}^n A^{n-i} \right)^{-1} T_n \end{aligned}$$

et aussi

$$S = I - E$$

$$E = I - S$$

$$E = \left( \sum_{i=1}^n A^{n-i} \right)^{-1} (-A^n P_0 + T_n + P_n)$$

Pour calculer  $M$ ,  $I$ ,  $E$ , il faut inverser la même matrice  $\sum_{i=1}^n A^{n-i}$ .

#### IV. APPLICATIONS A LA RECONSTITUTION DU PASSE EN MILIEU URBAIN

Nous avons appliqué le modèle décrit plus haut à la reconstitution du passé pour des communes de la COURLY et les arrondissements de Lyon connaissant les recensements 1962-1968 et les permis de construire par année accordés pour chacun d'entre eux.

Dès lors, le modèle se présente de la façon suivante :

a) Pour l'ensemble des communes de COURLY construction d'un modèle de peuplement des logements neufs en recherchant l'ensemble des îlots n'ayant eu que des logements neufs mis en service entre 1962 et 1968 (calcul par régression multiple).

b) Pour chaque commune en particulier, constitution d'un modèle de migration.

c) Et finalement, reconstitution du passé.

d) Calcul de certains paramètres conséquences :

- total des migrations annuelles,
- taux d'évolution en l'absence totale de migrations,
- taux d'évolution en l'absence de logements neufs,
- calcul du nombre de logements critiques, c'est-à-dire le nombre de logements que doit construire la commune pour que sa population totale reste la même (croissance zéro),
- l'erreur de reconstitution, c'est-à-dire l'écart entre la valeur de 1968 et la valeur déterminée par le modèle.

#### V. RESULTATS OBTENUS

Nous avons donc appliqué ce modèle de reconstitution du passé intercommunautaire à différents arrondissements de Lyon et à certaines communes de l'agglomération lyonnaise.

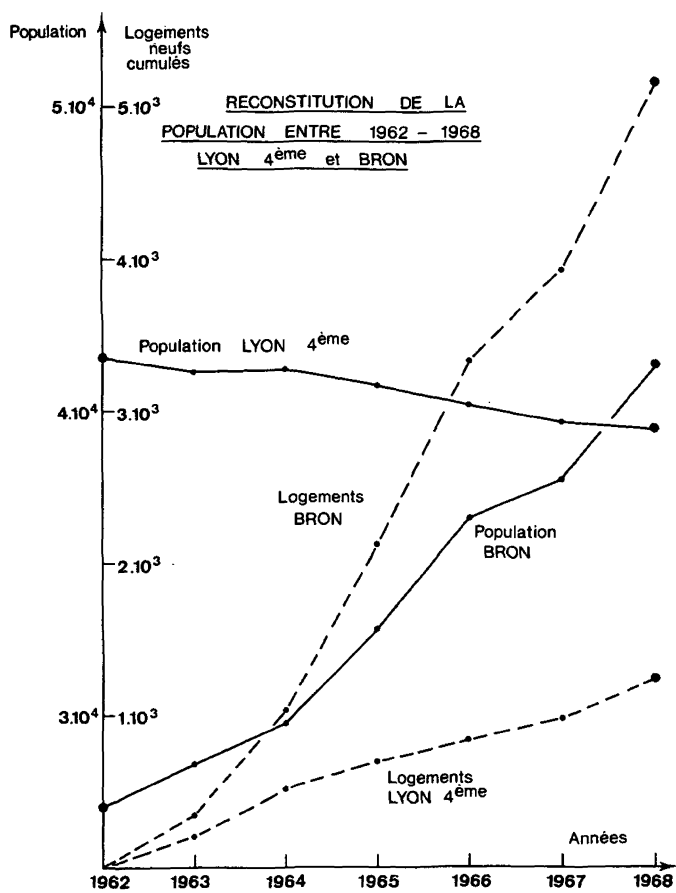


Figure 8

Au vu de ces évolutions, nous constatons une décroissance inexorable de certains arrondissements de Lyon et la croissance soutenue de diverses villes de la banlieue. Parmi les types d'évolution, les plus intéressants sont ceux des villes proches de leur saturation : selon que le nombre de logements mis en service est proche ou non de logements critiques, elles croissent ou décroissent. C'est notamment les cas de Lyon, Villeurbanne, Tassin, Oullins, St-Fons. Compte tenu de la validité du modèle, nous pouvons affirmer qu'il y a eu des stagnations ou des baisses dans leur évolution générale, notamment pour les quatre dernières communes citées et une hausse passagère à Lyon, malgré la décroissance inexorable de sa population : on peut donc certifier que si à Lyon on construit plus de 7 000 habitations, la population croît.

De manière générale, nous constatons que l'écart de population entre 1968 et celle calculée pour 1968 par le modèle est toujours inférieur à 1 ‰ pour l'ensemble de la population, mais hélas, pour certaines tranches, les erreurs allant jusqu'à 1 % pour certaines tranches de population.

Finalement, nous constatons que pour étudier la démographie en milieu urbain, la connaissance du parc immobilier est prépondérante, surtout en ce qui concerne les logements neufs. Par conséquent, pour pouvoir faire des prévisions démographiques dans ce cadre, il est nécessaire d'avoir un modèle de localisation de nouveaux logements à court terme ou tout du moins bien connaître le plan d'équipement de la zone étudiée.

Cette étude a été faite dans le cadre d'un accord entre le Département d'Informatique de l'I.N.S.A. et de l'Atelier d'Urbanisme de la Communauté Urbaine de Lyon. De plus, je remercie le CERAU-BETURE de m'avoir fourni les fichiers de permis de construire de l'agglomération Lyonnaise.

## ANNEXE I

### CALCUL DES $\alpha$ ET $\beta$

Pour la détermination des  $\alpha$  et  $\beta$ , Keyfitz [1] préconise de prendre la population stable : c'est la population (vecteur propre) correspondant à la plus grande valeur propre  $\lambda_{\text{MAX}}$ . En effet, les populations existantes ont une décomposition en âge proche d'un vecteur propre (en l'absence de catastrophes démographiques). Soit  $P^a$  le vecteur propre correspondant à  $\lambda_{\text{MAX}}$ . On peut écrire en annulant les migrations :

$$P^{a+1} = AP^a = \lambda_{\text{MAX}} P^a$$

Projetons cette relation sur la composante  $i$ . Il vient :

$$P_i^{a+1} = \lambda_{\text{MAX}} P_i^a$$

Or :  $P_{i+1}^{a+1} = s_{i+1} P_i^a$  donc  $P_{i+1}^{a+1} = \frac{s_{i+1}}{\lambda_{\text{MAX}}} P_i^{a+1}$

Nous avons vu précédemment que  $\lambda_{\text{MAX}}$  était proche de 1. Nous supposons pour la suite des calculs que  $\lambda_{\text{MAX}} = 1$ , l'erreur ainsi commise étant de l'ordre de 1 %.

On a alors :

$$P_{i+1}^a = s_{i+1} P_i^a$$

et

$$P_i^a = P_K^a \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j$$

Reprenons le calcul précédent, en tenant compte de ces relations :

$$\begin{aligned} P_{K;K+4}^a &= \sum_{j=K}^{K+4} P_j^a \\ &= \left( 1 + \sum_{i=K+1}^{K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j \right) P_K^a \end{aligned}$$

De même :

$$P_{K-5;K-1}^a = \left( 1 + \sum_{i=K-4}^{K-1} \prod_{j=K-4}^{j=i} s_j \right) P_{K-5}^a$$

Or :

$$\begin{aligned} P_{K;K+4}^a &= \sum_{j=K-1}^{K+3} S_{j+1} P_j^a = S_K P_{K-1}^a + \sum_{j=K}^{K+3} s_{j+1} P_j^a \\ &= \prod_{j=K-4}^{j=K} s_j P_{K-5}^a + \sum_{i=K+1}^{K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j P_K^a \end{aligned}$$

et, en utilisant les valeurs de  $P_K^a$  et  $P_{K-5}^a$  tirées des expressions précédentes :

$$P_{K;K+4}^a = \frac{\prod_{j=K-4}^{j=K} s_j}{1 + \sum_{i=K-4}^{K-1} \prod_{j=K-4}^{j=i} s_j} P_{K-5}^a + \frac{\sum_{i=K+1}^{K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j}{1 + \sum_{i=K+1}^{K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j} P_K^a$$

et en identifiant :

$$\begin{aligned} \beta_{K;K+4} &= \frac{\prod_{j=K-4}^{j=K} s_j}{1 + \sum_{i=K-4}^{K-1} \prod_{j=K-4}^{j=i} s_j} \\ \alpha_{K;K+4} &= \frac{\sum_{i=K+1}^{K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j}{1 + \sum_{i=K+1}^{K+4} \prod_{j=K+1}^{j=i} s_j} \end{aligned}$$



## ANNEXE II

### RESOLUTION DU SYSTEME LINEAIRE

En posant :

$$Y = P_n - A^n P_o - \sum_{i=1}^n A^{n-i} H l_i$$

$$B = \sum_{i=1}^{n-1} A^i = \sum_{i=1}^{n-1} A^{n-i}$$

on peut écrire :

$$Y = (B + I)M$$

Cependant, l'inversion de ce système pose quelques difficultés.

— Si l'on travaille dans  $R^{200}$ , on a une matrice  $200 \times 200$  à inverser, ce qui nécessite 160 K Octets de mémoire centrale. Certes, il s'agit d'une matrice creuse et l'occupation mémoire peut être réduite. De plus, il sera ensuite relativement délicat de résoudre le système linéaire car il faudra être sûr du modèle de transformation de  $R^{32}$  dans  $R^{200}$  : la résolution dans  $R^{200}$  est trop sensible à cette transformation. Pour cette raison, elle n'a pas été retenue.

— Dans  $R^{32}$ , il faut utiliser les formules de contraction pour calculer les puissances de  $A$  qui, de toutes façons, seront entachées d'erreurs.

Finalement, les méthodes de résolution directe de cette équation ne donnent rien, car le système est mal conditionné. Nous avons opté pour un système itératif de Jacobi en le modifiant par une pondération, résolution qui a donné des résultats satisfaisants. Il s'agit de résoudre

$$M = Y - BM$$

L'idée de Jacobi est d'écrire le système itératif suivant :

$$M_{i+1} = Y - BM_i$$

qui converge, pourvu que le rayon spectral de  $B$  soit inférieur à 1 [ $\rho(B) < 1$ ].

Si on appelle  $V$  un vecteur propre de  $A$  et  $\lambda$  la valeur propre correspondante, on a les relations :

$$AV = \lambda V \quad ; \quad A^i V = \lambda^i V$$

donc en sommant :

$$\sum_{i=1}^{n-1} A^i V = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i V = BV$$

donc :

$\mu = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i$  est valeur propre de  $B$ ; calculons sa valeur :

$$\mu = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i = \frac{1 - \lambda^n}{1 - \lambda} - 1 = \frac{\lambda - \lambda^n}{1 - \lambda}$$

Si on pose  $\lambda = 1 + \varepsilon$ , on a :

$$\lambda^n \simeq 1 + n\varepsilon + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2 + \dots$$

donc :

$$\mu \simeq \frac{1 + \varepsilon - 1 - n\varepsilon - \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon^2}{1 - (1 + \varepsilon)} = n - 1 + \frac{n(n-1)}{2} \varepsilon$$

puisque  $n$  est supérieur à 1,  $\rho(B) = |\mu|$  est supérieur à 1, et le processus ne converge pas.

Pour modifier ce processus, utilisons une pondération ( $\omega$ ) et écrivons :

$$M'_i = Y - BM_i$$

et

$$\begin{aligned} M_{i+1} &= (1 - \omega)M_i + \omega M'_i \\ &= (1 - \omega)M_i + \omega(Y - BM_i) \\ \text{Soit :} \quad &= [(1 - \omega)I - \omega B]M_i + \omega Y \\ &= CM_i + \omega Y \end{aligned}$$

en posant :  $C = (1 - \omega)I - \omega B$ .

Calculons  $\omega$  pour que le rayon spectral de  $C$  soit inférieur à 1 :  $\rho(C) < 1$ .

Or, nous avons :  $BV = \mu V$

d'où :  $-\omega BV = -\omega\mu V$

et :  $(1 - \omega)IV = (1 - \omega)V$

donc :  $CV = [(1 - \omega)I - \omega B]V = [1 - \omega - \omega\mu]V$

La condition  $\rho(C) < 1$  implique  $|1 - \omega - \omega\mu| < 1$ .

Deux cas sont alors possibles :

$$(a) \quad 0 < 1 - \omega - \omega\mu < 1 \quad \text{ce qui implique } 0 < \omega < \frac{1}{1 + \mu}$$

$$(b) \quad 0 < -1 + \omega + \omega\mu < 1 \quad - \quad - \quad \frac{1}{1 + \mu} < \omega < \frac{2}{1 + \mu}$$

C'est au voisinage de  $\frac{1}{1+\mu}$  que la convergence sera la plus rapide; cette borne sera sensiblement égale à :

$$\frac{1}{1+\mu} = \frac{1}{1+n-1+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon} = \frac{1}{n+\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon}$$

Dans notre cas,  $n = 6$ . Nous avons alors pris  $\omega = \frac{1}{6}$  et les résultats obtenus sont satisfaisants.

### BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. KEYFITZ, *Introduction to the Mathematics of Population*. Addison-Wesley, 1968.
- [2] L. HENRY, *Perspectives démographiques*. Éditions de l'I.N.E.D., 1964.
- [3] L. A. GOODMAN, *An elementary approach to the population projection matrix and the mathematical theory of population growth*. Demography V, 1968.
- [4] P. PORE, *Modèles informatiques de villes*. R.I.R.O. n° 15, 1968.
- [5] G. WUNSCH, *Le calcul des soldes migratoires par la méthode de la population attendue*. Population et Famille, n° 18, juin 1969.
- [6] C. DIONNE, *Estimation des soldes migratoires internes par la comparaison de deux recensements*. Recherches économiques de Louvain, n° 4, novembre 1970.
- [7] L. HENRY, *Démographie analyse et modèles*. Larousse, 1972.
- [8] C. WATTELAR, S. GILLET et DE STEFANO, *Représentations matricielles du mouvement naturel et du mouvement migratoire d'une population*. Recherches Économiques de Louvain, n° 4, novembre 1971.
- [9] A. ROGERS, *Experiments with a matrix model of population growth and distribution*. Proceedings of the 4th International Conference on Operational Research, John Wiley and Sons, New York, 1966.
- [10] F. PARFAIT, *La Planification urbaine, alibi ou espoir*. Eyrolles, Paris, 1973.
- [11] A. G. WILSON, *Urban and Regional Models in Geography and Planning*. John Wiley and sons, New York, 1974.
- [12] R. LAURINI, *Analyse de systèmes urbains, modèle de projections démographiques*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Lyon, 1973.