

PHILIPPE OGER

**Durées de séjour et temps d'entrée associés à  
un processus de Markov homogène**

*Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle*, tome 7, n° V3 (1973), p. 83-96

<[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1973\\_\\_7\\_3\\_83\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1973__7_3_83_0)>

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## DUREES DE SEJOUR ET TEMPS D'ENTREE ASSOCIES A UN PROCESSUS DE MARKOV HOMOGENE <sup>(1)</sup>

par Philippe OGER <sup>(2)</sup>

**Résumé.** — *Considérant un Processus de Markov homogène, à temps continu et comportant un nombre fini d'états, on définit les variables aléatoires  $\{S_{ij}\}$  et  $\{T_i\}$  :*

—  $S_{ij}$  : *Durée totale de séjour dans l'état  $j$  avant le premier passage dans l'état 0 sachant que l'état initial est  $i$  ;*

—  $T_i$  : *Temps d'entrée dans l'état 0 sachant que l'état initial est  $i$ .*

*On montre que les lois des variables  $S_{ij}$  et les lois conditionnelles des variables  $S_{ij}$  (sachant que l'état  $j$  est atteint avant l'état 0) sont exponentielles. Les fonctions de répartition des variables  $\{T_i\}$  sont solutions d'équations différentielles classiques (cf. [10]), dans le « cas fini » on détermine, outre ces fonctions de répartition, les fonctions caractéristiques et les moments des Temps d'entrée  $\{T_i\}$ . Enfin, différentes implications des résultats obtenus donnent l'occasion d'étudier les propriétés de certains types de matrices carrées à diagonale dominante.*

### 1. NOTATIONS, INTRODUCTION

**1.1.** Considérons un processus de Markov  $\mathcal{P}$ , homogène, à temps continu, comportant  $n + 1$  états (numérotés de 0 à  $n$ ), son générateur infinitésimal  $\mathcal{G}$  est une matrice  $(n + 1, n + 1)$  telle que — notations de Feller — :

$$(1) \quad \mathcal{G} = \{c_i q_{ij} - c_i \delta_{ij}\}$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et :

$$(2) \quad \forall i \quad c_i > 0 \quad q_{ii} = 0 \quad , \quad \forall i, j \quad q_{ij} > 0$$

$$(3) \quad \forall i \quad \sum_j q_{ij} = 1$$

(1) Note écrite dans le cadre des sessions de « perfectionnement en Recherche opérationnelle » organisées par le C.I.R.O.

(2) Centre Interarmées de Recherche Opérationnelle, Arcueil.

Notons :

—  $M$  la matrice  $(n, n)$  obtenue en retirant à  $\mathcal{G}$  sa première ligne et sa première colonne,  $M^{-1}$  sa matrice inverse et  $m_{ij}^{-1}$  le terme générique de cette dernière.

—  $I$  la matrice unité, d'ordre défini par le contexte.

—  $S_{ij}$  la durée (totale) de séjour dans l'état  $j$  avant l'entrée dans l'état 0, sachant que l'état initial est  $i$ ,  $i > 0$ ,  $j > 0$ .

—  $G_{ij}(s) = \text{Prob} \{ S_{ij} > s \}$ ,  $s > 0$ .

—  $G(s) = \{ G_{ij}(s) \}$ .

—  $f_{ij}$  la probabilité pour que le premier passage (premier retour si  $j = i$ ) en  $j$  ait lieu avant l'entrée en 0. Pour  $j \neq i$  :  $f_{ij} = \text{Prob} \{ S_{ij} > 0 \}$ .

—  $T_i$  le temps d'entrée dans l'état 0, sachant que l'état initial est  $i$ ,  $i \geq 0$ .

—  $H_i(t) = \text{Prob} \{ T_i > t \}$ .

—  $H(t) = \{ H_i(t) \}$  vecteur colonne à  $n$  composantes.

—  $\varphi_i(u) = E \exp(-ut_i)$  la fonction caractéristique de Poincaré de la variable  $T_i$ .

—  $\Phi(u) = \{ \varphi_i(u) \}$  vecteur colonne à  $n$  composantes.

—  $Z_i$  la date à laquelle le système quitte l'état initial ( $i$ ) pour la première fois.  $Z_i$  est une variable exponentielle de densité  $c_i \exp(-c_i z)$ .

—  $l$  le vecteur (d'ordre défini par le contexte) ayant toutes ses composantes égales à 1.

Enfin étant donné une matrice  $A = \{ a_{ij} \}$ , nous noterons  $Dg(A)$  la matrice diagonale de  $A$ , c'est-à-dire que  $Dg(A) = \{ \delta_{ij} a_{ij} \}$ . De même on associera à une suite  $\{ a_i, i = 1 \text{ à } n \}$  la matrice diagonale  $Dg(a_i)$ .

**1.2.** Le but de cette note est de déterminer les lois des variables  $S_{ij}$  et  $T_i$  : il s'agit soit de lois exponentielles ( $S_{ij}$ ) soit de généralisations de la loi hyper-exponentielle ( $T_i$ ).

Kemeny et Snell [5], [6] ont étudié de manière approfondie la distribution des durées de séjour  $S_{ij}$  dans le cas des chaînes de Markov et leurs résultats ont souvent été repris : cf. [1], [2], [9]; en revanche le cas des processus de Markov à temps continu ne semble pas avoir été abordé explicitement.

La distribution des temps d'entrée a fait l'objet, outre de nombreux développements théoriques (cf. Chung [3]) liés à la notion de « temps d'arrêt », de beaucoup d'études plus spécifiques à certains types de processus de Markov, notamment en théorie des files d'attente. L'article de Syski dans [10] expose de manière rigoureuse les résultats fondamentaux dans le cas général de processus comportant un nombre infini (dénombrable) d'états.

Nous supposons enfin (hypothèse  $\mathcal{HC}$ ) que l'état 0 est *récurrent* et qu'il n'y a qu'une seule classe d'états récurrents : il est clair, en effet, que le pro-

blème posé n'a d'intérêt (au moins en ce qui concerne les  $\{S_{ij}\}$ ) que si, quel que soit l'état initial, l'état 0 est atteint presque sûrement.

## 2. LOI DES DUREES DE SEJOUR $S_{ij}$

**2.1.** Suivant la démarche classique dans l'étude des processus de Markov (le célèbre « renewal argument ») nous « décomposerons » les événements considérés sur la partition  $\{E_k, 0 \leq k \leq n\}$ , en définissant l'événement  $E_k$  : « la première transition a lieu (de l'état initial  $i$ ) vers  $k$  ». Alors si  $s \geq 0$  :

→ Pour  $j \neq i$ .

$$(4) \quad G_{ij}(s) = \sum_{k \geq 0} q_{ik} G_{kj}(s)$$

→ Pour  $j = i$

$$\text{Prob} \{ S_{ii} > s \mid Z_i = z \} = \begin{cases} 1 & \text{si } z \geq s \\ \sum_{k \geq 0} q_{ik} G_{ki}(s - z) & \text{si } z < s \end{cases}$$

« en intégrant », et puisque  $Z_i$  est une variable exponentielle :

$$G_{ii}(s) = \exp(-c_i s) + \sum_{k \geq 0} q_{ik} \int_0^s c_i \exp(-c_i z) G_{ki}(s - z) dz$$

soit

$$\exp(c_i s) G_{ii}(s) = 1 + \sum_{k \geq 0} c_i q_{ik} \int_0^s \exp(c_i u) G_{ki}(u) du$$

d'où, en dérivant par rapport à  $s$  :

$$(5) \quad \forall i \quad G'_{ii}(s) = -c_i G_{ii}(s) + \sum_{k \geq 0} c_i q_{ik} G_{ki}(s)$$

finally (4) et (5) sont résumés sous forme matricielle par :

$$(8) \quad Dg(G'(s)) = M \cdot G(s)$$

Or, sous l'hypothèse  $\mathcal{H}$ ,  $M$  est inversible (cf. Annexe Propriété 1 b) :

$$(9) \quad M^{-1} \cdot Dg(G'(s)) = G(s)$$

Identifiant les deux membres terme à terme, il vient :

$$(10) \quad \forall i, j \quad m_{ij}^{-1} G'_{ij}(s) = G_{ij}(s)$$

soit, pour  $i = j$  :  $m_{ii}^{-1} G'_{ii}(s) = G_{ii}(s)$ , et puisque  $G_{ii}(0) = 1$  :

$$(11) \quad \forall i \quad G_{ii}(s) = \exp(s/m_{ii}^{-1})$$

Portant ce résultat dans (10) on tire :

$$(12) \quad \forall i, j \quad G_{ij}(s) = (m_{ij}^{-1}/m_{jj}^{-1}) \cdot \exp(s/m_{jj}^{-1})$$

On constate ainsi que  $S_{ii}$  est une variable exponentielle d'espérance mathématique  $-m_{ii}^{-1}$ . En outre  $\text{Prob}_i\{S_{ij} > 0\} = \lim(s \rightarrow 0) G_{ij}(s) = m_{ij}^{-1}/m_{jj}^{-1}$ , ce qui peut s'interpréter de la manière suivante : pour  $j \neq i$ ,  $f_{ij} = m_{ij}^{-1}/m_{jj}^{-1}$ . Il est facile d'obtenir ce résultat directement en considérant la chaîne de Markov associée au processus  $\mathcal{T}$  (cf. 4.1 Remarque) et en appliquant le résultat de Kemeny et Snell ([5] théorème 3.5.7, p. 61). Finalement :

### Proposition 1

- (a)  $\forall i$   $S_{ii}$  est une variable exponentielle d'espérance  $-m_{ii}^{-1}$ .
- (b) « Partant » de  $i$ , la probabilité d'atteindre l'état  $j$  avant l'état 0 est  $f_{ij} = m_{ij}^{-1}/m_{jj}^{-1}$ ,  $j \neq i$ .
- (c) La loi conditionnelle de  $S_{ij}$ , sachant que l'état  $j$  est atteint, est exponentielle d'espérance mathématique  $-m_{jj}^{-1}$ .

REMARQUES. 1. Le (c) est une conséquence de (a) et de la propriété de Markov : sachant que l'état  $j$  est atteint, la loi (conditionnelle) de  $S_{ij}$  est la même que celle de  $S_{jj}$ .

2. Les résultats précédents impliquent que tous les termes de  $M^{-1}$  sont négatifs (strictement en ce qui concerne les termes de la diagonale) et que  $\forall i, j$   $m_{ij} \leq m_{jj} \leq 0$ . Ceci peut être montré directement (cf. Annexe Propriété 2).

3.  $\forall i, j$   $ES_{ij} = -m_{ij}^{-1}$ , résultat indiqué par G. Kreweras ([7], p. 117).

2.2. Montrons maintenant que, même dans le cas de processus comportant un nombre *infini* (dénombrable) d'états, la loi de  $S_{ii}$  est exponentielle.

On vérifie aisément qu'étant donné une suite infinie  $\{X_k\}$  de v.a. suivant indépendamment la même loi exponentielle d'espérance mathématique  $1/\lambda$ , et une variable de Pascal  $N$  de paramètre  $p$

$$(i.e. n \geq 1 \text{ Prob } \{N = n\} = p(1 - p)^{n-1})$$

la variable  $Z = \sum_{k=1}^N X_k$  suit une loi exponentielle d'espérance mathématique  $1/\lambda p$ .

Par ailleurs il est clair que le nombre de passages dans l'état initial  $i$  suit une loi de Pascal de paramètre  $(1 - f_{ii})$ , or les durées de séjour en  $i$ , lors de

chacun de ces passages, sont des variables exponentielles indépendantes d'espérance  $1/c_i$ , donc  $S_{ii}$  suit une loi exponentielle d'espérance  $c_i(1 - f_{ii})$  :

$$(13) \quad \text{Prob} \{ S_{ii} > s \} = \exp(-c_i(1 - f_{ii})s)$$

et pour  $j \neq i$  (cf. 2.1. Remarque 1) :

$$(14) \quad \text{Prob} \{ S_{ij} > s \} = f_{ij} \exp(-c_j(1 - f_{jj})s) \quad s \geq 0$$

Dans le cas fini il suffit de vérifier à l'aide du résultat déjà cité de Kemeny et Snell ([5], théorème 3.5.7) que  $c_i(1 - f_{ii}) = -1/m_{ii}^{-1}$  et que

$$(j \neq i) \quad f_{ij} = m_{ij}^{-1}/m_{jj}^{-1}$$

pour retrouver la proposition 1.

### 3. LOI DES TEMPS D'ENTREE $T_i$

#### 3.1. Fonction de répartition

La méthode est ici identique à celle déjà utilisée en 2.1 : la décomposition sur la partition  $\{E_k, 0 \leq k \leq n\}$ . Pour  $t \geq 0$  :

$$(15) \quad \text{Prob} \{ T_i > t \mid Z_i = z \} = \begin{cases} 1 & \text{si } z > t \\ \sum_{k \geq 0} q_{ik} \text{Prob} \{ T_k > t - z \} & \text{si } z \leq t \end{cases}$$

et en intégrant :

$$(16) \quad \begin{aligned} H_i(t) &= \exp(-c_i t) + \sum_{k \geq 0} q_{ik} \int_0^t c_i \exp(-c_i t) \cdot H_k(t - z) dz \\ &= \exp(-c_i t) + \sum_{k \geq 0} c_i q_{ik} \exp(-c_i t) \int_0^t \exp(c_i u) H_k(u) du \end{aligned}$$

soit, après dérivation et simplification :

$$(17) \quad c_i H_i(t) + H_i'(t) = \sum_{k \geq 0} c_i q_{ik} H_k(t) \quad 1 \leq i \leq n$$

ou encore, sous forme matricielle :

$$(18) \quad H'(t) = M \cdot H(t) \quad t \geq 0$$

Ce système d'équations différentielles linéaires a pour solution :

$$(19) \quad H(t) = \exp \{ Mt \} \cdot H(0)$$

et puisque  $H(0) = I$  :

**Proposition 2** : (20)  $\forall t, t \geq 0 \quad H(t) = \exp \{ Mt \} \cdot I$

Syski ([10], p. 200) montre que le système (17) reste valable même si le nombre d'états considérés est infini dénombrable. En fait les équations (17) ne sont rien d'autre que des *équations* (de Chapman-Kolmogorov) *du passé* pour le processus  $\mathcal{T}'$  dérivé de  $\mathcal{T}$  en rendant l'état 0 absorbant, i.e. en annulant tous les termes de la première ligne de  $\mathcal{G}$  : en effet  $H_i(t) = 1 - P_{i0}(t)$  où  $P_{i0}(t)$  est la probabilité (dans le processus  $\mathcal{T}'$ ) pour que le système se trouve dans l'état 0 à la date  $t$  sachant que l'état initial était  $i$ .

### 3.2. Abandon de l'hypothèse $\mathcal{H}$

Sous l'hypothèse  $\mathcal{H}$  toutes les valeurs propres de  $M$  ont leur parties réelles strictement négatives (cf. Annexe Propriété 1) et  $H(\infty) = \lim (t \rightarrow \infty) H(t) = 0$  c'est-à-dire que les  $T_i$  sont de « vraies » variables aléatoires en ce sens que  $\forall i \quad \text{Prob} \{ T_i < +\infty \} = 1$ .

En revanche si l'on abandonne l'hypothèse  $\mathcal{H}$  il y a autant de valeurs propres nulles que de classes récurrentes dont ne fait pas partie l'état 0. Dans ce cas la formule (20) reste exacte mais  $H(\infty)$  n'est plus identiquement nul. Il est alors naturel d'interpréter  $H_i(\infty)$  comme la probabilité pour que, « partant » de l'état  $i$ , on n'atteigne jamais l'état 0. Nous allons vérifier directement ce résultat.

Décomposons les états 1 à  $n$  en deux classes : la classe  $A$  contenant tous les états à partir desquels il est « possible » (i.e. il y a une probabilité strictement positive) d'atteindre l'état 0, la classe  $B$  les autres. La matrice  $M$  peut donc se mettre sous la forme :

$$(21) \quad M = \begin{array}{cc} \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^A \end{array} & \begin{array}{c} \overbrace{\hspace{1.5cm}}^B \end{array} \\ \begin{array}{|c|c|} \hline M_{11} & M_{12} \\ \hline 0 & M_{22} \\ \hline \end{array} & \left. \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \phantom{M_{11}} \phantom{M_{12}} \\ \phantom{M_{11}} \phantom{M_{12}} \end{array} \right\} A \\ \phantom{M_{11}} \phantom{M_{12}} \\ \phantom{M_{11}} \phantom{M_{12}} \end{array} \right\} B \end{array}$$

où  $M_{11}$  est inversible et  $M_{22} \cdot I = 0$ .

— Notons  $h_i$  la probabilité pour que, « partant » de  $i$ , on n'atteigne jamais l'état 0 et  $h$  le vecteur colonne ( $n$  composantes) défini par  $h = \{h_i\}$ . Alors :

$$(22) \quad \forall i, i = 1 \text{ à } n \quad h_i = \sum_{k \in A} q_{ik} h_k + \sum_{k \in B} q_{ik}$$

d'où :

$$(23) \quad h = \begin{pmatrix} -M_{11}^{-1} M_{12} l \\ l \end{pmatrix}$$

on vérifie heureusement (cf. définition) que si  $i \in B$   $h_i = 1$ .

— Utilisant la décomposition (21) il est clair que :

$$(24) \quad M^n \cdot 1 = \begin{pmatrix} M_{11}^n l + M_{11}^{n-1} M_{12} l \\ l \end{pmatrix}$$

donc

$$(25) \quad H(t) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^r}{r!} M^r l \\ = \begin{pmatrix} \exp(M_{11} t) l + \exp(M_{11} t) M_{11}^{-1} M_{12} l - M_{11}^{-1} M_{12} l \\ l \end{pmatrix}$$

or,  $\lim (t \rightarrow \infty) \exp(M_{11} t) = 0$  et :

$$(26) \quad \boxed{H(\infty) = \lim(t \rightarrow \infty) H(t) = \begin{pmatrix} -M_{11}^{-1} M_{12} l \\ l \end{pmatrix} = h}$$

### 3.3. Fonction caractéristique de Poincaré et moments

La fonction caractéristique de Poincaré  $\Phi(u)$  d'une variable aléatoire réelle positive  $X$  est définie, pour  $u \geq 0$ , par :  $\Phi(u) = E \exp(-uX)$ . Si la variable  $X$  admet une densité, soit  $f(x)$ ,  $\Phi(u) = \int_0^{\infty} \exp(-ux) f(x) dx$  n'est rien d'autre que la transformée de Carson-Laplace de cette densité.

La fonction caractéristique de la variable exponentielle  $Z_i$  est  $c_i/(c_i + u)$ , donc (toujours d'après le « renewal argument ») :

$$(27) \quad \varphi_i(u) = \frac{c_i}{c_i + u} \left[ \sum_{k \geq 0} q_{ik} \varphi_k(u) + q_{i0} \right]$$



soit, sous forme matricielle :

$$(28) \quad u\Phi(u) = M\Phi(u) - Ml$$

d'où finalement :

$$(29) \quad \Phi(u) = [I - uM^{-1}]^{-1} \cdot l$$

$\forall i$   $H_i(t)$  est majoré en module par une combinaison linéaire de termes du type  $\exp(-\lambda t)$ ,  $\lambda > 0$ , donc tous les moments de  $T_i$  existent.

Notant alors  $ET^r$  le vecteur colonne ayant pour composantes les moments d'ordre  $r$  des variables  $T_i$  et développant  $\Phi(u)$  au voisinage de 0, on tire :

$$(30) \quad ET^r = (-1)^r r! M^{-r} \cdot l$$

En particulier  $ET = -M^{-1}l$ . Ce résultat (démontré par G. Kreweras [7], p. 117) pouvait être obtenu directement à partir de (12) en remarquant que :

$$ET_i = \sum_{j \geq 0} ES_{ij} = - \sum_{j \geq 0} m_{ij}^{-1}$$

#### 4. RESULTATS POUR LES CHAINES DE MARKOV

Considérons une chaîne de Markov homogène de matrice des transitions  $P(n+1, n+1)$ ,  $Q$  la matrice  $(n, n)$  obtenue en retranchant à  $P$  sa première ligne et sa première colonne :  $S_{ij}$  et  $T_i$  sont maintenant les variables entières mais leurs lois s'obtiennent comme dans le cas continu, aussi nous nous bornerons à énoncer les résultats. Beaucoup sont d'ailleurs classiques : cf. [1].

**4.1.** Par convention, le « séjour » dans l'état initial est pris en compte; ainsi dans tous les cas  $S_{ii} > 0$ .

**Proposition 1 bis :**

(a)  $\forall i$   $S_{ii}$  est une variable de Pascal d'espérance mathématique  $\alpha_i = (I - Q)_{ii}^{-1}$ , c'est-à-dire que :  $\forall s, s \geq 0$   $\text{Prob} \{S_{ii} > s\} = \left(1 - \frac{1}{\alpha_i}\right)^s$

(b) « Partant » de  $i$  la probabilité d'atteindre l'état  $j$  avant l'état 0 est  $f_{ij} = (I - Q)_{ij}^{-1} / (I - Q)_{jj}^{-1}$ .

(c) La loi conditionnelle de  $S_{ij}$ , sachant que l'état  $j$  est atteint est une loi de Pascal d'espérance  $(I - Q)_{jj}^{-1}$ .

Ceci découle immédiatement du théorème (3.5.8, p. 62) de Kemeny et Snell [5].

REMARQUE : Il est facile de retrouver la proposition 1 à partir des résultats ci-dessus. Ainsi, considérant la chaîne de Markov de matrice des transitions  $Dg(1/c_i)$ .  $\mathcal{G} + I$  associée au processus  $\mathcal{F}$  étudié, il suffit de remarquer que  $m_{ij}^{-1}/m_{jj}^{-1} = (I - Q)_{ij}^{-1}/(I - Q)_{jj}^{-1}$  pour obtenir  $1 \cdot b$ .

4.2. De la même façon que dans le cas continu on généralisait la loi exponentielle, on généralise maintenant la loi de Pascal.

**Proposition 2 bis** :  $\forall t, t \geq 0 \quad \{ \text{Prob } (T_i > t) \} = H(t) = Q^t \cdot I$

Notant  $\psi_i(v) = E v^{T_i}$  la fonction génératrice de  $T_i$  et  $\Psi(v) = \{ \psi_i(v) \}$ , on montre comme en (3.2) que :

$$(13) \quad \Psi(v) = v(I - vQ)^{-1} \cdot (I - Q) \cdot I$$

Tous les moments des variables  $T_i$  s'en déduisent, ainsi  $ET = (I - Q)^{-1} \cdot I$ .

## 5. ASPECTS NUMERIQUES, EXEMPLES

5.1. Étant donné le peu d'expérience de l'auteur en analyse numérique, tant théorique que pratique, les quelques réflexions qui suivent ne doivent pas être considérées comme des vérités révélées. Il s'agit simplement de faire une place (bien timide) à des problèmes, qui, pour le praticien, ont une importance fondamentale et d'insister sur le fait que l'utilisation des résultats obtenus repose, pour une très grande part, sur la progression de la théorie et des techniques de l'analyse numérique.

La résolution numérique des questions étudiées dans cette note nécessite soit l'inversion de matrices, soit l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires.

En ce qui concerne la première de ces opérations il n'existe pas (au moins à la connaissance de l'auteur) d'algorithme donnant des résultats satisfaisants dans le cas général dès que l'ordre de la matrice dépasse quinze ou vingt; or, en pratique, on est souvent amené, pour pouvoir « modéliser » un phénomène réel sous forme de processus de Markov, à introduire un très grand nombre d'états. Heureusement les matrices à considérer ont souvent des formes particulières : triangulaires, tridiagonales (cas des processus de vie et de mort) etc... Ceci doit laisser quelque espoir.

Le tableau est aussi sombre en ce qui concerne la résolution du système différentiel (17), il semble que dès que  $n$  atteint les dizaines il faille se tourner vers des méthodes d'intégration pas à pas (du type Runge-Kutta); en effet,

les méthodes fondées sur l'exponentiation de la matrice  $M$  laissent vite à désirer :

— la méthode, formellement exacte, basée sur la diagonalisation de  $M$  ne vaut que ce que valent les techniques de diagonalisation de matrices (non symétriques),

— la méthode, indiquée par Fraser [4], consistant à calculer par multiplication de matrices successives les coefficients  $a_i^{(n)} = \sum_k m_{ik}^{(n)}$  du développement de  $H_i(t)$  :

$$H_i(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} a_i^{(k)}$$

a donné à l'expérience (en particulier pour l'exemple 1 ci-dessous) des résultats fort peu convaincants.

### 5.2. Exemple 1

$$\text{Soit } M = \begin{bmatrix} -9 & 2 & 10/3 & 0 \\ 1 & -8 & 10/3 & 0 \\ 1 & 0 & -5 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{745} \begin{bmatrix} 108 & 27 & 100 & 50 \\ 33,5 & 101,5 & 100 & 50 \\ 48 & 12 & 210 & 105 \\ 66 & 16,5 & 102,5 & 237,5 \end{bmatrix}$$

Le vecteur ligne des espérances mathématiques des variables  $T_i$  est alors :

$${}^tET = {}^t(M^{-1} \cdot I) = \frac{1}{149} (57, 57, 75, 84.5)$$

Le calcul des écarts types donne :

$${}^t\sigma_T \neq \frac{1}{149} (67.2, 67.2, 74.8, 76.5)$$

On constate ainsi qu'espérances et écarts types sont du même ordre. Ce résultat semble d'ailleurs avoir été souvent reconnu comme un fait d'expérience (cf. [1]) il implique en particulier que les estimations de  $ET$  obtenues lors de simulations exigent un grand nombre de « runs » pour être précises.

Par ailleurs la matrice  $M$  a pour valeurs propres  $-10$ ,  $-2$ ,  $-7 + i\sqrt{2/3}$ ,  $-7 - i\sqrt{2/3}$  ce qui permet d'obtenir l'expression exacte de  $H(t)$  :

$$H_1(t) = H_2(t) = \frac{52}{77} \exp(-2t) + \frac{25}{77} \exp(-7t) \cos(\omega t) - \frac{5}{77} \cdot \frac{\sqrt{6}}{3} \exp(-7t) \sin(\omega t)$$

$$H_3(t) = \frac{78}{77} \exp(-2t) - \frac{1}{77} \exp(-7t) \cos(\omega t) - \frac{5}{77} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \exp(-7t) \sin(\omega t)$$

$$H_4(t) = \frac{13}{11} \exp(-2t) - \frac{2}{11} \exp(-7t) \cos(\omega t) - \frac{1}{11} \cdot \frac{\sqrt{6}}{2} \exp(-7t) \sin(\omega t)$$

avec  $\omega = \sqrt{2/3}$ .

### 5.3. Exemple 2, majoration de $H(t)$

Considérons le cas où tous les termes (hormis le 1<sup>er</sup>) de la première colonne du générateur  $\mathcal{G}$  sont identiques :

$$q_{10} = q_{20} = \dots = q_{n0} = a$$

Il est clair que  $l$  est alors vecteur propre de  $M$  associé à la valeur propre  $-a$ , ainsi  $M^n \cdot l = (-a)^n l$  et par conséquent  $\forall i \ H_i(t) = \exp(-at)$  :

Toutes les variables  $T_i$  suivent donc une loi exponentielle d'espérance mathématique  $1/a$ .

Ce résultat permet d'obtenir une majoration de  $H(t)$  lorsque  $\alpha = \min_{i \geq 1} q_{i0}$  n'est pas nul :

Il est en effet évident (de par la nature du problème) que, à  $t$  fixé les quantités  $H_i(t)$  ne peuvent que croître (ou rester inchangées) si l'on augmente l'un ou plusieurs des coefficients  $c_i$ .

Considérons alors le processus  $\mathcal{I}''$  de générateur  $\mathcal{G}'' = Dg(\alpha/q_{i0}) \cdot \mathcal{G}$  par construction tous les termes de la première colonne de  $\mathcal{G}''$  sont égaux à  $\alpha$  et  $\forall i \ H_i''(t) = \exp(-\alpha t)$ . Finalement, puisque  $\forall i \ H_i''(t) \leq H_i(t)$  :

$$\forall i \ H_i(t) \leq \exp(-\alpha t) \quad \text{avec } \alpha = \min_{i \geq 1} q_{i0}$$

## 6. CONCLUSION

Les résultats obtenus peuvent trouver des applications dans l'étude de la plupart des phénomènes intégrant un « modèle » markovien : gestion des stocks (loi de la date de rupture de stock), files d'attente (loi des durées de service ininterrompu, loi des temps d'attente), fiabilité (durées de bon fonctionnement), etc... Ils doivent permettre de simplifier certaines simulations.

## ANNEXE

### 1. Définitions, Rappels

Soit  $A = \{a_{ij}\}$  une matrice carrée  $(n, n)$

— On pose  $u_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$  et l'on définit, dans le plan complexe, la famille des  $n$  disques de Gerschgorin par :

$$1 \leq i \leq n \quad D_i = \{z : |z - a_{ii}| \leq u_i\}$$

la région de Gerschgorin est constituée par l'union de ces disques :

$$R_G = \bigcup_i D_i$$

—  $A$  est à diagonale *fortement dominante* si :  $\forall i \ |a_{ii}| \geq u_i$  et si l'inégalité est stricte pour au moins un indice  $i$ .

—  $A$  est de type  $\mathcal{M}$  si elle est à diagonale fortement dominante et si :

$$\forall i \ a_{ii} > 0, \quad \forall i, j \ a_{ij} \leq 0.$$

On démontre (cf. [10]) les théorèmes suivants :

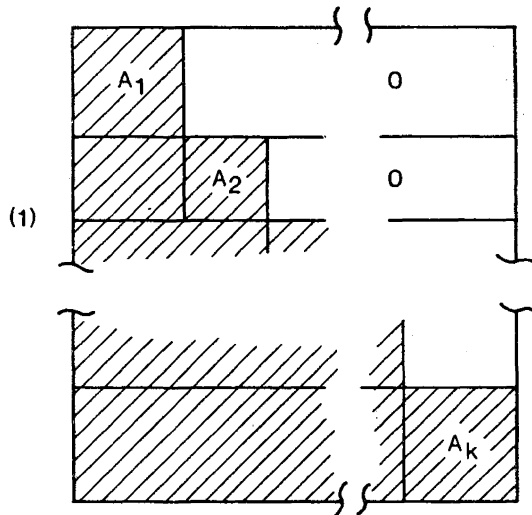
**Théorème 1** (de Gerschgorin) : Toutes valeurs propres d'une matrice sont situées dans sa région de Gerschgorin.

**Théorème 2** : Une valeur propre d'une matrice *irréductible* ne peut être située en un point de la frontière de la région de Gerschgorin que si tous les cercles de Gerschgorin passent en ce point.

**Théorème 3** : Soit  $A$  une matrice à diagonale fortement dominante dont les termes diagonaux sont tous positifs ( $\forall i, a_{ii} > 0$ ) : toutes les valeurs propres de  $A$  ont leurs parties réelles positives ou nulles; de plus, si la matrice  $A$  est irréductible ces parties réelles sont strictement positives.

## 2. Propriété des matrices de types $\mathcal{M}$ à diagonale fortement dominante

Considérons une matrice  $A$  de type  $\mathcal{M}$ ; après réarrangement des lignes et des colonnes elle peut toujours se décomposer selon le schéma suivant :



où les matrices carrées  $A_1, A_2, \dots, A_k$ , construites sur la diagonale principale de  $A$ , sont irréductibles,  $k \geq 1$ .

### Propriété 1

a) Les parties réelles de toutes les valeurs propres de  $A$  sont positives (ou nulles).

b) Si chacune des matrices  $A_i (i = 1 \text{ à } n)$  est à diagonale fortement dominante ces parties réelles sont strictement positives.

*Démonstration :* a) Conséquence immédiate du théorème de Gerschgorin.

b) Le polynôme caractéristique de  $A$  est le produit des polynômes caractéristiques des matrices  $A_1, A_2, \dots, A_k$ ; puisque chacune de ces matrices est irréductible (par hypothèse) et de type  $\mathcal{M}$ , la propriété 1 b) découle directement de l'application du théorème 3.

**Propriété 2.** Soit  $A^{-1} = \{a_{ij}^{-1}\}$  l'inverse d'une matrice irréductible  $A$  d'ordre  $n$ , de type  $\mathcal{M}$ , alors :

$$a) \forall i, a_{ii}^{-1} > 0, \quad \forall i, j, a_{ij} \geq 0$$

$$b) \forall i, j, a_{ij}^{-1} \geq a_{ji}^{-1}$$

*Démonstration.* a)  $A$  peut se mettre sous la forme :  $A = Dg(a_{ii}) \cdot (I - Q)$  où  $Q$  est une matrice à termes positifs et dont la somme de chacune des lignes

est inférieure (ou égale) à 1. D'après le théorème de Gerschgorin toutes les valeurs propres de  $Q$  sont de modules inférieurs à 1, de plus d'après le Théorème 2 ces inégalités sont strictes; il est donc légitime de développer  $(I - Q)^{-1}$  sous la forme  $(I - Q)^{-1} = I + \sum_{k=1}^{\infty} Q^k$ . On constate ainsi que tous les termes de  $(I - Q)^{-1}$ , et par suite ceux de  $A^{-1}$ , sont positifs (strictement en ce qui concerne les termes de la diagonale principale).

b) (1) Le déterminant de  $A$  est positif (théorème de Gerschgorin) or, en développant par rapport à la première ligne :  $\det A = \sum_{k=1}^n a_{1k} A_{1k}$  où  $A_{1k}$  est le cofacteur du terme  $a_{1k}$ . Les cofacteurs  $A_{1k}$  ne dépendent pas des coefficients  $a_{1k}$ , en particulier si  $a_{11} = 1$  et  $a_{1k} = -1$  :

$$(2) \quad \forall k \quad A_{11} - A_{1k} > 0$$

et remarquant que  $A_{1k} = a_{k1}^{-1} \det A$ :

$$(3) \quad \forall k \quad \bar{a}_{11}^{-1} > a_{k1}^{-1}$$

Le même raisonnement s'étend immédiatement à toutes les autres colonnes de  $A^{-1}$  et se généralise aux matrices non-irréductibles.

**Propriété 3.** La valeur propre de plus petite partie réelle d'une matrice de type  $\mathcal{M}$  est réelle.

La démonstration suivante est extraite de l'ouvrage de Hukukane Nikaido ([8], p. 105). Considérons la matrice  $B(\alpha) = \alpha I - A$ , le nombre réel  $\alpha$  peut être choisi suffisamment grand pour que tous les termes de  $B(\alpha)$  soient positifs. Le théorème de Perron-Frobenius implique alors que la valeur propre de  $B(\alpha)$  de plus grand module (donc de plus grande partie réelle) est réelle. La propriété 3 résulte donc simplement de ce que les parties réelles des valeurs propres de  $B(\alpha)$  et de  $A$  sont rangées dans l'ordre inverse.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BARLOW et F. PROSCHAN, *Mathematical theory of reliability*, Wiley, (1965).
- [2] U. N. BHAT, *Elements of applied stochastic processes*, Wiley, (1972).
- [3] K. L. CHUNG, *Markov chains*, Springer-Verlag, (1960).
- [4] E. FRASER, DUNCAN et COLLAR, *Elementary matrices*, Cambridge U.P., (1947).
- [5] J. KEMENY et L. SNELL, *Finite Markov chains*, Van Nostrand, (1960).
- [6] J. KEMENY, L. SNELL et A. KNAPP, *Denumerable Markov chains*, Van Nostrand, (1966).
- [7] G. KREWERAS, *Graphes, Chaines de Markov*, Dalloz, (1972).
- [8] H. NIKAIKO, *Convex structures and economic theory*, Academic Press, (1968).
- [9] G. PARZEN, *Stochastic processes*, Holden Day, (1962).
- [10] W. SMITH, WILKINSON-EDITORS, *Congestion theory*, North Carolina U.P., (1965).
- [11] R. TEMAM, *Cours d'analyse numérique*, Fac. Sciences Orsay, (1970).

---

(1) Cette démonstration est due à François Lureau.