REVUE FRANÇAISE D'AUTOMATIQUE, INFORMATIQUE, RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. RECHERCHE OPÉRATIONNELLE

MICHEL RICHONNIER

Plan d'expérience optimum en économie et en marketing

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 8, nº V1 (1974), p. 19-26

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1974__8_1_19_0>

R.A.I.R.O.
(8e année, V-1, 1974, p. 19-26)

PLAN D'EXPERIENCE OPTIMUM EN ECONOMIE ET EN MARKETING

par Michel RICHONNIER (1)

Résumé. — *Actuellement, les USA assistent à un véritable bourgeonnement d'expériences visant à étudier les réponses d'unités économiques soumises à des stimuli contrôlés. Leur préparation a inévitablement posé des problèmes de planification d'expérience.*

Cet article fait le point sur les développements récents apportés à la méthodologie des plans d'expérience optima.

La théorie des « plans d'expérience » a pour objet l'étude de la *sélection* de données dans des situations d'expériences contrôlées.

En marketing l'intérêt d'expériences sur le terrain ou en laboratoire est particulièrement justifié lors d'opérations de lancement ou de reconditionnement de biens et services de grande consommation (voir par exemple, Buzzel, Cox et Brown [1969]). En économie il y a actuellement un véritable bourgeonnement d'expériences visant à étudier les réactions de ménages américains soumis à des revenus de transferts expérimentaux (voir le numéro de mai 1971 de l'*American Economic Review*); d'autres expériences visant à la détermination de taux de taxe et péages appropriés pour combattre la pollution ou les embouteillages dans les centres urbains congestionnés sont actuellement à l'étude.

Le coût non négligeable de telles expériences rend nécessaire une réflexion et une planification sérieuses au niveau pré-expérimental. En particulier, quels sont les niveaux de stimuli à retenir et comment les répartir entre les unités soumises à l'expérience (supermarchés ou ménages) ?

La théorie des plans d'expérience a pour but de répondre à ces questions. Les plans les plus connus et les plus utilisés sont, outre les plans faisant appel à l'intuition, les plans reposant sur les techniques d'analyse de variance comme les plans en carré latin (PCL), ou en blocs incomplets équilibrés (PBIE), (voir par exemple Dugué et Girault [1969]). Par contre, pour des raisons liées à des

(1) Ingénieur Euréquip. L'auteur a bénéficié de commentaires utiles de John Conlisk et Richard Schmalensee (Université de Californie à San Diego) ainsi que d'un soutien financier de la fondation Woodrow Wilson.

difficultés de programmation mathématique, les travaux de Elfving [1952] et Kiefer [1959] sur les plans d'expérience optima, sont restés longtemps ignorés. Il a fallu attendre les travaux complémentaires de Conlisk et Watts [1969] pour voir cette technique utilisée dans la planification d'expérience en économie.

Le but de cet article est de faire une présentation succincte de la théorie des plans d'expérience optima et de ses développements récents.

I. DEFINITIONS GENERALES ET NOTATIONS

Considérons la partie non aléatoire d'une équation de comportement $E(w) = f(z_1, ..., z_k)$ où $E(.)$ représente l'opérateur espérance mathématique et où certaines des variables explicatives $z_1, ..., z_k$ sont sous le contrôle de l'expérimentateur. Ces variables sont appelées *facteurs ou variables contrôlables* (« design variables »), la variable expliquée w est appelée *variable de réponse* et la fonction f la *fonction de réponse*.

Considérons une expérience sur un échantillon de N unités expérimentales afin d'estimer f dans le cadre des modèles de régression linéaire :

$$y_i = X_i b + e_i \qquad i = 1, ..., N \tag{1}$$

où le *régressende* y_i est généralement la réponse de la $i^{\text{ème}}$ unité, ($y_i = w_i$, pour une fonction de réponse avec un terme d'erreur additif), ou bien son logarithme ($y_i = \log w_i$, pour les fonctions de réponse avec un terme d'erreur multiplicatif), X_i est le $(1 \times K)$ vecteur ligne de *regresseurs* (transformés des variables explicatives $z_1, ..., z_k$), b est le $(K \times 1)$ vecteur de paramètres à estimer, et e_i est un terme d'erreur aléatoire et non observable. En notation matricielle (1) s'écrit :

$$\underset{(N \times 1)}{y} = \underset{(N \times K)}{X} \; \underset{(K \times 1)}{b} + \underset{(N \times 1)}{e} \tag{2}$$

où les dimensions des matrices sont indiquées entre parenthèses. En ajoutant les 4 hypothèses, (*i*) X est de rang égal à K, (*ii*) X est non aléatoire, (*iii*) $E(e) = 0$, et (*iv*) $V(e) = \sigma^2 I$ (où $V(.)$ représente la matrice des variances-covariances), nous définissons le *modèle classique de régression linéaire*, dans lequel le meilleur estimateur linéaire et non biaisé de b est $\hat{b} = (X'X)^{-1} (X'y)$ avec, pour matrices des variances-covariances :

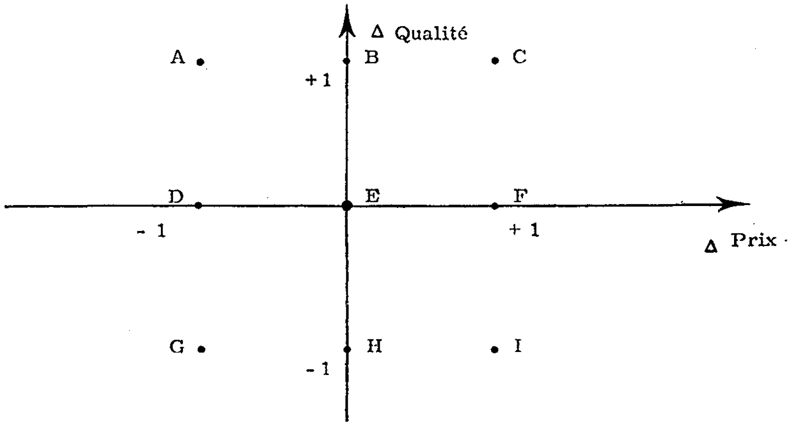
$$V(\hat{b}) = \sigma^2 (X'X)^{-1} = \sigma^2 (\sum_i X_i' X_i)^{-1}$$

Le problème de planification d'expérience est de déterminer les niveaux ou *traitements* des facteurs contrôlables à allouer à chacune des N observations. En d'autres mots il nous faut choisir N *points contrôlés* (« design points ») dans la *région des possibles* (Z_p) de l'espace des variables contrôlées. Étant donnée une forme fonctionnelle du modèle de régression linéaire précédent, ceci revient à associer à chaque « point contrôlé » retenu un vecteur ligne de regresseurs X_i.

Comme exemple illustratif, considérons le cas United Fruit Company de Buzzel, Cox et Brown [1969]. Cette expérience met en jeu $N = 14$ supermarchés, 2 variables contrôlables (changements de prix et de qualité de bananes) avec trois traitements chacunes ($-1, 0, +1$) et une fonction de réponse linéaire avec terme d'interaction (soit $K = 4$ régresseurs).

$$y_i = b_0 + b_1 \Delta P_i + b_2 \Delta Q_i + b_3 \Delta P_i \, \Delta Q_i + e_i \qquad i = 1, \ldots, 14 \tag{4}$$

où la variable de réponse y_i représente la vente hebdomadaire moyenne de bananes par client du $i^{\text{ème}}$ supermarché. La région des possibles (Z_p) est formée des neufs points suivants :



Si par exemple la $i^{\text{ème}}$ ligne de régresseurs X_i est associée avec le point contrôlable I, nous avons alors $X_i = (1, +1, -1, -1)$.

S'il s'agit de G, nous avons alors $X_i = (1, -1, -1, +1)$.

II. LA METHODE DES PLANS D'EXPERIENCE OPTIMA

Cette méthode peut être décomposée en trois étapes.

a) Supposer que (*i*) le modèle classique de régression linéaire est valide; (*ii*) la forme fonctionnelle de la régression est connue au stade préexpérimental; (*iii*) les variables explicatives sont toutes sous contrôle expérimental; (*iv*) les observations peuvent être répétées en tous points contrôlés de la région possible (Z_p); (*v*) les observations ne doivent être prises qu'en un nombre donné m de points contrôlés dans (Z_p). Re-définissant légèrement les X_i du paragraphe précédent, représentons par $X_1, ..., X_m$ les $(1 \times K)$ vecteurs lignes de régresseurs associés aux m points évoqués dans (v). Soit n_i le nombre d'observations prises au $i^{\text{ème}}$ point contrôlé; ainsi la matrice des régresseurs X a n_i ligne X_i.

b) Définir une fonction objectif à partir de la matrice des variances-covariances $V(\hat{b}) = \sigma^2(X'X)^{-1} = \sigma^2(\sum_i n_i X_i' X_i)^{-1} = \sigma^2 Q^{-1}$, avec $Q = (X'X)$. Conventionnellement cette fonction objective [(1)] est le déterminant det (Q^{-1}) [variance généralisée], la trace tr (Q^{-1}) [variance moyenne, au facteur $1/K$ près], la valeur propre maximum Mev (Q^{-1}) [variance spectrale], ou le maximum des éléments diagonaux Mav (Q^{-1}) [variance maximum]. Des interprétations pour chacun de ces critères peuvent être trouvées dans Elfving [1952], Kiefer [1959], Conlisk and Watts [1969] et Richonnier [1972] qui donne une interprétation simple et unifiée. Puisque $Q = \sum_i n_i X_i' X_i$, la fonction objectif choisie est une fonction du *vecteur d'allocation* $n = (n_1, ..., n_m)$; désignons la fonction objectif par $\varnothing(n)$.

c) Minimiser $\varnothing(n)$ sous une contrainte de taille d'échantillon $\Sigma_i n_i \leqslant N$, ou/et une contrainte de coût $\Sigma_i n_i c_i \leqslant C$ (c_i étant le coût d'une observation au $i^{\text{ème}}$ point contrôlé et C le budget disponible), ou/et toute autre contrainte désirable, en plus des contraintes : les n_i sont des nombres entiers non négatifs, $n_i \geqslant 0$ $i = 1, ..., m$. Comme les fonctions objectifs sont convexes (voir Kiefer [1959]), le problème de planification de l'expérience est posé sous la forme d'un problème de programmation mathématique résolvable par algorithme de calcul (voir par exemple Abadie [1970]). Dans la plupart des cas, il ne sera même pas nécessaire de recourir à des algorithmes de programmation en nombre entier. Cela est en effet intuitif pour N grand : arrondir les solutions optimales n_i^* constitue une approximation raisonnable. Bien que moins intuitif, cela peut être aussi raisonnable pour N petit, comme par exemple dans l'expérience précédente sur les bananes. En effet, dans les diverses expériences sur revenus de transferts aux USA, ainsi que dans d'autres expériences simulées (voir Richonnier [1972]), il a été constaté que les fonctions objectifs n'étaient pas sensibles à des réallocations entre points contrôlés qui font partis de l'optimum en programmation non entière (intuitivement, cela signifie qu'au voisinage des optima possibles, la surface de réponse est presque plate). Cependant, éliminer certains des points contrôlés optima est néfaste (en terme de fonction objectif) et peut même donner des plans inférieurs à des plans intuitifs ! En conséquence, si N est plus petit que le nombre de points contrôlés intervenant dans les optima possibles, il faudra recourir à des algorithmes de programmation en nombre entier.

(1) Puisque σ^2 est une constante, d'ailleurs inconnue, nous pouvons définir les fonctions objectifs directement à partir de Q^{-1}, ou de façon équivalente imposer $\sigma = 1$.

Pour les cas où l'expérimentateur n'a à faire face qu'à une contrainte de taille ou de coût et des contraintes du type $n_i \geqslant n_{io}$ (avec $n_{io} \geqslant 0$), il existe un algorithme très simple déduit directement d'une analogie avec la théorie du consommateur. Sans prétendre à la meilleure efficacité possible, ce programme est certainement adéquat pour la plupart des problèmes de planification d'expérience en marketing et en économie.

Ainsi la méthode des plans d'expérience optima est simplement le produit d'une application des méthodes de programmation mathématiques (qui ont connu un développement particulièrement rapide dans les années 60) au domaine désormais classique de l'économétrie. Cette méthode peut d'ailleurs être facilement étendue aux situations où l'expérimentateur porte intérêt à K_s combinations linéaires Pb de b, où P est une $(K_s \times K)$ matrice de constantes connues (voir par exemple Conlisk et Watts [1969] et Richonnier [1972]).

III. COMMENTAIRES SUR LES HYPOTHESES

Les commentaires suivants peuvent être faits sur les hypothèses (*i*) à (*v*) du paragraphe précédent.

(*i*) La méthode des plans d'expérience optima peut aussi être utilisée dans des circonstances où le modèle classique de régression linéaire n'est pas adapté. Ainsi, la prise en compte d'hétéroschédasticité des erreurs ou d'informations a priori dans le cadre défini par Theil et Goldberger [1961] ne pose pas de problèmes nouveaux (voir Elfving [1952] et Richonnier [1972]).

(*ii*) La connaissance de la forme fonctionnelle de la régression peut apparaître comme une hypothèse héroïque. Cependant, il faut signaler les contributions théoriques de Conlisk et Watts [1969] qui suggèrent une approche bayesienne et Stigler [1971] qui « restrictionne » les critères d'optimalité afin de permettre la détection, au stade post-expérimental, de termes de plus haut degré, dans le cas des formes fonctionnelles polynomiales. Plusieurs commentaires d'ordre pratique peuvent aussi être formulées. Tout d'abord, même au stade post-expérimental (c'est-à-dire, une fois que les données ont été recueillies), il n'existe pas de procédures infaillibles menant à la « meilleure » forme fonctionnelle ! Deuxièmement, les plans d'expérience traditionnels (dans le cadre particulier des modèles d'analyse de variance) font en fait des hypothèses implicites au sujet de la forme fonctionnelle et qui ne tiennent pas compte des propriétés de continuité des surfaces de réponse. Troisièmement, en cas d'incertitude absolue concernant la forme fonctionnelle de la surface de réponse, un plan intuitivement approprié est un plan où : (*a*) les points contrôlés choisis sont répartis régulièrement dans (Z_p) et (*b*) chacun de ces points reçoit la même proportion d'observation, $p_1 = p_2 = ... = p_m$ ou $p_i = n_i/N$ (un support théorique à ce plan équi-réparti et équi-proportionnel peut être trouvé dans Box et Draper [1959]). Cependant, hormis ce cas d'ignorance complète, ce plan intuitif n'est certainement pas désirable (voir par exemple une évaluation chiffrée dans la section suivante). Enfin, tout processus de planification requiert des paris sur l'avenir en échange de performances meilleures : intuitivement, si l'expérimentateur veut plus de précision dans ses paramètres à estimer, il lui faut avoir quelques idées sur la forme probable de la surface de réponse.

(*iii*) Des variables comme changement de prix ou de qualité étaient directement sous contrôle expérimental dans l'expérience avec les bananes de l'United Fruit Company. Ce n'est plus le cas si l'expérimentateur veut introduire des variables explicatives comme niveau de revenu, part de marché,... Cependant, il peut exercer un contrôle indirect sur ces variables en stratifiant les unités expérimentales sur le niveau de revenu, part de marché,... Quand la stratification n'est pas possible ou trop coûteuse, il y a au moins une façon de contourner ce problème des variables non contrôlables. En effet, écrivons (2) sous la forme : $y - X_{nc}b_{nc} = X_c b_c + e$ où les indices c et nc signifient contrôlable et non contrôlable respectivement. Ce faisant, il suffit de faire l'hypothèse que $X_{nc}b_{nc}$ est parfaitement connu au stade pré-expérimental, pour se débarrasser du problème des variables non contrôlables. Bien sûr, au stade de l'estimation on estimera simplement la forme (2), évitant ainsi le problème délicat de deviner b_{nc}, et la validité de cette approche repose sur l'hypothèse que l'estimateur obtenu pour b_{nc}, $\hat{b}_{nc}$, est en fait un estimateur parfait ($\hat{b}_{nc} = b_{nc}$.)

(*iv*) Que les observations soient répétables en tous points contrôlés n'est pas généralement contraignant pour la plupart des expériences en marketing et en économie.

(*v*) Le nombre m de points contrôlés retenus peut être grand pour permettre un recouvrement dense de (Z_p). Cependant, plus m est grand et plus le temps de calcul des n_i optima est susceptible d'être long.

La méthode des plans d'expérience optima apparaît donc comme bien adaptée théoriquement aux expériences faites en marketing et en économie. Encore faut-il justifier pratiquement leurs avantages.

IV. EVALUATION DES PLANS D'EXPERIENCE OPTIMA

Une des critiques les plus importantes adressée à l'égard des expériences faites en marketing et en économie, est leur coût élevé pour des résultats assez maigres en terme de qualité d'information. Ceci n'est en fait qu'une question de savoir si ces expériences ont ou non été bien planifiées. Illustrons ce point en prenant pour fonction objectif la fonction trace, et le cas des expériences de l'United Fruit Company et du New Jersey (voir Conlisk and Watts [1969]). Le plan retenu dans l'expérience sur les bananes était essentiellement un plan intuitif allouant chacun des 7 points B, C, D, E, F, G, H à deux supermarchés (voir figure dans I). La valeur de la trace obtenue est environ 4 fois plus grande que la valeur optimum. Concrètement, puisque $\operatorname{tr}\left(\sum_i n_i X_i' X_i\right)^{-1} = (1/N)\operatorname{tr}\left(\sum_i p_i X_i' X_i\right)^{-1}$ avec $p_i = n_i/N$, cela signifie que pour atteindre l'efficacité optimale (en terme de trace), le plan adopté (caractérisé par les valeurs des p_i retenues) devrait porter sur un nombre 4 fois plus grand de supermarchés; de façon équivalente, l'expérience aurait coûtés pratiquement 4 fois plus !

Dans l'expérience de New Jersey, il y a deux variables directement contrôlables, une variable contrôlée indirectement par stratification des ménages; la forme fonctionnelle retenue est un polynôme du second degré, le nombre de points contrôlés est $m = 27$ et la fonction objectif choisie est la fonction trace; il y a une contrainte de taille ($N = 1\,300$) et une contrainte de coût. Le plan obtenu donne une valeur de la trace de 2 à 3 fois moins élevée que celles obtenues avec des plans intuitifs; et le coût total de planification de l'expérience représente moins de 1 % de son budget total. Bien que ce coût soit minime, il se peut que l'expérimentateur n'ait pas à sa disposition les algorithmes de calcul nécessaires à la résolution du problème de programmation mathématique posé par l'approche des plans d'expérience optima.

Dans ces circonstances, il existe bien sûr des plans explicites comme PCL, PBIE (voir l'introduction) ou les plans orthogonaux (PO). Kiefer [1959] a montré que ces plans classiques étaient en fait simultanément optima pour toutes les fonctions objectifs conventionnelles. Ces cas particuliers de plans optima ne sont cependant valides que sous des conditions très précises comme nous allons illustrer dans le cas des PO. Dans le cadre du modèle classique de régression linéaire, supposons que (*i*) toutes les variables explicatives sont contrôlables; (*ii*) (Z_p) est un orthotope (généralisation du rectangle à plus de deux dimensions); (*iii*) les régresseurs sont fonctionnellement indépendants et sont des fonctions monotones des variables contrôlées; (*iv*) l'ensemble des contraintes est formé d'une contrainte de taille et de contraintes de non-négativité des n_i. Alors, le plan qui répartit les observations entre les sommets de (Z_p) et de façon aussi égale que possible, minimise (*a*) les fonctions objectifs conventionnelles de la matrice des variances-covariances des paramètres, terme constant exclu, (*b*) le déterminant de la matrice des variances-covariances de *tous* les paramètres. Par exemple, ce théorème serait applicable à l'expérience de l'United Fruit Company, si au lieu de (4), la forme fonctionnelle retenue avait été :

$$y_i = b_0 + b_1 \Delta P_i + b_2 \Delta Q_i + e_i \qquad i = 1, \ldots, 14 \tag{5}$$

(En fait, (5) a été en effet retenu au stade post-expérimental.) Alors, un plan optimum possible serait d'affecter les traitements A et C à 4 supermarchés et les traitements G et I à 3 supermarchés. Cependant, les hypothèses (*iii*) et (*iv*) sont restrictives et lorsqu'elles ne sont plus valides il convient alors de recourir à la méthode des sections précédentes qui permet d'obtenir des plans optimaux sur mesure.

V. CONCLUSION

Le décollage de la théorie des plans d'expérience optima est dû en grande partie aux progrès réalisés dans le domaine de la programmation mathématique. Concrètement, ces plans se caractérisent par leur souplesse, et, à qualité égale, par des économies importantes de budget, d'autant plus appréciables que les expériences réalisées en marketing et en économie coûtent cher.

Les développements ci-dessus concernent des expériences n'ayant qu'une dimension spatiale. Pour les expériences n'ayant qu'une dimension temporelle (ce qui serait le cas de l'expérience de l'United Fruit Company si l'on voulait étudier les ventes d'un supermarché ou les ventes moyennes des 14 supermarchés à travers le temps), voir Richonnier [1972]. En fait, la plupart des expériences ont les deux aspects; ainsi les expériences décrites ci-dessus ont une durée de plusieurs semaines ou plusieurs années. Dans ces cas, l'expérimentateur choisira des plans qui, dans la mesure du possible, sont optimum par rapport aux deux dimensions de l'expérience. Une voie de recherche visant des plans intégrant directement ces deux aspects est présentement ouverte par les récents développements apportés aux modèles économétriques à erreur composée (voir par exemple Nerlove [1971]).

REFERENCES

ABADIE J., *Integer and Non linear Programming*, Amsterdam, North-Holland Publishing Co., 1970.

American Economic Review, « Current status of Income Maintenance Experiments », 1971, volume 61, 15-42.

BOX G. E. P. et DRAPER N. R., « A basis for the Selection of a Response Surface Design ». *Journal of the American Statistical Association*, 1959, volume 54, 622-54.

BUZZEL R. D., COX D. F. et BROWN R. V., *Marketing Research and Information Systems*, New York, Mc Graw Hill, 1969.

CONLISK J. et WATTS J., « A model for Optimizing Designs for Estimating Response Surfaces ». *American Statistical Association Proceedings, Social Statistics Section*, 1969, 150-6.

DUGUE D. et GIRAULT M., *Analyse de la Variance et Plans d'Expérience*, Paris, Dunod, 1969.

ELFVING G., « Optimal Allocation in Linear Regression Theory » *Annals of Mathematical Statistics*, 1952, volume 23, 255-62.

KIEFER J., « Optimum Experimental Designs ». *Journal of the Royal Statistical Society*, series B, 1959, volume 21, 272-304.

NERLOVE M, « Further evidence on the Estimation of Dynamic Economic relations from a time series of cross-sections », *Econometrica*, 1971, volume 39, 359-382.

RICHONNIER, « Optimum Experimental Design in Econometrics : Some Extensions ». Thèse, Université de Californie à San Diego, 1972.

STIGLER S. N., « Optimum Experimental Design for Polynomial Regression ». *Journal of the American Statistical Association*, 1971, volume 66, 311-18.

THEIL H. et GOLDBERGER A. S., « On Pure and Mixed Statistical Estimation in Economics », *International Economic Review*, 1961, volume 2, 65-78.