REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

B. LEMAIRE

Dénombrements des cycles hamiltoniens de K_n et $K_{n,n}$ empruntant ou évitant des arêtes données

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 9, nº V1 (1975), p. 101-111

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1975__9_1_101_0>

R.A.I.R.O.
(9e année, janvier 1975, V-1, p. 101 à 111)

DENOMBREMENTS DES CYCLES HAMILTONIENS DE K_n ET $K_{n,n}$ EMPRUNTANT OU EVITANT DES ARETES DONNEES (*)

par B. LEMAIRE (1)

Résumé. — *On dénombre dans K_n (le graphe complet, sans boucle, de n sommets) — pris non orienté — les cycles hamiltoniens (C.H.) empruntant h arêtes données non adjacentes; le même dénombrement est effectué pour le graphe complet biparti $K_{n,n}$. Ces résultats sont étendus au cas où certaines des arêtes données sont adjacentes. Il est alors possible de dénombrer les C.H. de K_n empruntant h arêtes données, et évitant une ou plusieurs arêtes. Les principaux résultats sont résumés dans un tableau. Ils peuvent être utilisés avec succès dans le problème du voyageur de commerce (introduction et discussion de la notion d'affinité)* [7].

I. INTRODUCTION

Soit le graphe K_n (complet, sans boucle ni arêtes multiples, de n sommets). Il comporte $\binom{n}{2} = \frac{1}{2} n(n-1)$ arêtes. Le graphe complet biparti $K_{m,n}$ admet des cycles hamiltoniens seulement si $m = n$; il comporte n^2 arêtes.

Les mots : arc, chemin et circuit sont réservés aux graphes orientés; pour les graphes non orientés on utilisera respectivement les mots : arête, chaîne et cycle [1]. La longueur d'une chaîne est le nombre des arêtes qui la composent.

II. CYCLES HAMILTONIENS DE K_n

1) Le nombre total N de cycles hamiltoniens (C.H.) de K_n est :

$$\boxed{N = \tfrac{1}{2}(n-1)!}$$

(1) Maître-Assistant au C.N.A.M.

(*) Reçu le 13 mars 1974.

Démonstration : Fixons 1, le premier sommet de K_n; toute permutation des $n - 1$ sommets : 2, 3, ..., n fournit un C.H., obtenu deux fois (dans le sens trigonométrique et en sens inverse). D'où $(n - 1)! \times \frac{1}{2}$ C.H.

(En particulier le triangle K_3 comporte un seul C.H.)

— Le nombre $N(ij)$ de C.H. passant par une arête donnée est :

$$\boxed{N(ij) = (n - 2)!}$$

Démonstration : Fixons d'abord i, puis j; toute permutation des $n - 2$ autres sommets fournit un C.H. obtenu une seule fois (vu le choix de j après i).

— Le nombre $N(\overline{ij})$ de C.H. évitant une arête donnée ij est :

$$\boxed{N(\overline{ij}) = \tfrac{1}{2}(n - 2)!\,(n - 3)}$$

Démonstration : Tout C.H. de K_n évite ou emprunte l'arête ij; donc : $N(ij) + N(\overline{ij}) = N$; d'où le résultat.

2) Dénombrement des C.H. de K_n empruntant h arêtes non adjacentes.

Puisque le nombre maximal d'arêtes non adjacentes dans K_{2p} ou K_{2p+1} est p, h est tel que : $[n/2] \geqslant h \geqslant 0$.

(On désigne par $[x]$ la partie entière de x).

Théorème 1 :

Le nombre $N(H_0)$ de C.H. empruntant h arêtes non adjacentes est :

$$\boxed{N(H_0) = (n - h - 1)!\, 2^{h-1}} \qquad \text{pourvu que} \qquad [n/2] \geqslant h \geqslant 0.$$

H_0 désigne l'ensemble des arêtes données.

Démonstration : D'abord, pour $h = 0$, la formule donne $N = \frac{1}{2}(n - 1)!$ et, pour $h = 1$, $N(ij) = (n - 2)!$, résultats établis ci-dessus; dans la suite, nous supposerons que $h \geqslant 2$. Soit $H_0 = \{ i_1 j_1, i_2 j_2, ..., i_h j_h \}$ l'ensemble des h arêtes données. On fixe d'abord i_1, puis j_1 ; on « contracte » les deux sommets de toute arête de $H_0 - \{ i_1 j_1 \}$ en un sommet « fictif » :

$$s_2 = i_2 - j_2, \qquad s_3 = i_3 - j_3, ..., s_h = i_h - j_h.$$

Soit S_f l'ensemble de ces $h - 1$ sommets fictifs.

D'autre part, il y a $(n - 2h)$ sommets « libres » dont le label n'apparaît pas dans H_0. Soit S_l l'ensemble de ces sommets « libres ».

Considérons le graphe complet dont les sommets sont i_1, j_1 et les éléments de S_l et de S_f. Dans ce nouveau graphe, une fois i_1 puis j_1 fixés toute permutation des éléments de $S_f \cup S_l$ donne un C.H. obtenu une fois seulement, vu le choix initial de i_1. Comme S_f et S_l sont disjoints, leur réunion comporte $(h - 1) + (n - 2h) = (n - h - 1)$ éléments. Dans ce graphe réduit il existe donc $(n - h - 1)!$ C.H. passant par l'arête ij. Revenons à K_n : de chaque C.H. du graphe réduit, on peut déduire 2^{h-1} C.H. de K_n : tout sommet fictif s_k $(h \geqslant k \geqslant 2)$ doit être remplacé par une arête qui sera soit $i_k j_k$, soit $j_k i_k$ (ce qui donne un C.H. différent; voir fig. 1).

Ainsi nous avons $h - 1$ choix successifs et indépendants entre deux possibilités.

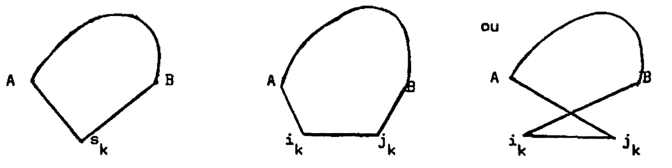

Figure 1

On obtient de cette façon tous les C.H. de K_n passant par les arêtes données (non adjacentes) : $(n - h - 1)!\, 2^{h-1}$.

Exemple : Par deux arêtes non adjacentes ij et uv de K_n passent $N(ij, uv) = 2(n - 3)!$ C.H.; par trois arêtes non adjacentes ij, uv et rs passent $N(ij, uv, rs) = 4(n - 4)!$ C.H.

3) Dénombrement des C.H. de K_n empruntant h arêtes données (adjacentes ou non).

Puisqu'il n'y a ni fourche ni cycle de longueur inférieure à n sur un C.H., si les arêtes données forment une fourche ou un tel cycle, le nombre de C.H. empruntant ces arêtes est nul. Nous abandonnons ce cas dans la suite.

Maintenant les arêtes données peuvent uniquement former des chaînes. Soit b le nombre de « sommets intermédiaires » sur les chaînes (b est le nombre de sommets adjacents à deux des arêtes données).

Théorème 2 :

Le nombre de C.H. passant par h arêtes données, formant uniquement des chaînes avec b « sommets intermédiaires » est :

$$\boxed{N(H_b) = (n - h - 1)!\, 2^{h-b-1}} \quad \text{avec} \quad h \geqslant 0 \quad \text{et} \quad [(n - b)/2] \geqslant h - b$$

H_b désigne l'ensemble des h arêtes données.

Démonstration : Si $h = 0$, nécessairement $b = 0$; la formule donne : $\frac{1}{2}(n - 1)!$ Si les arêtes ne sont pas adjacentes : $b = 0$; la formule redonne le théorème 1, avec la condition $[n/2] \geqslant h \geqslant 0$.

Dans le cas général, les arêtes de H_b forment des chaînes (et $b > 0$).

Remplaçons chaque chaîne par une arête joignant les deux extrémités de cette chaîne; après ces transformations, les b « sommets intermédiaires » et b arêtes ont disparu (en tenant compte de celles rajoutées).

Nous sommes maintenant dans les conditions du théorème 1 dans un graphe complet (réduit) de $n - b$ sommets avec $h - b$ arêtes non adjacentes données. Puisque le nombre maximal d'arêtes non adjacentes dans K_{n-b} est $[(n - b)/2]$, nous devons avoir $[(n - b)/2] \geqslant h - b$.

Le nombre de C.H. de K_n empruntant les arêtes de H_b égale le nombre de C.H. de K_{n-b} passant par $(h - b)$ arêtes non adjacentes.

$$N(H_b) = ((n - b) - (h - b) - 1)!\,.\,2^{(h-b)-1} = (n - h - 1)!\,2^{(h-b-1)}$$

EXEMPLE : $n = 8 \quad h = 5 \quad b = 3 \qquad n' = 5 \quad h' = 2$

Figure 2

Dans K_8, les arêtes données sont épaisses sur la figure 2; les « sommets intermédiaires » sont B, E et F ($b = 3$); il y a $(8 - 5 - 1)!\,2^{5-3-1} = 4$ C.H. possibles.

— Par deux arêtes adjacentes ij et jk passent : $N(ij, jk) = (n - 3)!$ C.H. (deux fois moins que lorsque les arêtes ne sont *pas* adjacentes).

— Par trois arêtes, dont deux sont adjacentes (ij, jk et uv) passent $N(ij, jk, uv) = 2(n - 4)!$ C.H.; par trois arêtes formant une chaîne (ij, jk, kl) passent $N(ij, jk, kl) = (n - 4)!$ C.H.

4) Dénombrement des C.H. de K_n empruntant par h arêtes données, et évitant une autre arête fixée ij

Nous noterons $N(H_b, \overline{ij})$ leur nombre.

— D'abord si certaines des h arêtes forment une fourche ou un cycle, il n'existe aucun C.H. Nous abandonnons ce cas dans la suite. Trois principaux cas se présentent maintenant :

a) *L'arête interdite ij est adjacente à au moins deux arêtes de H_b.*

Trois possibilités : soit ij forme une fourche, ou un cycle avec les arêtes de H_b, ou encore relie deux chaînes de H_b (fig. 3) :

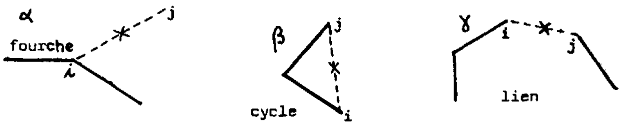

Figure 3

Sous-cas α et β : comme il n'y a ni fourche ni cycle (de longueur inférieure à n) sur un C.H., interdire l'arête ij dans les sous-cas α et β ne change pas le nombre de C.H. passant par les h arêtes données :

$$\boxed{N(H_b, ij) = (n - h - 1)!\, 2^{h-b-1}}$$

Pour être complet, ajoutons que si les arêtes de H_b forment une chaîne de longueur $n - 1$, dont i et j sont les deux extrémités, il est évident que l'interdiction de ij rend la construction d'un C.H. impossible.

Sous-cas γ : ij relie deux chaînes de H_b.

Puisque tout C.H. emprunte ou évite l'arête ij :

$$N(H_b, \overline{ij}) + N(H_b, ij) = N(H_b) = (n - h - 1)!\, 2^{h-b-1}$$

$H_b \cup \{ ij \}$ est un ensemble de $h + 1$ arêtes avec $b + 2$ « sommets intermédiaires » (les b précédents, plus i et j). D'où (Th. 2) :

$$N(H_b, \overline{ij}) = (n - (h + 1) - 1)!\, 2^{h+1-(b+2)-1} = (n - h - 2)!\, 2^{h-b-2}$$

par soustraction $N(H_b, \overline{ij}) = N(H_b) - N(H_b, ij)$. D'où :

$$\boxed{N(H_b, \overline{ij}) = 2^{h-b-2}(n - h - 2)!\,(2n - 2h - 3)}$$

b) *L'arête interdite est adjacente à une seule arête de H_b.*

Nous écrirons de nouveau : $N(H_b, \overline{ij}) + N(H_b, ij) = N(H_b)$.

$H_b \cup \{ ij \}$ est un ensemble de $h + 1$ arêtes avec $b + 1$ « sommets intermédiaires » : $N(H_b, ij) = (n - h - 2)!\, 2^{h-b-1}$; d'où :

$$\boxed{N(H_b, \overline{ij}) = 2^{h-b-1}(n - h - 2)!\,(n - h - 2)}$$

c) *L'arête interdite n'est adjacente à aucune arête de H_b :*

De nouveau : $N(H_b, \overline{ij}) + N(H_b, ij) = N(H_b)$.

$H_b \cup \{ij\}$ est un ensemble de $h + 1$ arêtes avec b « sommets intermédiaires » $N(H_b, ij) = (n - h - 2)!\, 2^{h-b}$; d'où :

$$\boxed{N(H_b, \overline{ij}) = 2^{h-b-1}(n - h - 2)!\,(n - h - 3)}$$

REMARQUE : Si $h = 0$, la formule donne : $\frac{1}{2}(n - 2)!\,(n - 3)$ (résultat de II-1).

Théorème 3 :

Le nombre $N(H_b, \overline{ij})$ de C.H. empruntant h arêtes données qui forment uniquement des chaînes (avec b « sommets intermédiaires »), et évitant une arête fixée ij est :

a) $2^{h-b-1}(n - h - 1)!$ $(h \geqslant 2)$ si ij est adjacente à deux arêtes appartenant à la même chaîne de H_b.

$2^{h-b-2}(n - h - 2)!\,(2n - 2h - 3)$ $(h \geqslant 2)$ si ij relie deux chaînes de H_b.

b) $2^{h-b-1}(n - h - 2)!\,(n - h - 2)$ $(h \geqslant 1)$ si ij est adjacente à une seule arête de H_b.

c) $\begin{cases} 2^{h-b-1}(n - h - 2)!\,(n - h - 3) \\ [(n - b)/2] \geqslant h - b \end{cases}$ $(h \geqslant 0)$ si ij n'est adjacente à aucune arête de H_b.

H_b est un ensemble de h arêtes qui forment uniquement des chaînes.

5) **Dénombrement de C.H. empruntant h arêtes données et évitant deux (ou plus) arêtes.**

De nombreux cas et sous-cas se présentent. La méthode est la même que précédemment.

Par exemple : Trouver le nombre de C.H. empruntant les arêtes de H_b, et évitant deux arêtes non adjacentes à H_b, mais adjacentes entre elles :

Soit $N(H_b, \overline{ij}, \overline{jk})$ ce nombre. Nous avons :

$$N(H_b, \overline{ij}, \overline{jk}) + N(H_b, \overline{ij}, jk) = N(H_b, \overline{ij}).$$

$H_b \cup \{jk\}$ est un ensemble de $h + 1$ arêtes avec b « sommets intermédiaires ». ij est adjacent à jk; le théorème 3 *b* donne :

$$\begin{aligned} N(H_b, \overline{ij}, jk) &= 2^{h+1-b-1}(n - h - 1 - 2)!\,(n - h - 1 - 2) \\ &= 2^{h-b}(n - h - 3)!\,(n - h - 3) \end{aligned}$$

Le théorème 3 *c* donne : $N(H_b, \overline{ij}) = 2^{h-b-1}(n - h - 2)!\,(n - h - 3)$ et par soustraction : $N(H_b, \overline{ij}, \overline{jk}) = 2^{h-b-1}(n - h - 3)!\,(n - h - 3)(n - h - 4)$.

Tableau récapitulatif

$n \geqslant 3$	Tous les C.H. de K_n : $N = (n-1)!/2$		
	Condition sur une arête		
$n \geqslant 3$	$N(ij) = (n-2)!$		$N(\overline{ij}) = \frac{1}{2}(n-2)!(n-3)$
		Conditions sur deux arêtes	
$n \geqslant 3$	$N(ij,jk) = (n-3)!$	$N(\overline{ij},jk) = (n-3)!(n-3)$	$N(\overline{ij},\overline{jk}) = \frac{1}{2}(n-3)!(n-3)(n-4)$
$n \geqslant 4$	$N(ij,uv) = 2(n-3)!$	$N(\overline{ij},uv) = (n-3)!(n-4)$	$N(\overline{ij},\overline{uv}) = \frac{1}{2}(n-3)!(n^2-7n+14)$
	Conditions sur trois arêtes		
	3 arêtes obligatoires :		3 arêtes interdites :
$n \geqslant 4$	$N(ij,jk,jl) = 0$	fourche	$N(\overline{ij},\overline{jk},\overline{jl}) = \frac{1}{2}(n-3)!(n-4)(n-5)$
	$N(ij,jk,ki) = 0$	cycle	$N(\overline{ij},\overline{jk},\overline{ki}) = \frac{1}{2}(n-3)!(n-4)(n-5)$
	$N(ij,jk,kl) = (n-4)!$	chaîne	$N(\overline{ij},\overline{jk},\overline{kl}) = \frac{1}{2}(n-4)!(n-4)(n^2-8n+17)$
$n \geqslant 5$	$N(ij,jk,uv) = 2(n-4)!$		$N(\overline{ij},\overline{jk},\overline{uv}) = \frac{1}{2}(n-4)!(n-4)(n^2-8n+19)$
$n \geqslant 6$	$N(ij,rs,uv) = 4(n-4)!$		$N(\overline{ij},\overline{rs},\overline{uv}) = \frac{1}{2}(n-4)!(n^3-12n^2+53n-86)$
	2 arêtes obligatoires une interdite.		2 arêtes interdites, une obligatoire.
$n \geqslant 4$	$N(\overline{ij},jk,jl) = (n-3)!$	fourche	$N(ij,\overline{jk},\overline{jl}) = (n-3)!(n-4)$
	$N(ij,jk,\overline{ki}) = (n-3)!$	cycle	$N(\overline{ij},\overline{jk},ki) = (n-3)!(n-4)$
	$N(ij,\overline{jk},kl) = (n-4)!(2n-7)$	lien	$N(\overline{ij},jk,\overline{kl}) = (n-4)!(n^2-7n+13)$
	$N(ij,jk,\overline{kl}) = (n-4)!(n-4)$	chaîne	$N(\overline{ij},\overline{jk},kl) = (n-4)!(n-4)^2$
$n \geqslant 5$	$N(ij,\overline{jk},uv) = 2(n-4)!(n-4)$		$N(\overline{ij},jk,\overline{uv}) = (n-4)!(n^2-8n+17)$
	$N(ij,jk,\overline{uv}) = (n-4)!(n-5)$		$N(\overline{ij},\overline{jk},uv) = (n-4)!(n-4)(n-5)$
$n \geqslant 6$	$N(ij,rs,\overline{uv}) = 2(n-4)!(n-5)$		$N(\overline{ij},\overline{rs},uv) = (n-4)!(n^2-9n+22)$

— En particulier $N(uv, \overline{ij}, \overline{jk}) = (n-4)!\,(n-4)(n-5)$.

On a effectué les dénombrements de C.H. pour lesquels des conditions portent sur une, deux ou trois arêtes. Les résultats sont présentés dans le tableau récapitulatif I.

Les lignes épaisses représentent les arêtes obligatoires, les lignes en pointillé avec une croix représentent les arêtes interdites. Les adjacences apparaissent tant sur les dessins que dans les notations utilisées.

Ce tableau s'est révélé très pratique dans les applications au problème du voyageur de commerce [5, 6].

III. CYCLES HAMILTONIENS DE $K_{n,n}$

1) Soit $K_{n,n} = (X, Y, E)$ le graphe complet biparti; X et Y sont les deux ensembles de sommets : $|X| = |Y| = n$; $|E| = n^2$.

— Le nombre total M de C.H. de $K_{n,n}$ est : $\boxed{M = \frac{1}{2}(n-1)!\,n!}$

Démonstration : Nous fixons x_1 appartenant à X; toute permutation des éléments de Y alternée avec les éléments de $X - \{x_1\}$ donnent un C.H., obtenu deux fois (dans le sens trigonométrique et en sens inverse), d'où : $n!\,(n-1)! \cdot \frac{1}{2}$ C.H.

— Le nombre $M(ij)$ de C.H. empruntant une arête donnée ij est

$$\boxed{M(ij) = (n-1)!^2.}$$

Démonstration : Nous fixons $x_i \in X$ et $y_i \in Y$. Toute permutation des éléments de $X - \{x_i\}$ alternée avec les éléments de $Y - \{y_j\}$ donne un C.H. obtenu une fois (vu le choix initial de y_j après x_i, équivalent à l'orientation des cycles).

— Le nombre $M(\overline{ij})$ de C.H. évitant une arête donnée ij est :

$$\boxed{M(\overline{ij}) = \frac{1}{2}(n-1)!^2(n-2)}$$

Démonstration :

$$M(ij) + M(\overline{ij}) = M; \quad \text{d'où} \quad M(\overline{ij}) = \frac{1}{2}(n-1)!\,n! - (n-1)!^2$$

2) **Dénombrement des C.H. de $K_{n,n}$ empruntant h arêtes non adjacentes.**

H_0 est l'ensemble de ces h arêtes.

Comme le nombre maximal d'arêtes non adjacentes dans $K_{n,n}$ est n, h doit être inférieur ou égal à n.

Théorème 4 :

$$\boxed{M(H_0) = (n-h)!^2 \cdot \frac{(2n-h-1)!}{(2n-2h)!} \qquad n \geqslant h \geqslant 0}$$

Démonstration : Pour $h = 0$ $M = n!^2 \cdot \frac{(2n-1)!}{(2n)!} = \frac{n!^2}{2n} = \frac{1}{2}\, n!\,(n-1)!$;
Pour $h = 1$ $M(ij) = (n-1)!^2$: résultats prouvés ci-dessus.

Dans la suite, nous supposerons que $h \geqslant 2$; nous raisonnons par induction mathématique; nous supposons que par $(h-1)$ arêtes non adjacentes de $K_{n,n}$ (pour tout n), passent $(n-h+1)!^2 \cdot \frac{(2n-h)!}{(2n-2h+2)!}$ C.H.

Nous imposons maintenant une nouvelle arête obligatoire, qui peut être notée $x_n y_n$ sans changer le problème.

Considérons $K_{n-1,n-1}$; par $h-1$ arêtes non adjacentes de $K_{n-1,n-1}$ passent $(n-h)!^2 \cdot \frac{(2n-h-2)!}{(2n-2h)!}$ C.H. différents. Ajoutons $x_n y_n$ la $h^{\text{ème}}$ arête obligatoire; nous pouvons remplacer toute arête non obligatoire de ces C.H. (telle que uv sur la figure 4) par la chaîne $uy_n x_n v$; nous obtenons ainsi un C.H. de $K_{n,n}$. Comme la longueur d'un C.H. de $K_{n-1,n-1}$ est $2n-2$, tout C.H.

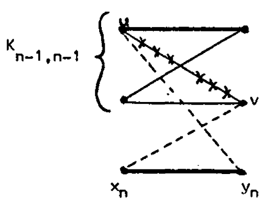

Figure 4

de $K_{n-1,n-1}$ avec $h-1$ arêtes obligatoires, comporte $2n-h-1$ arêtes non obligatoires. Ainsi on déduit $(2n-h-1)$ C.H. de K_n (passant par h arêtes non adjacentes), à partir de tout C.H. de $K_{n-1,n-1}$ (passant par $h-1$ arêtes données); on obtient par cette construction tous les C.H. de $K_{n,n}$ passant par h arêtes non adjacentes :

$$(n-h)!^2 \cdot \frac{(2n-h-2)!}{(2n-2h)!} \cdot (2n-h-1) = (n-h)!^2 \cdot \frac{(2n-h-1)!}{(2n-2h)!} \qquad \text{C.H.}$$

En particulier : Si $h = n$, on peut prouver directement qu'il existe $(n-1)!$ C.H. différents passant par n arêtes données non adjacentes.

Soit $x_1y_1, x_2y_2, \ldots, x_ny_n$ les arêtes obligatoires ; fixons x_1 et y_1 et contractons les $n - 1$ arêtes $x_2y_2, \ldots, x_ny_n$ en $n - 1$ sommets fictifs $s_2, \ldots, s_n$.

Les permutations de ces $n - 1$ sommets fictifs donnent tous les C.H. ; le graphe étant biparti il y a une seule possibilité quand s_k est remplacé par l'arête x_ky_k (au lieu de deux au II-2).

3) **Dénombrement des C.H. de $K_{n,n}$ passant par h arêtes données (adjacentes ou pas).**

Nous abandonnons le cas où les arêtes données forment entre elles des fourches ou des cycles. Alors, les arêtes peuvent uniquement former des chaînes.

— Toute chaîne de longueur impaire peut être remplacée par une arête reliant les deux extrémités x et y de la chaîne (fig. 5). Si toutes les chaînes sont de longueur impaire nous remplaçons chacune par une arête et appliquons le théorème 4 à un graphe réduit. Par exemple, si les arêtes données forment une chaîne unique de longueur $2p + 1$, nous remplaçons n par $n - p$ et h par $h - 2p$ dans le théorème 4.

— Pour une chaîne unique de longueur paire $2q$, nous éliminons de X et Y les sommets adjacents à deux arêtes données (tels que v sur la figure 5 *bis*) ; $q - 1$ sommets de X et q sommets de Y sont éliminés si les deux extrémités de la chaîne appartiennent à X (q de X et $q - 1$ de Y si les deux extrémités appartiennent à Y). Soient X' et Y' les ensembles de sommets après ces éliminations : $X' = n - q + 1$ et $Y' = n - q$; le nombre de C,H. passant par cette chaîne est égal au nombre de chaînes hamiltoniennes entre x et x' (respectivement y et y') dans le graphe complet biparti ayant X' et Y' comme sommets : plaçons x en première position et x' en dernière ; toute permutation des éléments de $X' - \{ x, x' \}$ alternée avec Y' donne un C.H. : $(n - q - 1)!\,(n - q)!$ C.H.

Il ne semble pas possible de donner une formule générale (pour plusieurs chaînes de longueurs paires et impaires) comme au théorème 2.

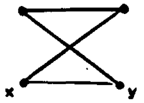

Figure 5

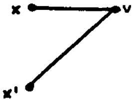

Figure 5 *bis*

REFERENCES

[1] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.

[2] P. Bertier, *Procédures pour élaborer des tournées de distribution*, Métra, série spéciale jaune n° 8, 1966, Paris.

[3] E. Biondi, L. Divieti et G. Guardabassi, *Counting paths, circuits, chains and cycles in graphs : a unified approach*, Canad. J. Math, 22 (1970), 22-35.

[4] G. GUARDABASSI, *Counting patterns in graphs*, J. combinatorial theory (B), 13, 18-25 (1972).

[5] B. LEMAIRE, *Problèmes de tournées avec contraintes multiples*, Thèse de Docteur-Ingénieur, Université Paris VI, 1971.

[6] B. LEMAIRE, *Généralisation, critique et usage de la notion d'affinité*, note interne, CNAM, mars 1973.

[7] K. VO-KHAC, *La régularisation dans les problèmes combinatoires*. Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle (R.I.R.O.), 3e année (1969), n° V-1, 91-104.

[8] H. WILF, *A mechanical counting method and combinatorial applications*, J. combinatorial theory 4, 246-258 (1968).