

J. ABADIE

M. BICHARA

**Résolution numérique de certains problèmes
de commande optimale**

Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle, tome 7, n° V2 (1973), p. 77-105

http://www.numdam.org/item?id=RO_1973__7_2_77_0

© AFCET, 1973, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'automatique, informatique, recherche opérationnelle. Recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

RESOLUTION NUMERIQUE DE CERTAINS PROBLEMES DE COMMANDE OPTIMALE

par J. ABADIE ⁽¹⁾ et M. BICHARA ⁽²⁾

Résumé. — La résolution numérique des problèmes de commande optimale comportant des contraintes de borne sur les variables d'état présente des difficultés. On expose une méthode pour en venir à bout. Des expériences numériques illustrent la méthode. On y trouvera entre autres le modèle à 4 secteurs et 30 périodes de l'économie coréenne.

1. INTRODUCTION

Notre objet est d'exposer, avec quelques expériences numériques à l'appui, une méthode de résolution des problèmes de commande optimale du type suivant :

$$P : \text{Maximiser } \sum_{t=0}^{T-1} \varphi_t(x_t, u_t) + \varphi_T(x_T) \quad (1)$$

sous les contraintes

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t), \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (2)$$

$$\alpha_t \leq u_t \leq \beta_t, \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (3)$$

$$a_t \leq x_t \leq b_t, \quad t = 0, \dots, T, \quad (4)$$

où x_t est un vecteur-colonne de composantes $x_{i,t}$, $i \in \mathcal{I}$; u_t un vecteur-colonne de composantes $u_{j,t}$, $j \in \mathcal{J}$; où (3) et (4) signifient respectivement

$$\alpha_{j,t} \leq u_{j,t} \leq \beta_{j,t}, \quad j \in \mathcal{J} \quad \text{et} \quad a_{i,t} \leq x_{i,t} \leq b_{i,t}, \quad i \in \mathcal{I},$$

où (2) signifie $x_{i,t+1} = f_{i,t}(x_t, u_t)$, $i \in \mathcal{I}$; où enfin les fonctions $\varphi_t, f_{i,t}$ sont continûment différentiables relativement à leurs arguments x_t, u_t , dans un ouvert

(1) Électricité de France.

(2) Compagnie de Prospection Géophysique Française.

contenant le domaine défini par (3), (4). L'ensemble de variation des indices sera souvent omis dans la suite, lorsqu'il résulte à l'évidence du contexte.

u_t est appelée variable de commande, x_t variable d'état. La difficulté du problème P est due à la présence des contraintes (4) sur les variables d'état.

Nous appliquerons essentiellement un algorithme qui a déjà été publié antérieurement (Abadie, 1970-I) avec cependant une modification qui permet de résoudre certains problèmes particuliers qui étaient laissés de côté dans l'algorithme général.

Bien entendu, on peut appliquer à la résolution du problème P une des méthodes générales de la Programmation Mathématique. Cela a été fait depuis longtemps (Zadeh et Whalen, 1962; Dantzig, 1967; Rosen, 1967). Le lecteur trouvera une foule d'exemples dans le livre de Tabak et Kuo (1971). Ce que nous montrons ici est un exemple d'adaptation particulière d'une méthode générale, à savoir celle du « gradient réduit généralisé » (voir en particulier Abadie et Carpentier, 1969). Des adaptations différentes de cette même méthode ont déjà été exposées par Mehra et Davis (1971).

2. UN PROBLEME SIMPLE

2.1 Considérons le problème suivant, que nous appellerons *problème simple* :

$$PS : \text{Maximiser } \sum_{t=0}^{T-1} \varphi_t(x_t, u_t) + \varphi_T(x_T) \quad (1)$$

sous les contraintes

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t), \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (2)$$

$$\alpha_t \leq u_t \leq \beta_t, \quad t = 0, \dots, T-1 \quad (3)$$

$$x_0 \text{ fixé,}$$

les contraintes (4) ne jouant ainsi aucun rôle, et x_0 n'étant plus une variable.

Définissons les vecteurs

$$x = (x_t)_{t=1, \dots, T}, \quad u = (u_t)_{t=0, \dots, T-1}.$$

Les formules (2) permettent de calculer, par substitutions successives, pour $t = 0, \dots, T-1$ (*dans cet ordre*), x , connaissant x_0 (fixé) et u . Nous appellerons FORW (x_0, u) la procédure permettant ainsi de calculer x à partir de x_0, u .

2.2 Les conditions du premier ordre pour que x, u soit solution de PS s'écrivent en utilisant le Théorème de Kuhn et Tucker (1951). On fait correspondre à chaque contrainte (2) une variable $\psi^{i,t}$, et à chaque contrainte (3)

une variable $\chi^{j,t}$. Nous faisons des $\psi^{i,t}$, $i \in \mathcal{I}$ un vecteur-ligne ψ^t , et des $\chi^{j,t}$, $j \in \mathcal{J}$, un vecteur-ligne χ^t . Désignons, pour t fixé, par $\frac{\partial \varphi}{\partial x_t}$ vecteur-ligne de composantes $\frac{\partial \varphi}{\partial x_{i,t}}$, $i \in \mathcal{I}$, par $\frac{\partial f_t}{\partial x_t}$ la matrice d'éléments $\frac{\partial f_{k,t}}{\partial x_{i,t}}$, où $k \in \mathcal{I}$ est un indice de ligne, et $i \in \mathcal{I}$ un indice de colonne; par $\frac{\partial f_t}{\partial u_t}$ la matrice d'éléments $\frac{\partial f_{k,t}}{\partial u_{j,t}}$, où $k \in \mathcal{I}$ est un indice de ligne et $j \in \mathcal{J}$ un indice de colonne; enfin $\frac{d\varphi_T}{dx_T}$ désigne le vecteur-ligne de composantes $\frac{\partial \varphi_T}{\partial x_{i,T}}$, $i \in \mathcal{I}$. L'ensemble des ψ^t , $t = 0, \dots, T-1$ forme un vecteur ψ , et l'ensemble des χ^t , $t = 0, \dots, T-1$ un vecteur χ . Nous utiliserons souvent des notations de ce genre sans toujours astreindre le lecteur à leur rappel.

Avec ces notations, on a tout d'abord les relations

$$\psi^{t-1} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_t} + \psi^t \frac{\partial f_t}{\partial x_t}, \quad t = 1, \dots, T-1 \quad (5)$$

$$\psi^{T-1} = \frac{d\varphi_T}{dx_T} \quad (6)$$

$$\chi^t = \frac{\partial \varphi_t}{\partial u_t} + \psi^t \frac{\partial f_t}{\partial u_t}, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (7)$$

On voit que (5), (6) définissent, par substitutions successives, ψ^t pour $t = T-1, \dots, 1$ (dans cet ordre), connaissant x, u . Nous appellerons BACKW (x, u) la procédure permettant ainsi de calculer ψ à partir de x, u .

Le vecteur χ , explicitement déterminé par (7), sera appelé le *gradient* : il est effectivement le gradient de la fonction (1) par rapport à la seule variable u qui subsisterait si l'on effectuait la substitution $x = \text{FORW}(x_0, u)$.

Nous aurons besoin de deux opérateurs de projection. Soient λ, μ, ν, ρ , quatre nombres réels avec $\mu \leq \rho \leq \nu$. Posons :

$$\text{PROJ} [\lambda/(\mu, \nu)] = \begin{cases} \mu & \text{si } \lambda < \mu \\ \nu & \text{si } \lambda > \nu \\ \lambda & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{PRO} [\lambda/(\mu, \nu)/\rho] = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda < 0 \text{ et } \rho = \mu \\ 0 & \text{si } \lambda > 0 \text{ et } \rho = \nu \\ \lambda & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons le *gradient projeté* q par la formule :

$$q^{j,t} = \text{PRO} [\chi^{j,t}/(\alpha_{j,t}, \beta_{j,t})/u_{j,t}], \quad (8)$$

Les conditions nécessaires du premier ordre pour que x, u soit solution du problème PS s'écrivent :

$$q = 0. \quad (9)$$

Nous dirons qu'un point (x, u) vérifiant (2), (3) est *stationnaire* pour le problème PS s'il vérifie aussi (9), et qu'il est *presque-stationnaire* si (9) est, en un certain sens, presque vérifiée.

2.3 Si le point x, u , vérifiant les contraintes (2), (3) du problème PS , n'est pas stationnaire, nous définissons une *direction améliorante* v par les formules :

$$v_{j,t} = \sigma_{j,t} q^{j,t}, \quad (10)$$

où les $\sigma_{j,t}$ sont des nombres positifs (ou même nuls pour certains d'entre eux, la seule limitation étant que v soit non-nul). Définissons, pour tout nombre $\theta > 0$, les vecteurs u^θ, x^θ par les formules :

$$u_{j,t}^\theta = \text{PROJ} [u_{j,t} + \theta v_{j,t}/(\alpha_{j,t}, \beta_{j,t})] \quad (11)$$

$$x^\theta = \text{FORW} (x_0, u^\theta). \quad (12)$$

le point x^θ, u^θ vérifie les contraintes (2), (3) du problème PS ; de plus, il existe $\bar{\theta} > 0$ tel que :

$$0 < \theta < \bar{\theta} \Rightarrow \varphi(x^\theta, u^\theta) > \varphi(x, u). \quad (13)$$

On peut calculer, ne serait-ce que par tâtonnements sur θ , et en utilisant autant de fois que nécessaire les formules (11), (12), une valeur de θ pour laquelle x^θ, u^θ vérifie (2), (3) et (13). Un tel point x^θ, u^θ sera dit *meilleur* que x, u .

2.4 Nous pouvons maintenant décrire la classe d'algorithmes que nous avons en vue.

Algorithme AS (problème PS)

0. Soit donnés u vérifiant (3), et x_0 . Calculer $x = \text{FORW} (x_0, u)$.
1. Calculer $\psi = \text{BACKW} (x, u)$, le gradient χ et le gradient projeté q .
2. Si le point x, u est presque stationnaire, FIN.
3. Calculer une direction améliorante v , et la modifier si on le désire.
4. Trouver, en ajustant θ , un nouveau point x^θ, u^θ meilleur que le point donné x, u .
5. Aller en 1 pour une nouvelle itération, le nouveau point remplaçant l'ancien.

A l'étape 1, le calcul de ψ , du gradient, et du gradient projeté, se fait par les formules (5), (6), (7), (8). A l'étape 3, le calcul de la direction améliorante se fait par la formule (10); la modification à laquelle il est fait allusion consiste essentiellement à introduire, si on le désire, la méthode des directions conjuguées de Fletcher et Reeves (1964) : celle-ci n'est pas gênée par les facteurs positifs $\sigma_{j,t}$ dans (10), qui reviennent à effectuer un changement d'unités sur les axes. A l'étape 4, l'ajustement de θ se fait avec plus ou moins de finesse, suivant l'expérience acquise dans la résolution d'une classe donnée de problèmes. Chaque essai d'une valeur de θ exige le calcul de u^θ, x^θ par (11), (12).

L'algorithme *AS* s'étend facilement au cas d'un problème analogue à *PS*, mais où x_0 ne serait pas fixé : il suffirait de traiter x_0 comme nous l'avons fait pour les variables de commande u_t .

3. ALGORITHME POUR LE PROBLEME P

3.1 Considérons maintenant le problème *P* lui-même. Supposons que nous connaissions une solution x, u des contraintes (2), (3), (4), vérifiant

$$a_{i,t} < x_{i,t} < b_{i,t}, \quad \forall i, \quad \forall t \neq 0. \quad (14)$$

on peut alors appliquer l'algorithme *AS* ci-dessus, pourvu naturellement que θ reste, dans l'étape 4, assez petit pour que x^θ vérifie (14).

Supposons maintenant que (14) ne soit pas vérifié, c'est-à-dire que, pour certains (i, t) , il y ait *égalité* de $x_{i,t}$ à une de ses bornes $a_{i,t}, b_{i,t}$.

Soit $\mathcal{J}_t$ l'ensemble des indices $i \in \mathcal{J}$ qui, pour t fixé, vérifient (14), et $\mathcal{J}'_t$ le complémentaire de $\mathcal{J}_t$ relativement à $\mathcal{J}$. Pour chaque $i' \in \mathcal{J}'_t$, considérons une variable $u_{j,t-1}$ telle que les deux hypothèses suivantes soient satisfaites :

$$H1. \quad \alpha_{j,t-1} < u_{j,t-1} < \beta_{j,t-1}$$

H2. On remplace dans la matrice unité $\mathcal{J} \times \mathcal{J}$ chaque colonne d'indice $i \in \mathcal{J}'_t$ par la colonne $-\frac{\partial f_{i,t}}{\partial u_{j,t-1}}$, où $i \in \mathcal{J}$ est l'indice de ligne, tandis que j remplace i comme indice de colonne; soit $\mathcal{J}_{t-1}$ l'ensemble des indices j ainsi obtenus : la propriété retenue est que la matrice $\frac{\partial f_{i,t}}{\partial u_{j,t-1}}, i \in \mathcal{J}'_t, j \in \mathcal{J}_{t-1}$, soit inversible.

Le lecteur trouvera peut-être utile d'éclairer l'hypothèse contenue dans les deux règles ci-dessus (hypothèse que nous appellerons dans la suite *hypothèse H*) à l'aide des figures 1, 2, 3. La figure 1 représente le jacobien du système (2), en posant

$$H_t = -\frac{\partial f_t}{\partial x_t}, \quad K_t = -\frac{\partial f_t}{\partial u_t},$$

les sous-matrices en dehors de H_t, K_t et des sous-matrices unités étant nulles.

La figure 2 représente la sous-matrice inversible extraite du jacobien lorsqu'on considère les colonnes correspondant aux variables x_t , $t = 1, \dots, T$; c'est la matrice implicitement considérée dans l'algorithme AS , pour le calcul de ψ par la procédure BACK (x, u). La figure 3 montre ce que peut être la matrice obtenue, à partir de la matrice en figure 2, par les substitutions de colonnes

x_0	u_0	x_1	u_1	x_2	u_2	x_3		x_{T-1}	u_{T-1}	x_T
H_0	K_0	I								
		H_1	K_1	I						
				H_2	K_2	I				
								H_{T-1}	K_{T-1}	I

Figure 1

I					
H_1	I				
	H_2	I			
				I	
				H_{T-1}	I

Figure 2

1					
1	1				
	1	1			
		1	1		
			1	1	
				1	1

Figure 3

 Sous-matrices de K_t
 Sous-matrices de H_t

correspondant aux deux règles énoncées; les éléments en dehors des 1 et des zones hachurées sont nuls; l'hypothèse H correspond à dire qu'il existe une suite de substitutions de colonnes telles que les sous-matrices diagonales sont inversibles (ce qui rend inversible la matrice toute entière). Il est clair que la résolution d'un système linéaire ayant pour matrice celle de la figure 3 (ou sa transposée) ne fait intervenir en fait que les inverses des sous-matrices figurant dans la diagonale.

En comptant le nombre des égalités à vérifier pour n'être pas satisfaite, le lecteur pourra voir que l'hypothèse H correspond au cas général (ce qui n'empêche pas le cas particulier contraire de se présenter parfois).

3.2 Les conditions de stationnarité pour le problème P s'obtiennent à partir du théorème de Kuhn et Tucker. Nous reprenons toutes les variables et notations qui précèdent en supposant encore que le point donné (x, u) vérifie (2), (3), (4). Faisons en outre correspondre aux contraintes (4) des vecteurs lignes ω^t , de composantes $\omega^{i,t}$, $i \in \mathcal{I}$. On obtient ainsi tout d'abord les relations :

$$\omega^t = -\psi^{t-1} + \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_t} + \psi^t \frac{\partial f_t}{\partial x_t}, \quad t = 1, \dots, T-1 \quad (15)$$

$$\omega^T = -\psi^{T-1} + \frac{d\varphi_T}{dx_T} \quad (16)$$

$$\chi^t = \frac{\partial \varphi_t}{\partial u_t} + \psi^t \frac{\partial f_t}{\partial u_t}, \quad t = 0, \dots, T-1. \quad (17)$$

Nous posons :

$$\omega^{i,t} = 0 \quad \text{si} \quad i \in \mathcal{I}_t \quad (18)$$

$$\chi^{j,t} = 0 \quad \text{si} \quad j \in \mathcal{J}_t. \quad (19)$$

Les relations

$$\psi^{i,T-1} = \frac{\partial \varphi_T}{\partial x_{i,T}}, \quad i \in \mathcal{I}_T \quad (20)$$

$$\frac{\partial \varphi_{T-1}}{\partial u_{j,T-1}} + \psi^{T-1} \frac{\partial f_{T-1}}{\partial u_{j,T-1}} = 0, \quad j \in \mathcal{J}_{T-1} \quad (21)$$

définissent ψ^{T-1} , puis les relations

$$\psi^{i,t-1} = \frac{\partial \varphi_t}{\partial x_{i,t}} + \psi^t \frac{\partial f_t}{\partial x_{i,t}}, \quad i \in \mathcal{I}_t \quad (22)$$

$$\frac{\partial \varphi_{t-1}}{\partial u_{j,t-1}} + \psi^{t-1} \frac{\partial f_{t-1}}{\partial u_{j,t-1}} = 0, \quad j \in \mathcal{J}_{t-1} \quad (23)$$

définissent, pour $t = T-1, \dots, 1$ (dans cet ordre) les vecteurs $\psi^{T-2}, \dots, \psi^0$, par une suite de résolutions de systèmes linéaires. Appelons cette procédure $\psi = \text{BACKW}(x, u)$.

Désignons par $\mathcal{J}'_t$ le complémentaire de $\mathcal{J}_t$ par rapport à $\mathcal{J}$. On calcule les vecteurs de composantes $\omega^{i,t}$, $i \in \mathcal{I}'_t$; $\chi^{j,t}$, $j \in \mathcal{J}'_t$, par les formules explicites (15), (16), (17) correspondant à ces indices.

Les variables $x_{i,t}$, $i \in \mathcal{I}'_t$; $u_{j,t}$, $j \in \mathcal{J}'_t$ seront appelées *variables indépendantes*. Ces variables forment, lorsque t prend toutes les valeurs possibles, des vecteurs que nous notons x_N , u_N . Les autres variables ($i \in \mathcal{I}_t$, $j \in \mathcal{J}_t$) seront appelées *variables basiques*, et forment des vecteurs notés x_B , u_B . Les $\omega^{i,t}$, $i \in \mathcal{I}'_t$; $\chi^{j,t}$,

$j \in \mathcal{J}'_t$ définis ci-dessus forment de même des vecteurs notés $\omega^{\mathcal{N}}$, $\chi^{\mathcal{N}}$, et que nous appelons *gradient*. Définissons le *gradient projeté* $p^{\mathcal{N}}$, $q^{\mathcal{N}}$ par les formules :

$$\forall t, \forall i \in \mathcal{J}'_t, p^{i,t} = \text{PRO} [\omega^{i,t} / (a_{i,t}, b_{i,t}) / x_{i,t}] \quad (24)$$

$$\forall t, \forall j \in \mathcal{J}'_t, q^{j,t} = \text{PRO} (\chi^{j,t} / (\alpha_{j,t}, \beta_{j,t}) / u_{j,t}). \quad (25)$$

Les conditions de stationnarité pour le problème P s'écrivent alors :

$$p^{\mathcal{N}} = 0 \quad (26)$$

$$q^{\mathcal{N}} = 0. \quad (27)$$

3.3 Supposons que le gradient projeté ne soit pas nul. On définit une *direction améliorante* $y_{\mathcal{N}}$, $v_{\mathcal{N}}$ par les formules

$$\forall t, \forall i \in \mathcal{J}'_t, y_{i,t} = \rho_{i,t} p^{i,t} \quad (28)$$

$$\forall t, \forall j \in \mathcal{J}'_t, v_{j,t} = \sigma_{j,t} q^{j,t}, \quad (29)$$

où $\rho_{i,t}$, $\sigma_{j,t}$ sont des nombres positifs (certains peuvent être nuls, pourvu cependant que la direction améliorante ne soit pas nulle).

Pour tout nombre $\theta > 0$, définissons les vecteurs $u^{\theta}_{\mathcal{N}}$, $x^{\theta}_{\mathcal{N}}$ (nouvelles variables indépendantes) par les formules :

$$\forall t, \forall i \in \mathcal{J}'_t, x^{i,t}_{i,t} = \text{PROJ} [x_{i,t} + \theta y_{i,t} / (a_{i,t}, b_{i,t})] \quad (30)$$

$$\forall t, \forall j \in \mathcal{J}'_t, u_{j,t} = \text{PROJ} [u_{j,t} + \theta v_{j,t} / (\alpha_{j,t}, \beta_{j,t})]. \quad (31)$$

Une fois θ choisi, on calcule les variables basiques $x^{i,t}_{i,t}$, $i \in \mathcal{J}_t$; $u^{j,t}_{j,t}$, $j \in \mathcal{J}_t$, en résolvant *par rapport à elles* chacun des systèmes suivants, où les variables indépendantes ont les valeurs (30), (31) :

$$-x_{i+1} + f_i(x_t, u_t) = 0, \quad (32)$$

successivement pour $t = 0, \dots, T-1$ (*dans cet ordre*). Cette résolution se fait, pour chaque t séparément, par la méthode de Newton, ou une de ses modifications, en prenant pour point initial des itérations le point donné $x_{i,t}$, $i \in \mathcal{J}_t$; $u_{j,t}$, $j \in \mathcal{J}_t$. Le lecteur constatera que la méthode de Newton fait intervenir les sous-matrices figurant dans la diagonale de la matrice de la figure 3.

Si une des composantes basiques était amenée à sortir de ses bornes (2) ou (3) dans le cours des itérations de Newton, on la remplacerait par sa projection sur son intervalle, puis on l'échangerait, dans la liste des variables basiques, avec une variable indépendante n'ayant pas cet inconvénient (opération appelée *changement de base*). Naturellement, les matrices diagonales de la figure 3 doivent être inversibles après les changements de base, tout comme

elles l'étaient avant. Dans ce qui suit, on considérera les changements de base comme faisant partie intégrante de la méthode de Newton.

En cas de non-réussite de la méthode de Newton, on réduit θ (remplacement de θ par $\theta/2$ par exemple), et l'on recommence.

En désignant par (x_N^0, u_N^0) l'ensemble des composantes indépendantes et par (x_B^0, u_B^0) l'ensemble des composantes basiques, appelons FORW (x_N^0, u_N^0) la procédure décrite ci-dessus pour le calcul de (x_B^0, u_B^0) . On remarquera que, ni les indices basiques, ni θ , ne sont nécessairement les mêmes à la sortie et à l'entrée de la procédure, à cause des changements de base et des réductions de θ .

3.4 Nous sommes maintenant en mesure de décrire la classe d'algorithmes proposée pour la résolution du problème P :

Algorithme A (problème P)

0. Soit donné (x, u) vérifiant les contraintes (2), (3), (4).

1. Calculer ψ par la procédure BACKW (x, u) . Ici, on calcule en même temps la suite des indices de base $\mathcal{J}_t, \mathcal{J}_t, \forall t$. On calcule aussi le gradient et le gradient projeté.

2. Si le point (x, u) est presque stationnaire, FIN.

3. Calculer une direction améliorante (y_N, v_N) , et la modifier si on le désire.

4. Trouver, en ajustant θ , et en utilisant autant de fois que nécessaire la procédure FORW (x_N^0, u_N^0) , un nouveau point (x^0, u^0) meilleur que (x, u) .

5. Aller en 1 pour une nouvelle itération avec le nouveau point.

3.5 On peut se demander comment avoir un premier point (x, u) vérifiant (2), (3), (4). Cette question est assez difficile. Nous n'indiquerons qu'un procédé, parmi d'autres. Supposons que l'on ait (x, u) satisfaisant à (2), (3), mais pas à (4). Soit S la plus petite valeur de t pour laquelle (4) ne soit pas vérifiée. Soit $\mathcal{J}^+$ l'ensemble des indices $i \in \mathcal{J}$ tels que $x_{i,s} > b_{i,s}$, $\mathcal{J}^-$ l'ensemble pour lequel $x_{i,s} < a_{i,s}$. On résoud

$$\text{minimiser } \sum_{i \in \mathcal{J}^+} x_{i,s} - \sum_{i \in \mathcal{J}^-} x_{i,s}$$

sous les contraintes

$$x_{t+1} = f_t(x_t, u_t), \quad t = 0, \dots, S-1$$

$$\alpha_t \leq u_t \leq \beta_t, \quad t = 0, \dots, S-1$$

$$a_t \leq x_t \leq b_t, \quad t = 0, \dots, S-1$$

$$a_{i,s} \leq x_{i,s} \leq +\infty, \quad i \in \mathcal{J}^+$$

$$-\infty \leq x_{i,s} \leq b_{i,s}, \quad i \in \mathcal{J}^-$$

$$a_{i,s} \leq x_{i,s} \leq b_{i,s}, \quad i \notin \mathcal{J}^+ \cup \mathcal{J}^-.$$

Le procédé indiqué correspond à chercher une trajectoire (x, u) vérifiant des conditions finales au temps S , puis à augmenter S . Tout procédé permettant de trouver une trajectoire vérifiant des conditions finales au temps S convient, en particulier les méthodes de *minimisation d'écart quadratique*. Par opposition, la méthode précédente sera appelée *minimisation d'écart linéaire*. On peut remarquer qu'il suffit de trouver un point réalisant à peu près les contraintes. La méthode de Newton permet alors d'en déduire rapidement un point vérifiant les contraintes. C'est ainsi qu'il est bon de modifier l'algorithme A en ajoutant à l'étape 0, un appel à la méthode de Newton, avec construction simultanée de l'ensemble des indices de base.

3.6 Une deuxième difficulté surgit lorsqu'on se penche sur l'hypothèse H . Nous discuterons ce point au cours de l'exemple numérique (§ 4). Voici cependant quelques indications générales.

Supposons que dans l'équation

$$x_{i,t+1} = f_{i,t}(x_t, u_t) \quad (33)$$

la variable $x_{i,t+1}$ soit à une de ses bornes. Nous devons la remplacer dans la base par une des variables $u_{j,t}$ vérifiant l'hypothèse H . Il peut arriver, dans des cas particuliers, que nous puissions trouver une variable $u_{j,t}$ vérifiant $H2$ et non $H1$, tandis qu'aucune de ces variables ne vérifient $H1$ et $H2$ simultanément (§ 3.1). Le procédé proposé ici se comprendra facilement sur l'exemple suivant : supposons que les variables x_t, u_t soient unidimensionnelles, que les équations d'évolution (2) soient

$$x_{t+1} = x_t + u_t, \quad \forall t,$$

et que (3), (4) se réduisent à

$$x_0 = a_0 (= b_0)$$

$$x_T = a_T (= b_T)$$

$$u_t \geq 0, \quad \forall t.$$

Si l'on suppose que, pour la solution particulière examinée $\bar{x}, \bar{u}$, l'on ait

$$\bar{u}_{T-1} = 0,$$

alors pour l'équation

$$x_T = x_{T-1} + u_{T-1},$$

l'hypothèse $H2$ est vérifiée, tandis que $H1$ ne l'est pas. On introduit la contrainte $x_{T-1} \leq a_T$ et l'on supprime $u_T \geq 0$. Cette fois-ci, les hypothèses $H1$ et $H2$ sont toutes deux vérifiées. Si l'on avait en outre $\bar{u}_{T-2} = 0$, on introduirait de même $x_{T-2} \leq a_T$, et l'on supprimerait $u_{T-2} \geq 0$, et ainsi de suite jusqu'à ce que, pour un certain entier p , l'on ait $\bar{u}_{T-p} > 0$. Il est clair que maintenant, les hypothèses $H1$ et $H2$ sont toutes deux vérifiées pour toute valeur de t (tandis que le nouveau problème est équivalent à l'ancien).

Ces considérations se généralisent quelque peu, mais pas assez cependant pour couvrir tous les cas possibles. Il paraît alors nécessaire (et cela devrait être suffisant) d'y ajouter une des méthodes exposées par Abadie (1970-II). Remarquons immédiatement que le procédé proposé est cependant suffisamment général pour avoir permis la résolution des problèmes qui suivent.

3.7 La difficulté signalée au paragraphe 3.6 disparaît si l'on applique au problème P une des méthodes générales de résolution des programmes mathématiques. Cette méthode devrait être programmée de façon à tirer partie le mieux possible de la structure spéciale du Jacobien des équations d'état (Abadie, 1970-II; Mehra et Davis, 1971).

4. LE PROBLEME DE KENDRICK ET TAYLOR

4.1 Kendrick et Taylor (1969, 1970) ont exposé un modèle dynamique de planification économique. Ils en ont fait une étude numérique en utilisant les données de la Corée du Sud. Il s'agit d'un modèle sur 30 périodes d'une année, et où l'activité économique est répartie en 4 secteurs. Nous donnons d'abord le modèle mathématique, avec la signification des variables, priant le lecteur de se reporter aux publications de ces Auteurs pour toute discussion de nature économique. Nous donnons aussi les valeurs que nous avons effectivement utilisées pour les données, de façon que ce problème puisse, le cas échéant, servir de problème de référence pour d'autres études.

Les équations (I) seront appelées *équations d'état*, les équations (II), (III) *équations intermédiaires*, les conditions (IV) *spécifications supplémentaires*. Toutes les quantités sont des nombres réels, sauf c_t , q_t , δ_t , e_t , m_t qui sont des vecteurs-colonne à quatre dimensions, et sauf P , B qui sont des matrices carrées d'ordre 4.

L'indice t prend les valeurs entières de 1 à N ($N = 30$ pour l'exemple numérique), et l'indice j prend les valeurs 1, 2, 3, 4.

$$\left\{ \begin{array}{l} \xi_{t+1} = \xi_t + (1+z)^{-t} \left(\sum_{j=1}^4 a_j c_{j,t}^{b_j} \right) \end{array} \right. \quad (1)$$

$$(I) \left\{ \begin{array}{l} k_{j,t+1} = k_{j,t} + \mu_j k_{j,t} \left[1 - \left(1 + \frac{\varepsilon}{\mu_j} \frac{\delta_{j,t}}{k_{j,t}} \right)^{-\frac{1}{\varepsilon}} \right] \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{t+1} = (1+\theta)\gamma_t + \sum_{j=1}^4 (d_{j,j} q_{j,t} - e_{j,t} + \pi_j \delta_{j,t} + m_{j,t}) \end{array} \right. \quad (3)$$

$$(II) \left\{ \begin{array}{l} q_{j,t} = \tau_j (1 + \nu_j)^t (\beta_j k_{j,t}^{-\rho_j} + (1 - \beta_j) l_{j,t}^{-\rho_j})^{-\frac{1}{\rho_j}} \end{array} \right. \quad (1)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} c_t = P q_t - B \delta_t - e_t + m_t \end{array} \right. \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
 \text{(III)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \sum_{j=1}^4 l_{j,t} &= l_t^* = l_0(1 + \alpha)^{t-1} \\ m_{1,t} &= m_{4,t} = 0 \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} (1) \\ (2) \end{aligned} \\
 \text{(IV)} \quad & \left\{ \begin{aligned} c_{j,t} &> 0, \delta_{j,t} \geq 0, m_{2,t} \geq 0, m_{3,t} \geq 0 \\ 0 &\leq l_{j,t} \leq l_{j,t}^* \\ \xi_1, \gamma_1, l_{j,1} k_{j,1} &\text{donnés} \\ \gamma_{N+1} &= \gamma_{N+1}^* \text{donné} \\ k_{j,N+1} &= k_{j,N+1}^* \text{donné.} \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} (1) \\ (2) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Des substitutions successives permettent de mettre le problème sous la forme définitive suivante, où k_t, δ_t, m_t sont des vecteurs à quatre dimensions, et l_t le vecteur à trois dimensions de composantes $l_{2,t}, l_{3,t}, l_{4,t}$:

$$P1 : \text{Maximiser } \xi_{N+1}$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned}
 \text{(V)} \quad & \left\{ \begin{aligned} \xi_{t+1} &= f_{0,t}(\xi_t, k_t, \delta_t, l_t, m_t) \\ k_{j,t+1} &= f_{j,t}(k_t, \delta_t), j = 1, 2, 3, 4 \\ \gamma_{t+1} &= f_{5,t}(\gamma_t, k_t, \delta_t, l_t, m_t) \\ &\text{et les contraintes supplémentaires (IV)} \end{aligned} \right. \quad \begin{aligned} (1) \\ (3) \\ (4) \\ (5) \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Le problème possède 9 variables de commande :

$\delta_{j,t}$: investissement, année t , secteur $j = 1, 2, 3, 4$;

$l_{i,t}$: main d'œuvre, année t , secteur $i = 2, 3, 4$;

$m_{2,t}, m_{1,t}$: importation, année t , secteurs 2, 3.

Il possède 6 variables d'état :

$k_{j,t}$: capital, année t , secteur j ;

γ_t : dette extérieure;

ξ_t : fonction de bien-être.

Les autres variables figurant comme intermédiaires dans (II) sont au nombre de 8 :

$q_{j,t}$: output, année t , secteur j ;

$c_{j,t}$: consommation, année t , secteur j .

Le problème, considéré dans sa totalité, est un problème d'optimisation à 690 variables (30×23) et 450 contraintes (30×15), auxquelles, il faut

ajouter les contraintes supplémentaires (IV). Le fait de considérer $q_{j,t}$ et $c_{j,t}$ comme des variables intermédiaires revient à dire que ces 8 variables appartiennent toujours à la base. Le problème réduit, après substitutions effectives, comprendrait encore 450 variables et 210 contraintes.

Toutes les quantités non décrites jusqu'à présent et figurant cependant dans le modèle sont des données. Signalons que $e_{j,t}$ est l'exportation relative au secteur j , en l'année t . La relation (II.2) est obtenue à partir de l'équation de distribution

$$q_t + Dq_t + m_t = Aq_t + B\delta_t + e_t + c_t,$$

où D est la matrice (diagonale ici) des propensions marginales à importer pour produire, A la matrice d'input-output, et B la matrice des coefficients de capital.

Le lecteur est prié de se référer à Kendrick et Taylor (1969), et plus généralement à Adelman (1969). Il trouvera cependant en Annexe les données que nous avons utilisées, qui nous paraissent aussi proches que possible de celles de Kendrick et Taylor. La relation (IV.2) ne figure pas dans le modèle original : il nous avait apparu cependant que quelque contrainte de ce type doive être ajoutée, si l'on veut éviter de trop fortes discontinuités dans l'évolution de la main-d'œuvre (voir plus loin).

La condition $c_{j,t} > 0$ n'intervient qu'en cours de calcul, lorsque l'on applique l'étape 4 de l'algorithme A . Cette étape a été modifiée ici de la façon suivante : si, pour une valeur de θ , un $c_{j,t}^0$ est négatif, on divise θ par 2 (procéder de même pour les autres variables $l_{1,t}$, $q_{j,t}$ ne figurant pas dans (V)).

4.2 L'hypothèse H du § 3.1 n'est pas vérifiée. En effet, pour la solution optimale, les investissements $\delta_{3,N+1}$, $\delta_{4,N+1}$ au temps final dans les secteurs 3, 4 sont à leur borne inférieure 0. Cela entraîne dans les équations (I.2) au temps final (c'est-à-dire pour $t = N$), qu'aucune variable de commande ne peut remplacer la variable $k_{j,N+1}$ fixée, $j = 3, 4$.

La difficulté est résolue de la façon suivante : on introduit la contrainte supplémentaire du type suivant, où $j = 1, 2, 3, 4$, et $t = 1, \dots, N$:

$$(VI) \quad k_{j,t} \leq k_{j,N+1}^*.$$

Compte tenu de ce que $k_{j,t}$ est croissant relativement à l'indice t , pour j fixé, on voit que cette modification ne change pas le problème. Elle a le mérite d'assurer $\delta_{j,t} \geq 0$ dans (I.2).

Les problèmes résolus en fin de compte sont les problèmes obtenus en adjoignant les contraintes de borne (VI) aux contraintes données antérieurement (voir 4.4 ci-dessous).

Ajoutons pour information que, dans la résolution des systèmes par la méthode de Newton, nous demandons que les équations (I) soient vérifiées avec une tolérance de 10^{-6} .

4.3 Pour avoir un premier point vérifiant l'ensemble des contraintes, nous avons commencé par une minimisation d'écart quadratique comme suit :

$$\text{minimiser } (\gamma_{N+1} - \gamma_{N+1}^*)^2 + \sum_{j=1}^4 (k_{j,N+1} - k_{j,N+1}^*)^2$$

sous les contraintes de $P1$, à l'exception des données finales γ_{N+1} , $k_{j,N+1}$ en (IV.4) et (IV.5). Le problème ainsi obtenu est un problème du type PS (§ 2.1), pour lequel il est facile d'avoir un point de départ réalisant les contraintes. La minimisation est conduite jusqu'à ce que l'écart quadratique s'abaisse à 0.03, puis on achève par la méthode de Newton pour assurer exactement les contraintes finales $\gamma_{N+1} = \gamma_{N+1}^*$, $\delta_{j,N+1} = \delta_{j,N+1}^*$.

4.4 Nous avons résolu deux modèles. L'un, que nous appellerons *Modèle 1*, est en principe identique à celui de Kendrick et Taylor. Il correspond aux modifications ou spécifications suivantes de (IV) :

$\delta_{j,t} \geq 0$ est omis;

on introduit $k_{j,t} \leq k_{j,N+1}^*$;

les contraintes $l_{j,t} \leq l_{j,t}^*$ sont inactives.

L'allure des solutions est donnée par les figures 4 à 7, qui ont été réalisées automatiquement à partir des résultats numériques par une machine Benson.

L'œil discerne une remarquable continuité des solutions, *sauf en ce qui concerne la main-d'œuvre*. Ce fait, tout à fait naturel mathématiquement parlant, est dû à ce que le niveau initial de la main-d'œuvre est imposé, alors que le modèle considère cette main-d'œuvre comme une variable de commande. On voit, à la première année, un transfert important de main-d'œuvre du secteur 1 vers les autres : ce transfert de un million deux cent mille travailleurs ne paraît pas admissible.

Dans notre *Modèle 2*, nous avons simplement ajusté les $l_{j,t}^*$, $j = 2, 3, 4$, suivant une loi soit linéaire, soit exponentielle dans le temps, de façon à étaler ce transfert sur une période plus longue, cinq ans ici. Nous ne donnons pas les figures correspondantes, pour ne pas trop allonger cette publication (voir notre rapport mentionné ci-dessus).

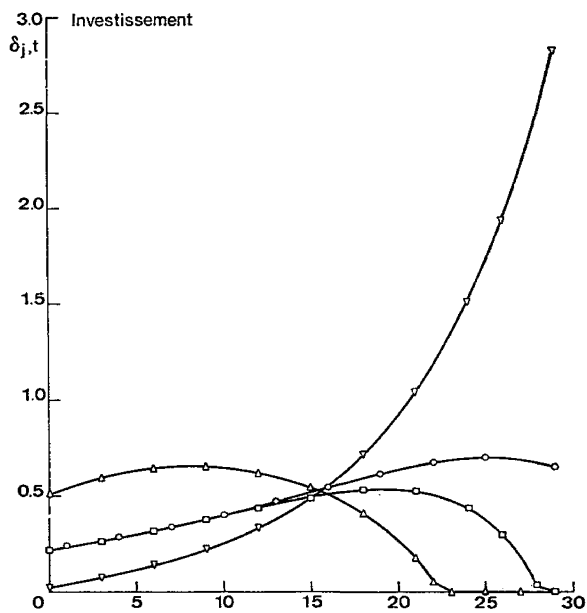
La valeur maximale du critère économique est :

47.10577 pour le Modèle 1

47.06280 pour le Modèle 2.

On voit que l'étalement sur cinq ans du transfert de main-d'œuvre ne diminue la valeur maximale du critère que de un pour mille.

D'une façon générale, ces modèles présentent ce qu'il est convenu d'appeler des « optimums plats ». Pour le modèle 1, par exemple, on atteint 1 % de



Problème de Kendrick et Taylor

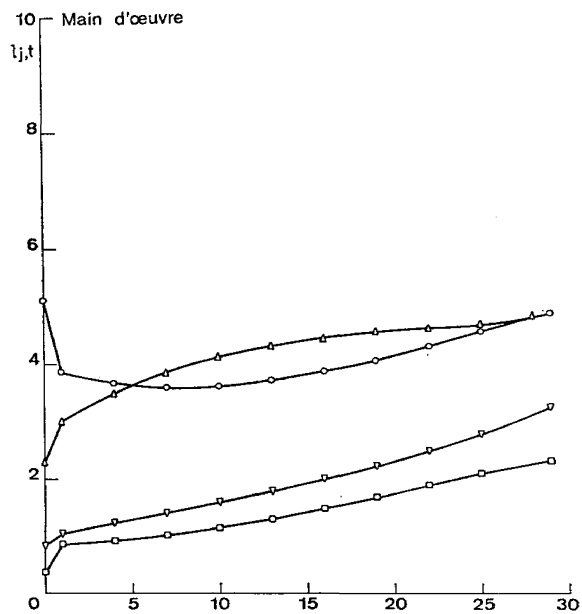
Secteur 1 ○

Secteur 3 □

Secteur 2 ▽

Secteur 4 △

Figure 4



Problème de Kendrick et Taylor

Secteur 1 ○

Secteur 3 △

Secteur 2 ▽

Secteur 4 □

Figure 5

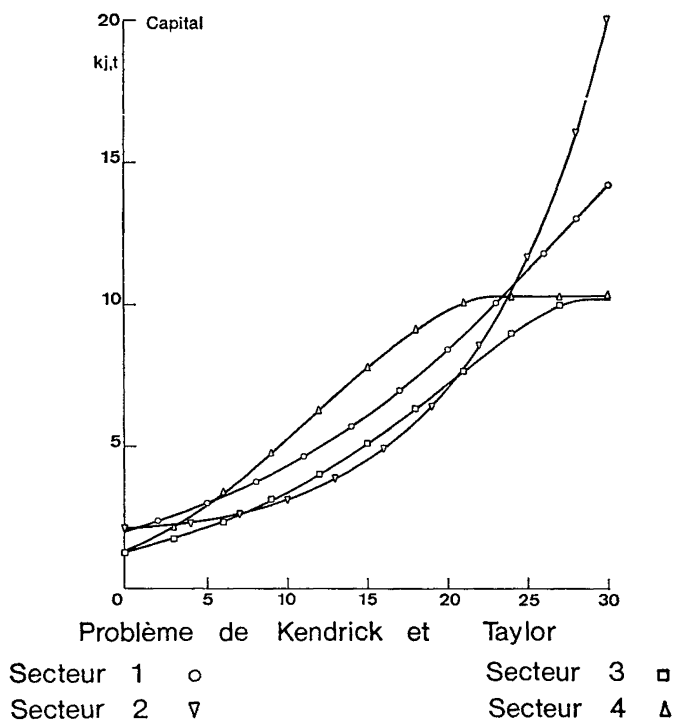


Figure 6

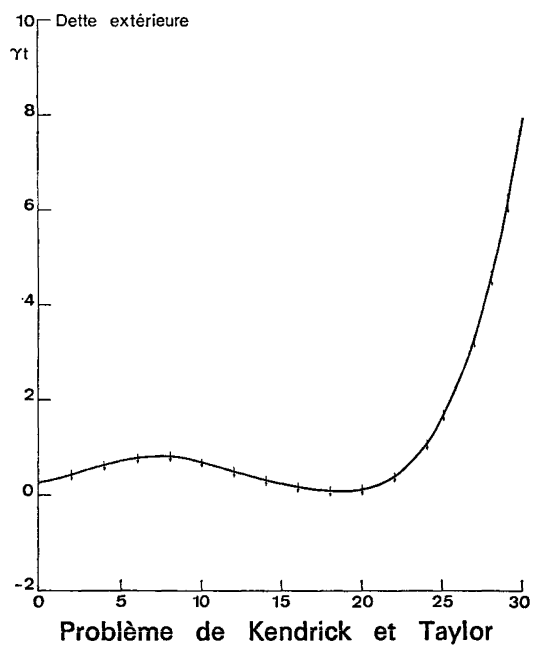


Figure 7

l'optimum en 50 itérations (93 secondes sur CDC 6 400), alors que la valeur de départ, 42 192..., en est assez éloignée. Les calculs ont été conduits jusqu'à l'itération 584, où la norme euclidienne de q est, en (9), assez petite pour que le point soit considéré comme presque stationnaire (notons encore que 0,5 % de l'optimum est atteint en 70 itérations, et 0, 1% en 151 itérations). Cependant les courbes n'ont pas encore, à l'itération 50, l'allure agréable à l'œil qu'elles devraient avoir ; elles sont encore en fait, assez différentes de leurs allures finales, qu'elles acquièrent vers la centième itération (3 minutes sur CDC 6 400). Les mêmes observations sont valables pour le Modèle 2.

Nous ne désirons pas entrer ici dans des discussions de nature économique. Signalons en passant cependant que les variables adjointes ψ , qui sont si importantes (voir par exemple Albouy 1972), sont imprimées. Les courbes traduisant leur évolution dans le temps montrent, elles aussi, une remarquable continuité.

La composition détaillée de chacun des quatre secteurs (en gros : 1, Agriculture et Mines ; 2, Industrie Lourde ; 3, Industrie légère ; 4, Services) se trouve dans les publications originales de Kendrick et Taylor.

Nous n'avons eu aucun souci de performance en écrivant ce code. Les temps de calcul devraient pouvoir s'abaisser considérablement. Il en résulte que la considération de problèmes ayant, disons, 10 secteurs est parfaitement envisageable, comme l'avaient déjà souligné Kendrick et Taylor (1969). Il ne faut pas se dissimuler cependant qu'il s'agit d'un problème difficile. Avons-nous même atteint la solution l'optimla du problème à 4 secteurs ?

Nous tenons à remercier MM. Loquet et Robert, étudiants de l'un des auteurs à l'Université Paris-IX-Dauphine, qui, dans le cadre d'un Mémoire de Troisième Cycle, nous ont apporté une aide appréciable pour ce problème de Kendrick et Taylor⁽¹⁾.

(1) Au moment de la correction des épreuves, M. Robert, dans la préparation de sa thèse, a amélioré nos résultats en divisant nos temps de calcul (et nos nombres d'itérations) par trois (machine utilisée : CII IRIS 80).

ANNEXE AU § 4

**Valeurs numériques des paramètres
du problème de Kendrick et Taylor (1970)**

$$z = 0.03, \quad \theta = 0.05, \quad \varepsilon = 0.5$$

$$l_0 = 8.6 \text{ millions}, \quad \alpha = 0.02$$

SECTEUR	1	2	3	4
a	0.48	0.33	0.345	0.3925
b	0.85	0.90	0.91	0.87
μ	0.275	0.35	0.30	0.35
τ	0.41	1.26	1.89	0.47
ν	0.03	0.035	0.025	0.025
β	0.35	0.30	0.25	0.20
ρ	-0.166	0.111	0.111	0.666
$d_{jj}, j = 1 \dots 4$	0.0008	0.090	0.030	0.004
π	0.63	0.98	0.10	0.10

Matrices : $P = I - A + D$. I matrice unité. D matrice diagonale, les éléments diagonaux sont les d_{jj} .

$$A = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.09 & 0.17 & 0.01 \\ 0.09 & 0.33 & 0.24 & 0.12 \\ 0.04 & 0.02 & 0.12 & 0.05 \\ 0.03 & 0.09 & 0.09 & 0.08 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.6908 & 1.3109 & 0.1769 & 0.15 \\ 0.001 & 0.0199 & 0.002 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exportation

Exportation $e_{j,t} = f_j(t)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Pour définir les fonctions f_j on définit d'abord la fonction g :

$U = g(0) = 3,4$ milliards de \$

$$g(t) = U(1 + 0.08)^t(0.15 - 0.0065(10 - t)) \quad \text{pour } 1 \leq t \leq 10$$

$$g(t) = U(1 + 0.08)^{10}(1 + 0.07)^{t-10}(0.15) \quad \text{pour } 10 \leq t \leq 20$$

$$g(t) = U(1 + 0.08)^{10}(1 + 0.07)^{t-10}(0.15 - 0.002(t - 20)) \quad \text{pour } 20 \leq t \leq 30$$

On définit alors $f_j(t)$:

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= g(t)(0.20 - 0.01t) \\ f_2(t) &= g(t)(0.10 + 0.005t) \\ f_3(t) &= g(t)(0.3 + 0.015t) \\ f_4(t) &= g(t)(0.4 - 0.01t) \end{aligned} \right\} 1 \leq t \leq 10$$

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= g(t)(0.10 - 0.005(t - 10)) \\ f_2(t) &= g(t)(0.15 + 0.01(t - 10)) \\ f_3(t) &= g(t)(0.45) \\ f_4(t) &= g(t)(0.3 - 0.005(t - 10)) \end{aligned} \right\} 10 \leq t \leq 20$$

$$\left. \begin{aligned} f_1(t) &= g(t)(0.05) \\ f_2(t) &= g(t)(0.25 + 0.015(t - 20)) \\ f_3(t) &= g(t)(0.45 - 0.01(t - 20)) \\ f_4(t) &= g(t)(0.25 - 0.005(t - 20)) \end{aligned} \right\} 20 \leq t \leq 30$$

Valeurs numériques des conditions aux limites

a) Variables d'état en milliards de dollars :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 0 \\ k_{1,1} &= 2.02 & k_{1,N+1} &= 14.2 \\ k_{2,1} &= 2.13 & k_{2,N+1} &= 20 \\ k_{3,1} &= 1.26 & k_{3,N+1} &= 10.2 \\ k_{4,1} &= 1.27 & k_{4,N+1} &= 10.3 \\ \gamma_1 &= 0.25 & \gamma_{N+1} &= 8 \end{aligned}$$

b) Main-d'œuvre initiale en millions

$$l_{1,1} = 5.1$$

$$l_{2,1} = 0.84$$

$$l_{3,1} = 0.36$$

$$l_{4,1} = 2.3$$

TABLE DE LA FONCTION $f_j(t)$

Cette table présente de légères différences avec celle qui est donnée par Kendrick et Taylor (1970, pages 220-221), bien que nous ayons tenté de suivre aussi strictement que possible les indications de ces Auteurs.

Exportation path

YEAR	SECTOR 1	SECTOR 2	SECTOR 3	SECTOR 4	TOTAL
1	.064	.035	.106	.131	.336
2	.070	.043	.128	.148	.389
3	.076	.051	.154	.166	.448
4	.082	.062	.185	.185	.513
5	.088	.073	.220	.205	.587
6	.094	.087	.261	.227	.669
7	.099	.103	.308	.251	.760
8	.103	.121	.362	.276	.862
9	.107	.141	.424	.302	.975
10	.110	.165	.495	.330	1.101
11	.112	.189	.530	.348	1.178
12	.113	.214	.567	.366	1.261
13	.115	.243	.607	.334	1.349
14	.115	.274	.649	.404	1.443
15	.116	.309	.695	.425	1.544
16	.116	.347	.744	.446	1.652
17	.115	.389	.796	.469	1.768
18	.114	.435	.851	.492	1.892
19	.111	.486	.911	.516	2.024
20	.108	.541	.975	.541	2.166
21	.114	.606	1.006	.560	2.287
22	.121	.676	1.038	.579	2.414
23	.127	.751	1.070	.599	2.547
24	.134	.833	1.102	.618	2.688
25	.142	.921	1.134	.638	2.835
26	.150	1.017	1.166	.658	2.990
27	.158	1.119	1.198	.678	3.153
28	.166	1.230	1.230	.698	3.325
29	.175	1.349	1.261	.718	3.504
30	.185	1.477	1.292	.739	3.693

5. UN PROBLEME D'INVESTISSEMENT ÉLECTRIQUE

Il s'agit d'une classe de problèmes fort intéressants à plusieurs points de vue. Le lecteur est prié de se reporter à Breton et Falgarone (1972) pour les détails que nous ne pouvons donner ici.

Ces problèmes sont relatifs à l'optimisation des investissements d'Électricité de France avec, *par exemple*, 3 types d'équipements (usines nucléaires, usines thermiques classiques, usines thermiques légères), sur 20 ans. La fonction économique à minimiser est la somme actualisée des coûts d'investissement, de gestion, et de défaillance. Le coût de gestion fait lui-même intervenir une optimisation, car on ne peut comparer des politiques d'investissements que si l'on optimise les gestions des équipements correspondants.

Le premier problème de cette classe que nous avons examiné ne comportait aucune borne sur les variables d'état, et était donc du type *PS* (voir § 2). En prenant les coefficients $\sigma_{j,t}$ de la formule (10) égaux à 1, la convergence était très lente. Elle a au contraire été satisfaisante dès que nous avons introduit les valeurs

$$\sigma_{j,t} = e^{0,21t}.$$

Nous tenons à remercier ici M. Breton qui nous a fourni ces valeurs, basées sur des considérations économiques propres à ce problème (le « code Breton », antérieur au nôtre, est spécifique de ce problème, tandis que notre code est général : ce seul fait rend déjà le premier plus performant; de plus, la formule précédente ne constitue qu'une des nombreuses adaptations figurant dans le code Breton, et qui l'améliorent encore).

La valeur du critère pour la solution initiale est 11 455.6. La valeur minimale obtenue par Breton est 10 680.3; nous avons arrêté les calculs à 10 685.7.

Le second problème est identique au précédent, à l'adjonction près de la nouvelle contrainte :

$$x_{2,t} + x_{3,t} \leq 90, \forall t.$$

Nous avons effectué le changement de variables :

$$y_{2,t} = x_{2,t} + x_{3,t}$$

$$y_{3,t} = x_{2,t} - x_{3,t},$$

pour transformer la nouvelle contrainte en

$$y_{2,t} \leq 90, \forall t.$$

La valeur minimale trouvée pour le critère est alors 10 729.4.

Le code Breton traite le premier problème en 56 itérations, contre 162 pour le nôtre. Il serait bien entendu possible de retrouver ces 56 itérations avec notre code, en y introduisant les adaptations propres à ce problème. Tel n'était pas cependant le but de notre expérience. Son premier objet était de montrer l'importance de l'adéquation des calculs à leur signification économique. Le facteur $\sigma_{j,t}$ divisait déjà les temps de calcul par environ 4, et l'on vient de voir une autre division par 3, ce qui au total divise les temps de calcul par 12 environ. Le deuxième objet de l'expérience était de montrer qu'il ne fallait pas craindre les bornes sur les variables d'état. En tout état de cause, nous pourrions encore introduire ici les améliorations apportées par MM. Loquet et Robert (voir § 4.4), ce que nous n'avons pas fait.

Notons encore que, en présence des contraintes de borne sur $y_{2,t}$, nous nous trouvons encore dans le cas particulier où l'hypothèse H n'est pas réalisée. Un artifice analogue à celui du § 4.2 a été utilisé de nouveau avec succès.

6. PROBLEMES DE JACOBSON ET LELE

Jacobson et Lele (1969) ont considéré le problème suivant :

$$P3 : \text{minimiser } x_0(1)$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned}\dot{x}_0 &= x_1^2 + x_2^2 + 0.005u^2 \\ \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_2 + u \\ x_1(0) &= 0 \\ x_2(0) &= -1 \\ x_2(t) - 8(t - 0.5)^2 + 0.5 &\leq 0.\end{aligned}$$

Nous avons utilisé la méthode usuelle de Runge-Kutta, en divisant l'intervalle $(0, 1)$ en 100 parties égales. Nous avons ici introduit la procédure suivante, qui donne souvent de bons résultats : si la variable $x_{2,t}$ atteint sa borne, on l'y fixe jusqu'à ce qu'aucune amélioration ne soit plus possible, et alors seulement on la libère. Les résultats sont présentés aux figures 8 et 9 en ce qui concerne les variables x_2 et u (x_1 est simplement l'intégrale de x_2).

Mehra et Davis (1971) ont résolu ce problème par une méthode s'inspirant de la méthode du gradient réduit généralisé. La différence, intéressante, est qu'ils considèrent $x_{1,t}$ et u_t comme variables basiques, quel que soit t , alors que nous ne le faisons que si $x_{2,t}$ est à sa borne (sinon, nos variables basiques sont $x_{1,t}$ et $x_{2,t}$). La discrétisation de Mehra et Davis est également différente de la nôtre. Profitant de ce que les équations d'état sont linéaires à coefficients constants :

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

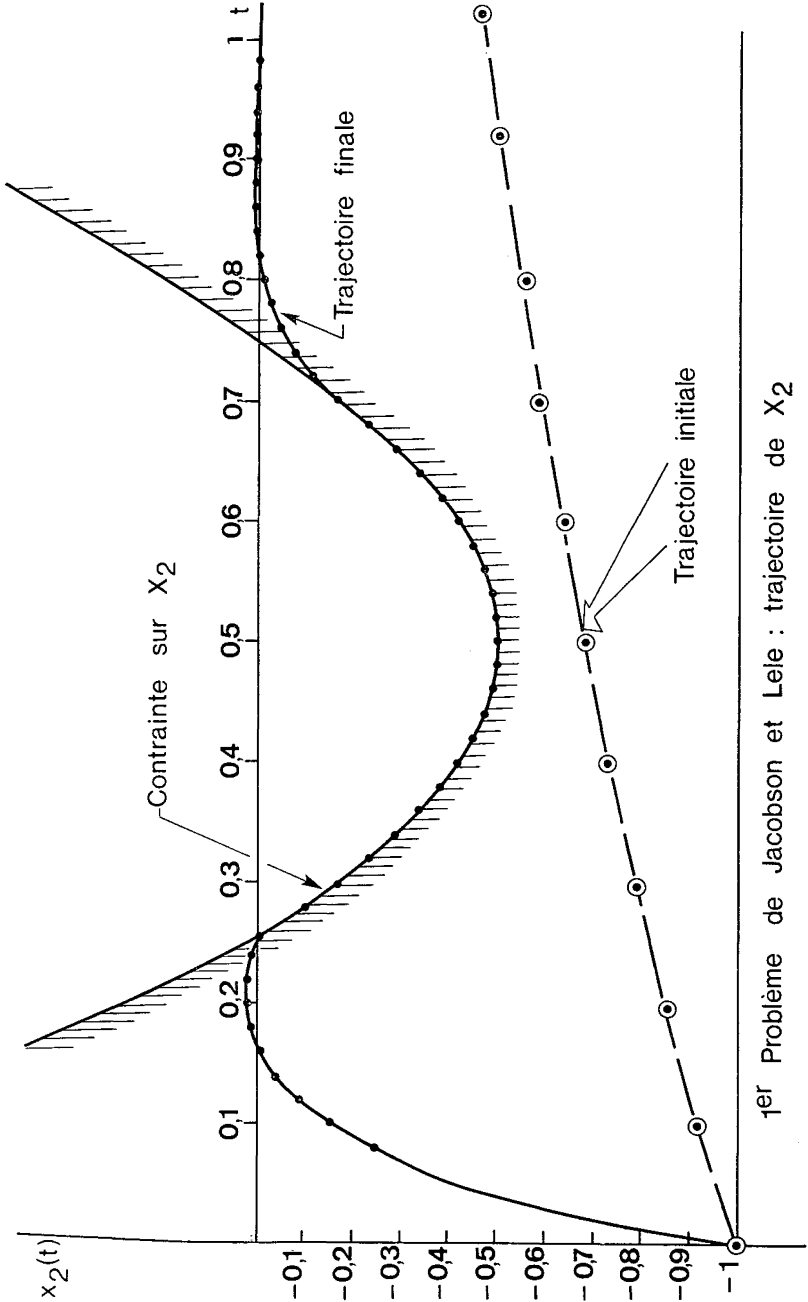


Figure 8

1er Problème de Jacobson et Lele : trajectoire de x_2

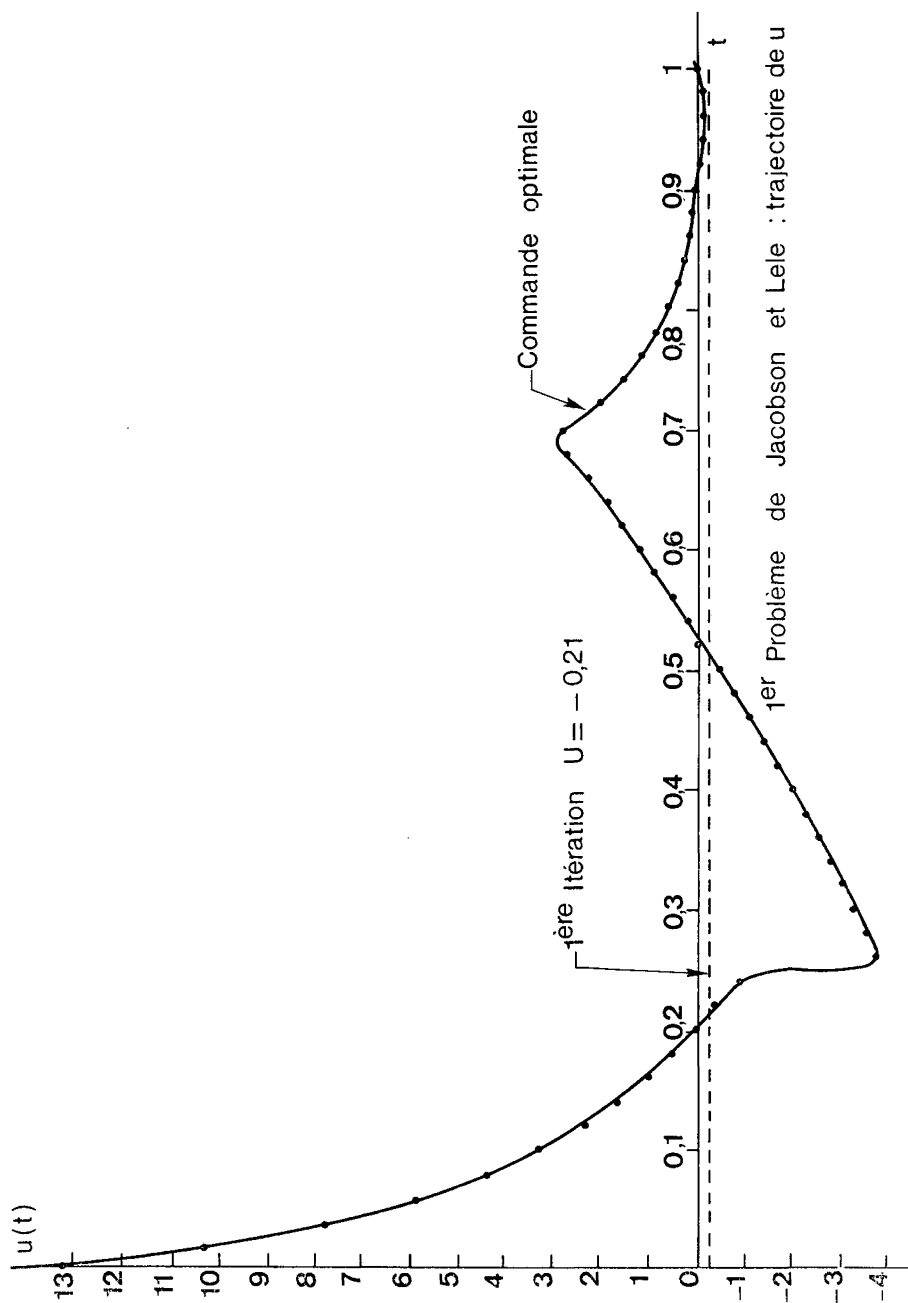


Figure 9

il suffit de connaître la matrice de transfert $Q(t)$ pour pouvoir écrire, lorsque u est constant dans $(0, \Delta t)$:

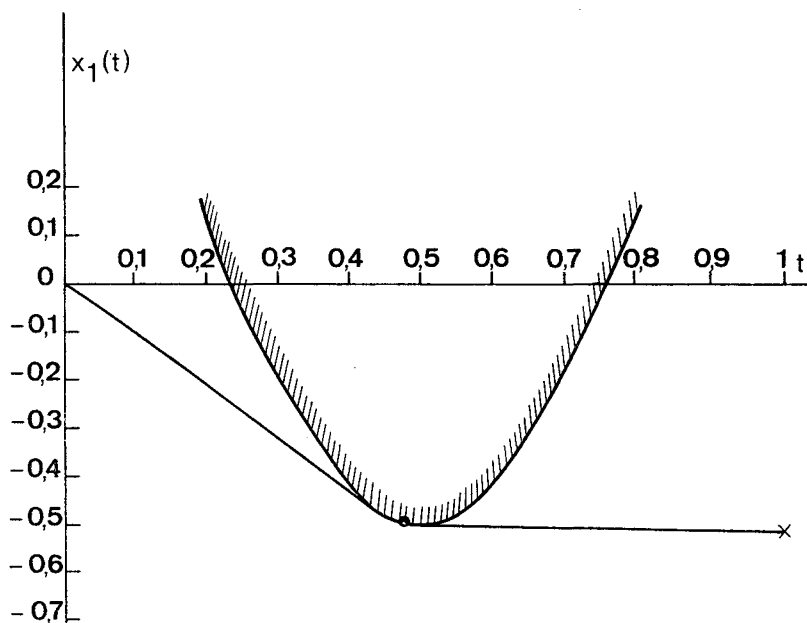
$$x(t + \Delta t) = Q(\Delta t)x(t) + \int_0^{\Delta t} Q(s)Bu \, ds.$$

Dans le cas présent, cette matrice de transfert est

$$Q(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 - e^{-t} \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix},$$

ce qui donne une discrétisation à la fois facile et efficace lorsqu'on considère des fonctions $u(t)$ en escalier.

Nos figures sont très voisines de celles des Auteurs précités, à cela près que nous avons une discontinuité de u au temps t_e où la trajectoire $x_{2,t}$ atteint sa contrainte. Cette discontinuité, qui apparaît aussi chez Jacobson et Lele, nous semble des plus raisonnables.

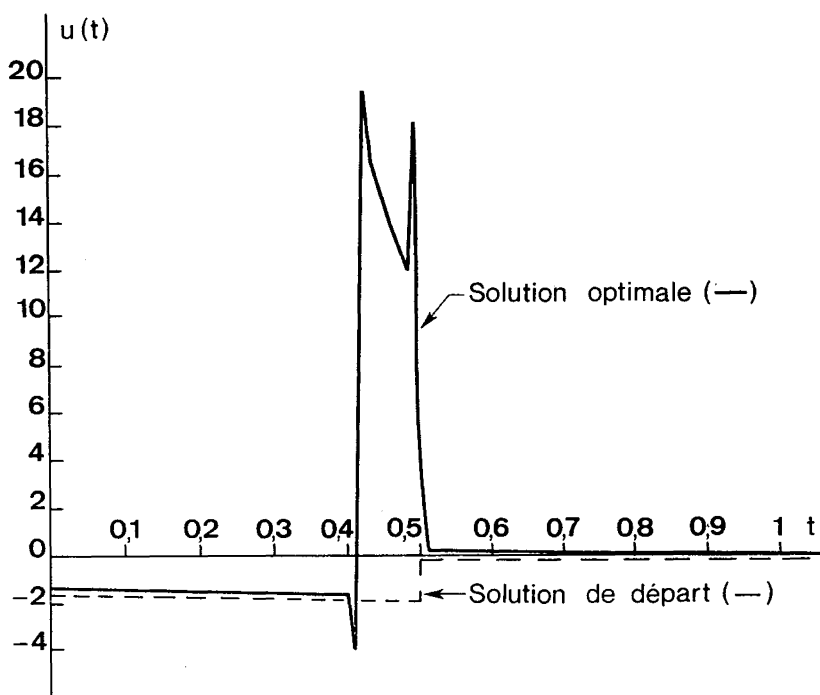


2ème Problème de Jacobson et Lele

La trajectoire de x_1 est pratiquement tangente à la contrainte pour $0,42 \leq t \leq 0,5$, avec un seul point commun pour $t = 0,48$

Figure 10

La meilleure valeur obtenue pour le critère $x_0(1)$ est 0.169671, après 100 itérations et 120 secondes sur une machine CII 10070. Mehra et Davis annoncent une convergence satisfaisante en 10 itérations, et leurs figures laissent penser qu'ils ont effectué 26 itérations. La valeur finale du critère n'est pas donnée.



2ème Problème de Jacobson et Lele

Figure 11

Jacobson et Lele ont considéré un deuxième problème, identique au précédent à cela près que, dans la dernière inégalité, $x_2(t)$ est remplacée par $x_1(t)$. Nos résultats sont schématisés sur les figures 10 et 11. Nous avons pris la discrétisation de Mehra et Davis et avons obtenu, pour meilleure valeur du critère, $x_0(1) = 0.791592$, après 80 itérations et 162 secondes sur une CDC 6400 (31 itérations pour obtenir 0.791821 en 86 secondes). Mehra et Davis obtiennent 0.792871 en 32 itérations. Leurs figures sont très proches des nôtres. En fait, en ce qui concerne ce problème, la différence entre leur méthode et la nôtre ne peut porter que sur des détails : leur essai pour considérer u comme variable indépendante pour toute valeur de t s'étant révélé infructueux, ils n'ont également considéré $u(t)$ comme variable indépendante que si $x_1(t)$ est à sa borne.

7. LES PROBLEMES D'AUSLENDER

Auslander (1970) propose et résoud numériquement cinq problèmes. Il utilise, soit une méthode duale qui fait l'objet de sa publication, soit une méthode de pénalité à titre de comparaison. Pour chacun de ces problèmes, la solution analytique est donnée.

Nous avons résolu ces problèmes. Nous ne donnons ici le résultat que pour un seul d'entre eux : la qualité de nos résultats est la même pour tous.

Ce problème est :

minimiser $\varphi(x)$

avec

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{1}{2} \left[(x_1(2) + x_2(2))^2 + \int_0^2 (x_1(t) + x_2(t))^2 dt \right] \\ \dot{x}_1(t) &= u_1(t) \quad , \quad x_1(0) = 2 \\ \dot{x}_2(t) &= u_2(t) \quad , \quad x_2(0) = 2 \\ x_1(t) + x_2(t) &\geq 2 \\ |u_1(t)| &\leq 1 \quad , \quad |u_2(t)| \leq 1.\end{aligned}$$

La solution théorique donnée par Auslander est alors la suivante, qui correspond à un critère égal à 8.66666 (= 26/3) :

$$\begin{aligned}u_1(t) &= u_2(t) = -1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ u_1(t) &= u_2(t) = 0 \quad \text{si} \quad 1 < t \leq 2 \\ x_1(t) &= x_2(t) = 2 - t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x_1(t) &= x_2(t) = 1 \quad \text{si} \quad 1 < t \leq 2.\end{aligned}$$

Remarquons que, pour toute fonction intégrable $\alpha(t)$ telle que

$$-1 \leq \alpha(t) \leq 1 \quad \text{pour} \quad 1 \leq t \leq 2,$$

on obtient une solution optimale en posant :

$$\begin{aligned}u_1(t) &= u_2(t) = -1 \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ u_1(t) &= -u_2(t) = \alpha(t) \quad \text{si} \quad 1 < t \leq 2 \\ x_1(t) &= x_2(t) = 2 - t \quad \text{si} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ x_1(t) &= 2 + \int_1^t \alpha(s) ds \quad \text{si} \quad 1 < t \leq 2 \\ x_2(t) &= 2 - \int_1^t \alpha(s) ds \quad \text{si} \quad 1 < t \leq 2.\end{aligned}$$

Nous avons transformé le problème en posant $y_1 = x_1 + x_2, y_2 = x_1 - x_2$. L'intervalle $(0, 2)$ a été divisé en 200 parties égales, et nous avons utilisé la méthode usuelle de Runge-Kutta. La solution de départ est

$$u_1(t) = u_2(t) = -0.495, \quad 0 \leq t \leq 2,$$

à laquelle correspond la valeur 11.4268 du critère. En une itération, le critère tombe à 8.66654. Aucune amélioration n'étant plus possible, les calculs s'arrêtent. L'erreur sur $y_1(t) = x_1(t) + x_2(t)$ est rigoureusement nulle. L'erreur relative sur $u(t)$ est de l'ordre de 10^{-4} (la précision demandée pour la méthode de Newton est de cet ordre). L'erreur relative sur le critère est 1.5×10^{-5} . Le temps de calcul est de 20 secondes sur une CII 10070.

Pour la méthode des pénalités, il a fallu 65 itérations pour atteindre une valeur correcte (8.68 pour autant qu'on puisse lire sur un graphique). Il a fallu 10 itérations à la méthode duale pour atteindre une valeur de l'ordre de 8.

Cet exemple illustre un des dangers que présentent les problèmes artificiels pour la comparaison des méthodes : la convergence en une itération pour quatre des cinq problèmes d'Auslender (deux itérations pour le cinquième) ne peut être, pensons-nous, que le résultat d'un hasard favorable,

REFERENCES

- ABADIE (J.), I. *Application of the GRG algorithm to optimal control problems*, ch. 8 in : *Integer and Non linear Programming*, J. Abadie (ed.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1970.
- ABADIE (J.), II. *Optimization Problems with coupled Blocks*, Economic Computation and Economic Cybernetics Studies and Research, année 1970; n° 4, pages 5-26, 1970.
- ABADIE (J.) et BICHARA (M.). *Expériences numériques sur une méthode de résolution de certains problèmes de commande optimale*, Électricité de France, Direction des Études et Recherches, Note HI 739/00, 1972.
- ABADIE (J.) et CARPENTIER (J.), *Generalization of the Wolfe Reduced Gradient method to the case of nonlinear constraints*, ch. 4 in : *Optimization*, R. Fletcher (ed.), Academic Press, London and New York, 1969.
- ADELMAN (I.), ed., *Practical Approaches to Development Planning*, The John Hopkins Press, Baltimore, 1969.
- ALBOUY (M.), *La régulation économique dans l'entreprise*, Dunod, Paris, 1972.
- AUSLENDER (A.), *Méthodes et Théorèmes de dualité*, R.I.R.O., 4^e année, n° R1, pages 9-45, 1970.
- BRETON (A.) et FALGARONE (F.), *Application de la commande optimale au problème du choix des investissements*, Électricité de France, Études Économiques Générales, Note M 67, 1972.
- DANTZIG (G. B.), *Application of Generalized Linear Programming to Control Theory*, ch. XII, in : *Nonlinear Programming*, J. Abadie (ed.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.

- FLETCHER (R.) and REEVES (C. M.), *Function minimization by conjugate gradients*, Computer Journal, vol. 7, pages 149-154, 1964.
- JACOBSON (D. H.) and LELE (M. M.), *A Transformation Technique for Optimal Control Problems with a State Variable Inequality Constraint*, IEEE Trans. AC-14, vol. 5, pages 457-464, 1969.
- KENDRICK (D.) and TAYLOR (L.), *A Dynamic Nonlinear Planning Model for Korea*, ch. 7, in : *Practical Approaches to Development Planning*, I. Adelman (ed.), The John Hopkins Press, Baltimore, 1969.
- KENDRICK (D.) and TAYLOR (L.), *Numerical Solutions of non-linear planning models*, Econometrica, vol. 38, pages 453-467, 1970.
- KUHN (H. W.) and TUCKER (A. W.), *Nonlinear Programming*, pages 481-492 in : *Proceedings of the Second Berkeley Symposium*, J. Neyman, ed., The University of California Press, Berkeley, 1951.
- MEHRA (R. K.) and DAVIS (R. E.), *A generalized gradient method for optimal control problems with inequality constraints and singular arcs*, communication présentée à : Joint Automatic Control Conference, St. Louis, Missouri, 11-13 août 1971.
- ROSEN (J. B.), *Optimal Control and Convex Programming*, ch. XIII, in : *Nonlinear Programming* J. Abadie (ed.), North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1967.
- TABAK (D.) and KUO (B. C.), *Optimal Control by Mathematical Programming*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1971.
- ZADEH (L. A.) and WHALEN (B. H.), *On Optimal Control and Linear Programming*, IRE Trans. Automatic Control, AC-7, pages 45-46, 1962.