

REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE VERTE

G. BERNARD

M. L. BESSON

Douze méthodes d'analyse multicritère

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 5, n° V3 (1971), p. 19-64

http://www.numdam.org/item?id=RO_1971__5_3_19_0

© AFCET, 1971, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DOUZE METHODES D'ANALYSE MULTICRITERE

par G. BERNARD ⁽¹⁾ et M. L. BESSON ⁽¹⁾

Résumé. — *L'étude tente de rassembler des méthodes d'agrégation des critères multiples en vue de choix à faire ou de décisions à prendre. Un critère sur un ensemble d'objets y est défini comme la cause de l'établissement d'une structure sur cet ensemble, et les méthodes étudiées essaient de créer une structure qui rend compte de celles dues à tous les critères considérés.*

Parmi les méthodes étudiées sont à citer : les sommes pondérées des rangs, des valeurs, des utilités, deux variantes des méthodes ELECTRE, les partitions centrales et les relations binaires centrales. Le problème du choix entre ces méthodes, en fonction de la qualité de leurs résultats, de leur coût, de la facilité du calcul, et d'autres critères est posé. Il s'agirait d'appliquer une analyse multicritère sur les méthodes de cette analyse.

I. INTRODUCTION

Analyser plusieurs critères, les comprendre, les représenter simultanément, les agréger : voilà notre problème. Mais, tout d'abord, qu'est-ce qu'un critère ? Nous convenons ici d'adopter la définition suivante :

Un critère sur un certain ensemble E est ce qui établit une structure sur cet ensemble, c'est-à-dire, en général, une relation quelconque entre les éléments de cet ensemble.

Cette relation pourra être simplement binaire, ou bien une relation d'équivalence, ou un préordre (structure préordinaire) ou un ordre (structure ordinaire).

Il est possible également qu'une structure soit plus riche en informations et permette d'établir, non plus une simple relation entre les éléments de E , mais une application de E dans l'ensemble des réels \mathbb{R} (structure cardinale). De cette application de E dans \mathbb{R} découlent évidemment de nombreuses relations entre les éléments de E .

* * *

Soit M un ensemble de m critères sur E . Ces critères ne sont pas nécessairement d'importance égale les uns par rapport aux autres. A chaque critère i , il faudra donc associer un poids p_i . L'ensemble des p_i forme un vecteur p à m

(1) CETEM, Centre d'Étude des Techniques Économiques Modernes.

dimensions. Il arrivera fréquemment que les pondérations soient normées, c'est-à-dire $\sum_{i=1}^m p_i = 1$. Dans le cas où tous les critères ont la même importance, nous aurons : $p_i = 1/m$ pour tout i . Le couple (M, p) ainsi défini forme un m -tuple de critères pondérés (2).

Notre information initiale (notre donnée) sera donc un m -tuple de structures pondérées sur E .

Le but que nous nous proposons est d'agréger ces données, afin d'obtenir une structure unique sur E .

Une méthode d'analyse multicritère est ainsi une application qui, à un m -tuple de structures pondérées sur E , fait correspondre une structure unique sur E .

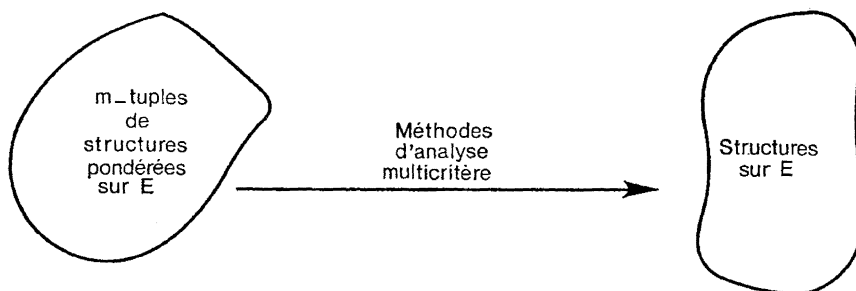


Figure 1

* * *

Nous présentons ici douze de ces méthodes. Nous aurions pu évidemment en développer bien d'autres. N'y a-t-il pas, en effet $n!^{(n)^m}$ façons de déduire

(2) Dans certaines méthodes étudiées ci-après, il est commode et parfois nécessaire d'intégrer le paramètre de l'importance d'un critère dans la structure qu'il établit.

Cela est facile lorsque l'ensemble M est cardinal; il suffit de multiplier le résultat de chaque $m_i \in M$ par le poids correspondant p_i pour obtenir une matrice des « valeurs pondérées ». On peut supposer par exemple que cela a été fait pour les hiérarchies, l'analyse factorielle, ...

Dans d'autres méthodes : permutations successives, électre f et g , les poids des critères sont utilisés directement dans l'agrégation, d'une manière différente.

Dans d'autres méthodes enfin, de partitions et relations médianes, Iphigénie (voir annexe D), on pondère non pas les résultats d'un critère par rapport à ceux des autres, mais les distances (ou leurs indices) entre ce critère et le critère agrégé, entre deux critères, entre deux résultats d'un critère. C'est souvent incorrect, mais toujours commode...

d'un m -tuple d'ordres complets sur un ensemble à n éléments, un ordre unique sur ce même ensemble? Mais notre travail n'est pas un « survey » de la théorie des classifications ou de méthodes de décision, en présence de critères multiples. Nous ne prétendons nullement présenter une synthèse de l'état de l'art à un moment donné. Il s'agit d'une recherche partielle sur les choix ou les décisions en présence de critères ou d'objectifs multiples. Ceux qui voudront bien en prendre connaissance sans parti pris jugeront de son intérêt.

Parmi les douze méthodes dont nous parlerons, certaines sont triviales (par exemple « les moyennes pondérées ⁽¹⁾ »); d'autres sont moins connues; il y aura aussi une généralisation de la méthode Electre ⁽²⁾; il y aura enfin quelques méthodes que nous pensons être originales, n'en ayant pas trouvé de description dans la littérature; c'est le cas de notre définition r , f , et g des rangs et de son utilisation; c'est aussi le cas des dernières méthodes présentées : partitions centrales et relations centrales.

Nous présenterons d'abord les méthodes nécessitant le plus d'information initiale (structures ou données cardinales), puis celles qui en nécessitent un peu moins, et ainsi de suite, pour finir par celles qui en demandent le moins (structures ou données sous forme de relation quelconque entre les éléments de E).

REMARQUE : Si nous disposons d'une certaine quantité d'information, nous pourrons, évidemment, utiliser aussi toute méthode nécessitant une quantité d'information moindre.

* * *

Pour faciliter le langage, nous utiliserons dans ce qui suit l'exemple d'une classe de n élèves, à qui m professeurs enseignent m matières différentes. Les élèves forment l'ensemble E ; les matières (ou les professeurs) l'ensemble M . Les critères sont donc les diverses matières. Les poids en sont les coefficients (ils peuvent être évidemment tous égaux, et c'est ce que nous supposerons dans le cas où ils ne sont pas définis).

Les élèves reçoivent de chaque professeur des notes, ou des rangs; ou même ils sont jugés, sans qu'il s'agisse d'ordre ou de préordre, par l'établissement d'une relation quelconque entre eux, qui n'est pas nécessairement binaire.

(1) Voir paragraphe 2.1.

(2) Voir paragraphe 4.1 et [1].

Tableau récapitulatif des 12 méthodes

Nom	N°	PARAGRAPHE CORRES- PONDANT	STRUCTURES DE DÉPART (Minimum d'information nécessaire)	STRUCTURE D'ARRIVÉE (Résultat)	ORIGINE/RÉFÉRENCES
Moyennes pondérées	1	2.1	Cardinales	Cardinale	Méthode très connue
Analyse hiérarchique	2	2.2	Cardinales	Hierarchies, partitions	[8] [10]
Analyse factorielle	3	2.3	Cardinales	Projection sur plan	[12]
Dictature	4	3.1	Ordinales	Ordinale	Méthode très connue
Démocratie parfaite	5	3.2	Ordinales	Relation binaire	Méthode très connue
Somme pondérée des rangs	6	3.3	Ordinales (ou préordi- nales)	Préordinale	Méthode très connue
Permutations succes- sives	7	3.4	Ordinales	Ordinale	M. Jacquet-Lagnère

Electre - f Electre - g	8 a 8 b	4.1 4.1	Préordinales (préordres incomplets en général)	Préordinaire Préordre complet	Généralisation d'Electre [1] [3] [4] [5] [6]
Partition médiane Partition moyenne	9 a 9 b	5.3.1 5.3.2	Sous forme de relations d'équivalence	Sous forme de relations d'équivalence	Sans référence
Relation binaire mé- diane Relation binaire moyenne	10 a 10 b	6.3.1 6.3.2	Sous forme de relations binaires quelconques	Sous forme de relations binaires quelconques ou sous forme d'ordres	Sans référence
Préordre médian de k classes Préordre moyen de k classes	11 a 11 b	6.5 6.5	Sous forme de préordres déterminant chacun k classes (par ex. nota- tions A-B-C-D-E)	Sous forme de préordre déterminant k classes (par ex. notation A-B- C-D-E)	Sans référence
Relation médiane entre k éléments de E	12 a	5.1	Sous forme de relations quelconques entre k éléments de E	Sous forme de relation quelconque entre k élé- ments de E	Sans référence
Relation moyenne entre k éléments de E	12 b	7.1			

II. DONNEES CARDINALES

2.0. Il est relativement fréquent que chaque professeur donne une note à chacun des élèves. Le responsable de classe se trouve alors devant des informations qui peuvent se résumer par le tableau suivant :

Matières		1	2	i	m
Élèves	coeff.	p_1	p_2	p_i	p_m
E	x_1	y_1^1	y_1^2	y_1^i	y_1^m
	x_2	y_2^1	y_2^2	y_2^i	y_2^m

	x_k	y_k^1	y_k^2	y_k^i	y_k^m

	x_n	y_n^1	y_n^2	y_n^i	y_n^m

(y_k^i est la note obtenue par l'élève x_k pour la $i^{\text{ème}}$ matière)

2.1. Moyennes pondérées

Il peut calculer pour chacun des élèves x_k sa « note générale » $v(x_k)$ définie par :

$$v(x_k) = \sum_{i=1}^m y_k^i \cdot p_i$$

Puis il rangera les élèves suivant les valeurs de v décroissantes. Il obtient ainsi un préordre total sur E .

2.2. Hiérarchies ⁽¹⁾

Si, au lieu de vouloir déduire de cette matrice des données un préordre total sur E on veut en tirer une partition des éléments de E , on pourra utiliser l'analyse hiérarchique.

(1) Pour plus de détails voir [8] et les définitions de l'annexe B.

Posons en effet :

$$(\forall x_k \in E)(\forall x_{k'} \in E) \left[\delta(x_k, x_{k'}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_k^i - y_{k'}^i)^2} \right]$$

δ est la distance euclidienne dans un espace à m dimensions.

C'est par conséquent, a fortiori, un indice de distance.

Or, on peut utiliser un indice de distance sur un ensemble fini E pour créer une ultramétrie sur E , et cela de deux façons différentes. Avant d'expliquer ces deux procédés, il est nécessaire de munir l'ensemble des indices de distance sur E d'une relation d'ordre (notée « \geq »). Écrivons :

$$(\delta_1 \geq \delta_2) \Leftrightarrow (\forall x \in E)(\forall y \in E) (\delta_1(xy) \geq \delta_2(xy))$$

c'est-à-dire : si δ_1 est « plus grand » que δ_2 , la « distance » entre tout couple xy d'éléments de E par δ_1 est supérieure ou égale à celle obtenue par δ_2 .

Comme toute ultramétrie est un indice de distance, l'ensemble des ultramétries se trouve ordonné par la même relation. D'où :

1^{er} procédé pour passer d'un indice de distance à une ultramétrie :

On appelle ultramétrie inférieure maximale la plus grande des ultramétries inférieures à δ .

2^e procédé : ultramétrie supérieure minimale.

On appelle ultramétrie supérieure minimale la plus petite des ultramétries supérieures à δ .

Ce que l'on peut schématiser ainsi :

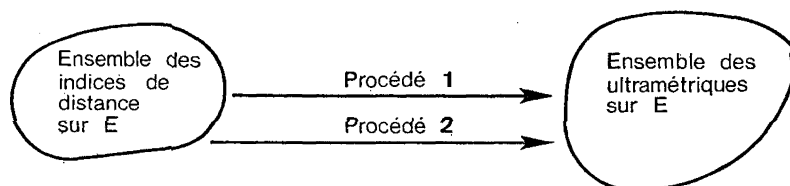


Figure 2

Or, nous savons qu'il existe une bijection entre l'ensemble des ultramétries sur E et l'ensemble des hiérarchies indicées sur E .

Le procédé 1 ou le procédé 2 permettent donc de déduire de chaque indice de distance ⁽¹⁾ une hiérarchie indicée sur E , d'où l'on peut déduire une partition ou typologie sur E .

(1) Voir la définition de l'indice de distance dans l'annexe B.

Ainsi, l'analyse hiérarchique permet d'obtenir une typologie sur les éléments de E , à partir d'une matrice de données cardinales.

Exemple d'utilisation du procédé 1

Soit E un ensemble de 6 éléments $x_1, x_2 \dots x_6$, sur lequel on connaît un indice de distance, défini par le tableau suivant :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	7	6	7	6	7
x_2		0	5	2	5	6
x_3			0	6	1,5	2
x_4				0	7	5
x_5					0	1
x_6						0

Rangeons tous les triangles formés par les éléments de E , dans un ordre quelconque, fixé une fois pour toutes.

D'autre part, rangeons tous les indices de distance en colonne.

Observons le premier triangle : Est-il « isocèle à petite base » ou équilatéral ? Si oui, passer au 2^e triangle. Sinon, modifier le plus grand de ses côtés en le rendant égal au côté immédiatement inférieur.

Et passer au 2^e triangle.

Observons alors le 2^e triangle. Agissons comme nous l'avions fait pour le 1^{er}; et passons au 3^e triangle, etc... On s'arrêtera lorsque plus aucun des

triangles ne modifie le tableau des distances. Alors apparaît l'*ultramétrie inférieure maxima* que l'on cherchait. La hiérarchie indiquée est ensuite très facile à construire.

Triangles	Côtés	Indices de distance		
$x_1x_2x_3$	x_3x_2 x_3x_1 x_2x_1	x_2x_1	7	6
$x_1x_2x_4$	x_4x_2 x_4x_1 x_2x_1	x_3x_1	6	
$x_1x_2x_5$	x_5x_2 x_5x_1 x_2x_1	x_3x_2	5	
$x_1x_2x_6$	x_6x_2 x_6x_1 x_2x_1	x_4x_1	7	6
$x_1x_3x_4$	x_4x_3 x_4x_1 x_3x_1	x_4x_2	2	
$x_1x_3x_5$	x_5x_3 x_5x_1 x_3x_1	x_4x_3	6	5
$x_1x_3x_6$	x_6x_3 x_6x_1 x_3x_1	x_5x_1	6	
$x_1x_4x_5$	x_5x_4 x_5x_1 x_4x_1	x_5x_2	5	
$x_1x_4x_6$	x_6x_4 x_6x_1 x_4x_1	x_5x_3	1,5	
$x_1x_5x_6$	x_6x_5 x_6x_1 x_5x_1	x_5x_4	7	5
$x_2x_3x_4$	x_4x_3 x_4x_2 x_3x_2	x_6x_1	7	6
$x_2x_3x_5$	x_5x_3 x_5x_2 x_3x_2	x_6x_2	6	5
$x_2x_3x_6$	x_6x_3 x_6x_2 x_3x_2	x_6x_3	2	1,5
$x_2x_4x_5$	x_5x_4 x_5x_2 x_4x_2	x_6x_4	5	
$x_2x_4x_6$	x_6x_4 x_6x_2 x_4x_2	x_6x_5	1	
$x_2x_5x_6$	x_6x_5 x_6x_2 x_5x_2			
$x_3x_4x_5$	x_5x_4 x_5x_3 x_4x_3			
$x_3x_4x_6$	x_6x_4 x_6x_3 x_4x_3			
$x_3x_5x_6$	x_6x_5 x_6x_4 x_5x_4			

Ultramétrique résultante
(inférieure maxima) :

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	6	6	6	6	6
x_2		0	5	2	5	5
x_3			0	5	1,5	1,5
x_4				0	5	5
x_5					0	1
x_6						0

Or nous savons qu'avec une ultramétrique on peut construire une hiérarchie indicée (voir [8]).

D'où le schéma suivant :

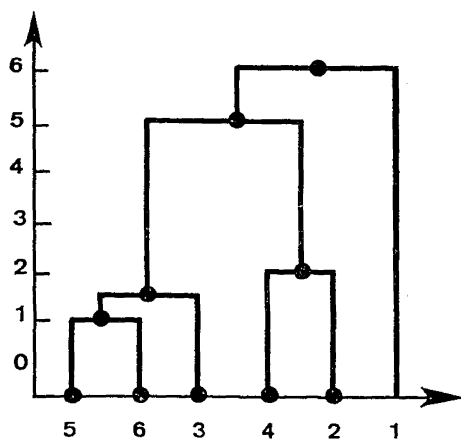


Figure 3

Hiérarchie indicée (représentation en arbre)

Typologie associée à cette hiérarchie :

$$F_1 = \{ 5, 6, 3 \}$$

$$F_2 = \{ 2, 4 \}$$

$$F_3 = \{ 1 \}$$

2.3. Analyse factorielle

Considérons notre tableau rectangulaire à $m \cdot n$ cases. Chacun des élèves est un point dans un espace à m dimensions. L'analyse factorielle consiste à déterminer le plan passant le plus « près » de ces n points, puis à les projeter sur ce plan. Chaque droite (« axe ») de ce plan détermine évidemment un préordre sur l'ensemble E .

Le professeur responsable obtiendra ainsi une image générale de l'ensemble des élèves, qui pourra être source de fort intéressantes considérations.

REMARQUE : Il y a une différence de principe entre l'analyse factorielle et les autres méthodes exposées ici : la première est ⁽¹⁾ une analyse *statistique* multidimensionnelle : elle constate et met de l'ordre dans ce qui existe; les autres méthodes sont des outils de décision, servant à *faire* et non pas à *savoir*. Pourtant essayer de savoir est déjà faire et on ne peut pas faire sans savoir. C'est à ce dernier titre que les ordres, les classifications, les mesures sont des instruments d'action, et l'analyse factorielle peut être considérée comme une méthode d'analyse multicritère.

En réalité l'analyse factorielle détermine toute une série d'axes, dits factoriels et qui, pris deux à deux, déterminent des plans. Le plan dont nous avons parlé ci-dessus est déterminé par les deux premiers axes factoriels.

III. DONNEES ORDINALES

3.0. Supposons maintenant que chaque professeur i établisse non plus une note pour chaque élève, mais un ordre total R_i sur l'ensemble E des élèves. Si le professeur responsable cherche, avec de telles informations, à construire un ordre total sur E , déduit de ces m opinions, il a plusieurs méthodes possibles.

3.1. Dictature

S'il veut respecter les règles de loyauté et de souveraineté ⁽²⁾, au sens où

(1) Voir [13].

(2) Voir annexe B, p. 59.

l'entendait Arrow, il ne peut choisir comme ordre total agrégé que l'ordre total établi par le professeur enseignant une certaine matière i . Ce dernier joue alors un rôle de dictateur : les résultats des élèves dans les autres matières ne jouent strictement aucun rôle dans le classement général (1).

3.2. Démocratie parfaite

Si le professeur responsable cherche à agréger tous les ordres totaux par la règle de la majorité simple, il agira en « démocrate ».

Nous dirons alors que, pour l'ensemble des professeurs, « $x_i > x_j$ » si plus de la moitié (pondérée) des professeurs préfèrent x_i à x_j .

Mais cette méthode ne conduit pas nécessairement à un ordre, comme on le sait.

Voici un exemple : les professeurs I, II et III doivent classer les élèves x_1 , x_2 , x_3 et x_4 . Les 3 matières qu'ils enseignent ont les mêmes coefficients.

Opinions de chacun, ou ordre établi par chacun :

$$\text{I : } x_1 > x_2 > x_3 > x_4$$

$$\text{II : } x_2 > x_3 > x_1 > x_4$$

$$\text{III : } x_4 > x_3 > x_1 > x_2$$

Donc suivant la loi démocratique, nous aurons pour la collectivité des professeurs :

$$x_2 > x_3$$

$$x_3 > x_1$$

$$x_1 > x_2$$

$$x_2 > x_4$$

$$x_3 > x_4$$

$$x_1 > x_4$$

Cet ensemble d'inégalités ne forme pas un ordre car :

$$(x_2 > x_3 \text{ et } x_3 > x_1) \not\Rightarrow (x_2 > x_1)$$

Il y a intransitivité. C'est le paradoxe de Condorcet.

3.3. Somme pondérée des rangs

La définition d'un rang est assez intuitive dans le cas d'un ordre total,

(1) On pourrait obtenir le résultat de la dictature de l'individu i (ou du $i^{\text{ème}}$ critère) en appliquant n'importe quelle méthode et en pondérant de la façon suivante :

$$\begin{array}{ll} (p_i = 1) \\ (\forall j \neq i) & (p_j = 0) \end{array}$$

L'application dictatoriale transforme en effet un m -tuple de critères pondérés, en un des critères particuliers. C'est en somme une projection. Elle peut donc s'appliquer à des structures quelconques (non nécessairement ordinales).

comme ici. (Plus loin, nous l'avons formalisée et généralisée dans le cas d'un préordre quelconque — voir § 4.1.1).

Soit $r_i(x_k)$ le rang obtenu par l'élève x_k , dans la $i^{\text{ème}}$ matière. Calculons, pour chaque élève x_k , le coefficient suivant :

$$q(x_k) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot r_i(x_k)$$

On peut définir un préordre P sur E de la façon suivante :

$$(\forall x_k \in E) (\forall x_j \in E) (x_k P x_j) \Leftrightarrow (q(x_k) \leq q(x_j))$$

Nous voyons ainsi une méthode fort simple de faire correspondre à tout m -uplet de préordres pondérés sur E , un préordre total sur E . C'est une nouvelle façon d'agréger les opinions.

EXEMPLE : Nous reprenons l'exemple précédent avec les ordres suivants établis par les 3 professeurs :

$$\text{I : } x_1 > x_2 > x_3 > x_4$$

$$\text{II : } x_2 > x_3 > x_1 > x_4$$

$$\text{III : } x_3 > x_4 > x_1 > x_2$$

$$(p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = 1)$$

$$q(x_1) = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$q(x_2) = 2 + 1 + 4 = 7$$

$$q(x_3) = 3 + 2 + 1 = 6$$

$$q(x_4) = 4 + 4 + 2 = 10$$

D'où le préordre final :

$$\left| \begin{array}{l} x_3 \\ x_1, x_2 \\ x_4 \end{array} \right.$$

3.4. Permutations successives

Cette méthode a été mise au point par M. Jacquet-Lagrange.

Soit R_i l'ordre établi par le professeur enseignant la matière i .

« $x_k R_i x_{k'}$ » signifie que l'élève x_k est au moins aussi bon que l'élève $x_{k'}$, dans la matière i .

On appelle $G(k, k')$ l'ensemble des épreuves où l'élève x_k est mieux ou aussi bien classé que l'élève $x_{k'}$. C'est-à-dire : $G(k, k') = \{ i / x_k R_i x_{k'} \}$

Formons un tableau carré de la façon suivante :

	x_1	x_2	.. x_k	.. $x_{k'}$	x_n
x_1	a_1^1	a_1^2	$a_1^{k'}$	a_1^n
x_2	.	.				.
.	.	.				.
.	.	.				.
x_k		a_k^k	$a_k^{k'}$	
.			.	.		.
.			.	.		.
x_n			$a_n^{k'}$	a_n^n

$$\text{avec : } a_k^{k'} = \sum_{i \in G(k, k')} p_i = \sum_{x_k R i x_{k'}} p_i$$

c'est-à-dire : $a_k^{k'}$ = somme des poids des ordres pour lesquels x_k surclasse $x_{k'}$. En d'autres termes, $a_k^{k'}$ = somme des coefficients des ordres en accord avec l'ordre général exprimé par l'intitulé des colonnes de la matrice, du point de vue particulier de la comparaison $(x_k, x_{k'})$. Nous dirons que $a_k^{k'}$ représente les « adhésions partielles » à l'ordre sur E ainsi exprimé dans le cas où k est le rang de l'élève et $k < k'$.

Si $k > k'$, $a_k^{k'}$ somme des coefficients des ordres pour lesquels x_k surclasse $x_{k'}$ représente la somme non plus des « adhésions partielles » par rapport à l'ordre exprimé au-dessus de la matrice, mais celle des « rejets partiels » par rapport à cet ordre.

Ainsi, nous pouvons définir un coefficient représentatif de « l'adhésion » générale des opinions par rapport à l'ordre exprimé dans l'intitulé des colonnes de la matrice par :

$$\sum_{\substack{(k, k') \text{ au-dessus} \\ \text{de la diagonale } (k < k')}} a_{k, k'} - \sum_{\substack{(k, k') \text{ au-dessous} \\ \text{de la diagonale } (k > k')}} a_{k, k'}$$

Changeons, par permutation des éléments de E , l'ordre exprimé par l'intitulé des colonnes. Nous obtenons un nouveau coefficient d'adhésion générale.

Nous essaierons ainsi, les unes après les autres, toutes les permutations possibles de E et garderons seulement celle qui a le plus grand coefficient d'adhésion.

L'ordre représenté par cette permutation est accepté comme ordre définitif. Par cette méthode, la règle de souveraineté est bien sûr respectée. Celle de la loyauté ne l'est donc pas en général (théorème d'Arrow)⁽¹⁾.

(1) Voir la définition de ces deux règles en annexe D...

Les calculs peuvent être fort longs, et pratiquement impossibles sans l'aide d'ordinateur.

Remarquons que, dans certains cas exceptionnels, on pourra trouver plusieurs solutions, parmi lesquelles il faudra en choisir une par un procédé quelconque, le hasard au besoin.

IV. DONNEES PREORDINALES

4.0. Supposons maintenant que chaque professeur i établisse seulement un préordre (non complet en général) sur l'ensemble E des élèves. Comment fera le professeur responsable s'il désire en déduire une structure sur cet ensemble?

4.1. Nous allons établir ici deux variantes de la méthode Electre, qui permettront d'établir des préordres complets sur E .

4.1.1. Applications de l'ensemble des préordres sur E dans l'ensemble des préordres complets sur E

Soit x un élément de E .

Soit P un préordre quelconque sur E .

Soit X' l'ensemble des éléments y de E vérifiant les relations yPx et $\neg (1) xPy$.

Soit X'' l'ensemble des éléments y de E vérifiant les relations : xPy et $\neg xPy$.

Considérons les trois applications r , f et g de E dans N^+ (ensemble des entiers positifs) définies par les relations I, II et III ci-dessous :

$$\text{I. } \begin{cases} r(x) = 1 & \text{Si } X' = \emptyset \\ r(x) = \sup_{y \in X'} r(y) + |r^{-1}(\sup_{y \in X'} r(y))| & \text{si } X' \neq \emptyset \end{cases}$$

C'est-à-dire : $r(x)$ vaut 1 si aucun élément n'est strictement meilleur que x d'après le préordre P ; sinon $r(x)$ est égal à la somme du plus grand des rangs des éléments strictement meilleurs que x , et du nombre d'éléments ayant le rang le plus grand de ceux déjà attribués.

REMARQUE : le rang le plus grand numériquement correspond au rang trivialement appelé « le plus bas ». Au contraire, le rang le plus faible numériquement correspondra au rang trivialement appelé « le plus élevé ».

$$\text{II. } \begin{cases} f(x) = 1 & \text{Si } X' = \emptyset \\ f(x) = \sup_{y \in X'} f(y) + 1 & \text{Si } X' \neq \emptyset \end{cases}$$

(1) \neg signifie : le contraire de.

c'est-à-dire : $f(x)$ vaut 1 si aucun élément n'est strictement meilleur que x d'après le préordre P ; sinon, $f(x)$ est égal au plus grand des rangs des éléments strictement meilleurs que x , augmenté de 1 ⁽¹⁾.

$$\text{III.} \quad \left| \begin{array}{ll} g(x) = 1 & \text{Si } X'' = \emptyset \\ g(x) = \sup_{y \in X''} g(y) + 1 & \text{Si } X'' \neq \emptyset \end{array} \right.$$

c'est-à-dire : $g(x)$ vaut 1 si aucun élément n'est strictement moins bon que x d'après le préordre P ; sinon, $g(x)$ est égal au plus grand des rangs des éléments strictement moins bons que x , augmenté de 1.

Les applications r^{-1} , g^{-1} et f^{-1} appliquent donc N^+ dans l'ensemble des parties de E .

Ces trois applications r , f et g définissent trois préordres complets sur E , de la façon suivante :

$$\begin{aligned} (\forall x \in E) (\forall y \in E) (xP_r y &\Leftrightarrow r(x) \leq r(y)) \\ (\forall x \in E) (\forall y \in E) (xP_f y &\Leftrightarrow f(x) \leq f(y)) \\ (\forall x \in E) (\forall y \in E) (xP_g y &\Leftrightarrow g(x) \geq g(y)) \end{aligned}$$

(Il est trivial de vérifier que P_r , P_f et P_g sont effectivement des préordres complets sur E .)

Nous conviendrons d'appeler « rangs », ces trois applications r , f et g :

$$\begin{aligned} r(x) &\text{ étant le « rang » de } x \text{ pour } P \\ f(x) &\text{ étant le « rang simplifié » de } x \text{ pour } P \\ g(x) &\text{ étant le « rang simplifié-inverse » de } x \text{ pour } P. \end{aligned}$$

Exemple de détermination des rangs associés à un préordre P sur E :

Soit $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8\}$

Soit P un préordre sur E , défini par la donnée de :

$$\psi(P) = (R, T)$$

On suppose R définie elle-même par la donnée de l'ensemble C des classes d'équivalence correspondantes ⁽²⁾

$$C = \{A, B, F, D, E\}$$

avec

$$\begin{aligned} A &= \{x_1, x_2\} \\ B &= \{x_3\} \\ F &= \{x_4, x_5, x_6\} \\ D &= \{x_7\} \\ E &= \{x_8\} \end{aligned}$$

T est défini par les relations : ATB, BTF, ATF, DTE .

(1) REMARQUE : Ces deux définitions de rang généralisées à des préordres quelconques permettent d'appliquer la méthode de la somme pondérée des rangs à des données pré-ordinales.

(2) Un préordre est équivalent à une relation d'équivalence dont les classes sont ordonnées (totalement ou partiellement).

Si nous convenons de représenter une relation du type « XTY » par une flèche orientée de X vers Y , nous aurons :

$$r(x_1) = r(x_2) = f(x_1) = f(x_2) = 1$$

$$g(x_1) = g(x_2) = 3$$

$$r(x_3) = 4$$

$$f(x_3) = 2$$

$$g(x_3) = 2$$

$$r(x_4) = r(x_5) = r(x_6) = 6$$

$$f(x_4) = f(x_5) = f(x_6) = 3$$

$$g(x_4) = g(x_5) = g(x_6) = 1$$

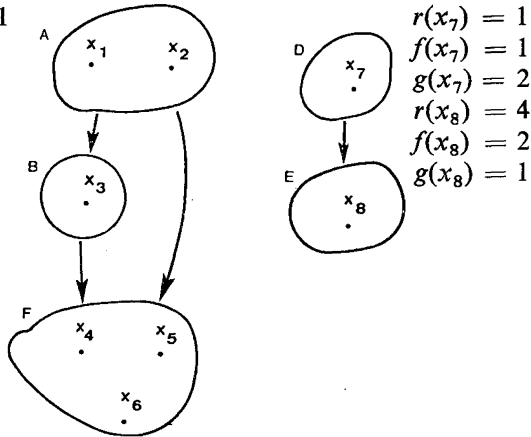


Figure 4

Pour déterminer r ou f , nous devons commencer par les classes A et D .

Pour déterminer g , par les classes F et E .

Les résultats sont inscrits dans les petits tableaux latéraux.

Les préordres résultants P_r , P_f et P_g seront représentés par la même méthode graphique que ci-dessus :

P_r :

ou P_f :

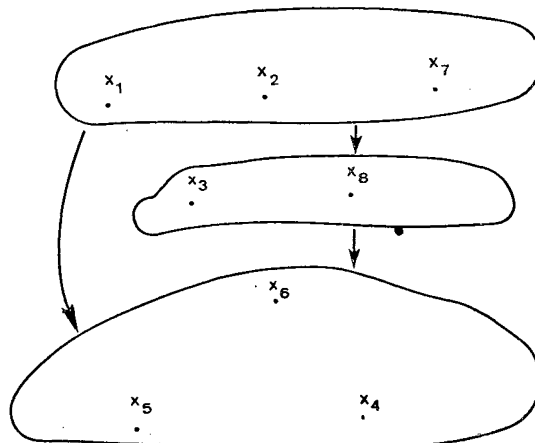


Figure 5

(P_r et P_f sont en effet identiques dans cet exemple)

P_g :

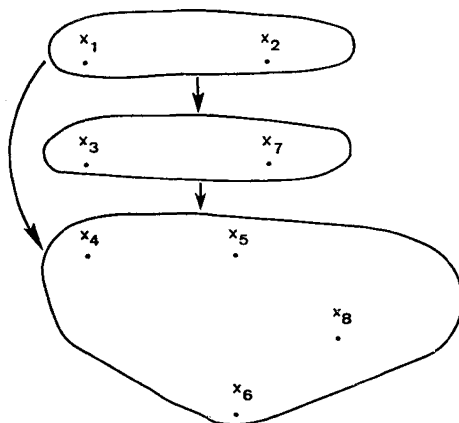


Figure 6

(On remarque que P_g n'est pas identique aux deux autres, dans cet exemple.)

Nous venons ainsi de voir deux façons d'obtenir un préordre complet sur un ensemble fini quelconque E , à partir de n'importe quel préordre sur E .

Nous appellerons ces deux applications de l'ensemble des préordres sur E , sur l'ensemble des préordres complets sur E : Π_f et Π_g (correspondant respectivement aux rangs f et g).

En résumé, nous avons le schéma suivant :

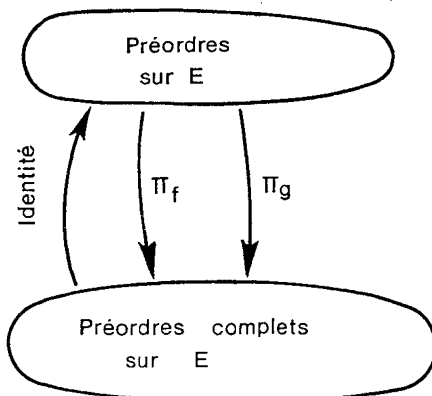


Figure 7

Le mot « identité » représente l'application identique dans l'ensemble des préordres complets. C'est donc une application particulière de l'ensemble des préordres complets sur E dans l'ensemble des préordres sur E .

4.1.2. Application de l'ensemble des parties de $E \times E$, dans l'ensemble des préordres sur E

Soit A une partie de $E \times E$ (produit cartésien de E et de E).

Définissons une relation binaire P sur E de la façon suivante :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)[xPy] \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1. (x = y) \text{ ou } 2. (x, y) \in A \text{ ou } 3. \text{ Il existe une} \\ \text{partie de } E \text{ à éléments numérotés } x_1, x_2, \dots, x_s \\ \text{telle que } (\forall i < s) [(x, x_1) \in A \dots (x_i, x_{i+1}) \in A \dots] \\ (x_s, y) \in A \end{array} \right]$$

Si nous adoptons une représentation graphique, nous pouvons par exemple joindre deux éléments x et y de E , par une flèche orientée de x vers y , si et seulement si $(x, y) \in A$.

Nous dirons alors que deux éléments quelconques sont liés par P si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- (i) : les deux éléments de E sont confondus
- (ii) : le couple formé par les deux éléments de E appartient à A
- (iii) : il existe un circuit fléché orienté du 1^{er} élément vers le 2^e.

Démontrons que P est un préordre :

P est une relation réflexive : En effet, d'après la définition de P :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(x = y \Rightarrow xPy) ; \text{ donc } (\forall x \in E)(xPx)$$

P est une relation transitive : En effet, soient x , y , et z trois éléments quelconques de E tels que : xPy et yPz .

Plusieurs cas doivent être envisagés.

a) Si $x = y$ ou si $y = z$, alors évidemment xPz .

b) Si $x \neq y$ et $y \neq z$ et si $(x, y) \in A$ et $(y, z) \in A$, posons $y = x_1$; (x_1) est une partie de E à éléments numérotés telle que $(x, x_1) \in A$, et $(x, x_1) \in A$. Donc xPz .

c) Si $x \neq y$ et $y \neq z$ et si $(x, y) \in A$ et qu'il existe une partie de E à éléments numérotés x_1, x_2, \dots, x_s telle que $[(y, x_1) \in A \dots (x_i, x_{i+1}) \in A \dots (x_s, z) \in A]$ $i \leq s$ alors nous pouvons aussi numéroté la partie de E formée par les éléments (y, x_1, \dots, x_s) , ce qui nous permet d'écrire que xPz .

(Si $(y, z) \in A$ et que « xPy » est vrai pour la raison impliquant la numérotation d'une partie de $E \times E$, le raisonnement serait analogue et nous arriverions à la conclusion xPz .)

d) Si enfin les relations xPy et yPz sont vraies chacune pour la raison impliquant une numérotation d'une partie de E , la réunion de ces parties numérotées est elle-même numérotée. Donc xPz .

Nous aurions pu simplifier cette démonstration, soit par des considérations graphiques, soit en appelant \bar{A} la fermeture réflexo-transitive de $A^{(1)}$ et en définissant P de la façon suivante : $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(xPy \Leftrightarrow (x, y) \in \bar{A})$.

Nous venons ainsi de mettre en évidence une application θ de l'ensemble des parties de $E \times E$ dans l'ensemble des préordres sur E .

D'où le schéma ci-après :

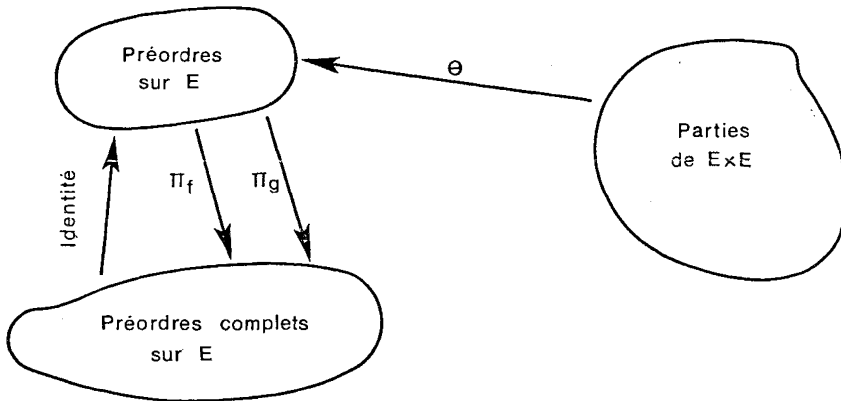


Figure 8

4.1.3. Application de l'ensemble des m -uples de préordres pondérés sur E dans l'ensemble des parties de $E \times E$

Soit E un ensemble fini quelconque.

Soient $P_1, P_2 \dots P_m$, m préordres sur E . Pour chaque préordre P_i , on suppose connu un nombre réel p_i , compris entre 0 et 1, tel que $\sum_{i=1}^m p_i = 1$.

p_i est la pondération relative du préordre P_i .

Notre problème est de déterminer une application d'un m -uple quelconque de préordres pondérés de E , dans une partie de $E \times E$.

Considérons un nombre réel k compris entre 0 et 1.

Soit Q_k la partie de $E \times E$ définie par la relation suivante :

$$(\forall (x, y) \in (E \times E)) \left[(x, y) \in Q_k \Leftrightarrow \sum_{i/xPiy} p_i \geq k \right]$$

Nous appelons Q_k « ensemble de concordance au niveau k ».

(1) Voir [4].

Q_k comporte donc tous les couples (x, y) d'éléments de E tels que la somme des poids des préordres P_i , pour lesquels « $xP_i y$ » est vérifiée, soit supérieure ou égale à k .

Soit \mathcal{Q} l'ensemble de parties Q_k de $E \times E$, obtenu en faisant varier k entre 0 et 1. On a :

$$[k > k'] \Rightarrow [Q_k \subset Q_{k'}] \Rightarrow [|Q_k| \leq |Q_{k'}|]$$

\mathcal{Q} est donc une famille de parties de $E \times E$ incluses les unes dans les autres. Le cardinal de Q_k est une fonction de k monotone et décroissante.

Considérons ensuite un nombre entier l , positif ou nul.

Soit D_l la partie de $E \times E$ définie par la relation suivante :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E) \left[(x, y) \in D_l \Leftrightarrow \sup_{P_1, P_2, \dots, P_m} [\text{rang de } x - \text{rang de } y] \geq l \right]$$

Nous appelons D_l : ensemble de discordance au niveau l .

D_l comporte donc tous les couples (x, y) tels que, pour un au moins des préordres $P_1, P_2 \dots P_m$, le rang de y (voir 4.1.1 application r) est inférieur d'au moins l au rang de x .

Soit \mathcal{D} l'ensemble des parties D_l de $E \times E$, obtenu en faisant varier l entre 0 et $+\infty$

$$[l > l'] \Rightarrow [D_l \subset D_{l'}] \Rightarrow [|D_l| \leq |D_{l'}|]$$

Si nous notons $\overline{D_l}$ le complémentaire de D_l dans $E \times E$, nous aurons :

$$[l > l'] \Rightarrow [\overline{D_{l'}} \subset \overline{D_l}] \Rightarrow [|\overline{D_{l'}}| \geq |\overline{D_l}|]$$

\mathcal{D} est une famille de parties de $E \times E$, incluses les unes dans les autres. Le cardinal de D_l est une fonction décroissante de l . Au contraire, le cardinal de $\overline{D_l}$ est une fonction croissante de l .

Posons pour tout réel k compris entre 0 et 1, et pour tout entier positif ou nul l : $I_{kl} = Q_k \cap \overline{D_l}$.

Le cardinal de I_{kl} sera, bien entendu, une fonction décroissante de k , et croissante de l .

Nous avons ainsi défini une partie I_{kl} du produit cartésien $E \times E$, au moyen de m préordres pondérés quelconques sur un ensemble fini E .

I_{kl} définit par conséquent une application de l'ensemble de m -uples de préordres pondérés sur E dans l'ensemble des parties de $E \times E$.

Cette application dépend de k et de l .

Nous la notons : $\varphi_{k,l}$ d'où le schéma suivant :

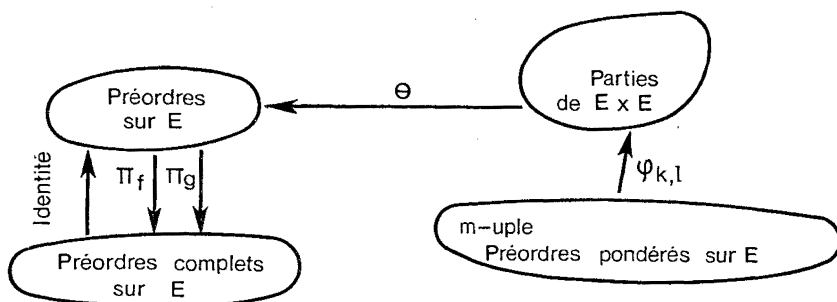


Figure 9

4.1.4. Application à l'analyse multicritère

Si nous voulons obtenir dans sa généralité une application de l'ensemble des m -uples de préordres pondérés sur E sur l'ensemble des préordres complets sur E , il nous suffit d'utiliser l'une des deux applications :

$$\Pi_f \circ \theta \circ \varphi_{k,l} \text{ ou } \Pi_g \circ \theta \circ \varphi_{k,l}$$

applications que nous appellerons : *electre-f* et *electre-g*.

Cela revient à l'application d'un m -uple d'ordres sur E dans l'ensemble de préordres sur E .

Exemple d'application d'electre-f et g :

Soit $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$

Supposons connus 5 préordres sur E .

$P_1, P_2 \dots P_7$, de même importance (ces préordres sont complets) :

$$(\forall i \leq 7) (p_i = 1/7).$$

Nous convenons de représenter chaque préordre P_i par une colonne telle que : $x_j P_i x_k \Leftrightarrow x_j$ se trouve, dans la colonne, à une ligne précédente, ou à la même ligne que x_k .

D'où le tableau représentatif des 5 préordres :

P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
x_1	$x_1 x_2$	x_3	x_2	x_2
x_3	x_4	x_1		
x_4	x_3	x_2	$x_1 x_3 x_4$	x_3
x_2		x_4		x_4

Pour chaque couple d'éléments x_j, x_k de $E \times E$, nous calculons :

- 1) nombre de préordres P_i pour lesquels $x_j P_i x_k$ est vérifiée
- 2) Sup (rang de x_j — rang de x_k).

Nous obtenons les deux tableaux 1 et 2 suivants :

TABLEAU 1

$x_j \backslash x_k$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	5	4	4	5
x_2	2	5	3	4
x_3	2	2	5	4
x_4	1	1	1	5

TABLEAU 2

$x_j \backslash x_k$	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	0	1	1	1
x_2	3	0	2	1
x_3	2	2	0	1
x_4	3	2	3	0

L'ensemble de concordance au niveau 4/5 est :

$$\begin{aligned} Q_{4/5} = \{ & (x_1x_1), (x_2x_2), (x_3x_3), \\ & (x_4x_4), (x_1x_2), (x_1x_3), \\ & (x_1x_4), (x_2x_4), (x_3x_4) \} \end{aligned}$$

L'ensemble de discordance au niveau 2 est :

$$\begin{aligned} D_2 = \{ & (x_2x_1), (x_2x_3), (x_3x_1), \\ & (x_3x_2), (x_4x_1), (x_4x_2), \\ & (x_4x_3) \} \end{aligned}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} I_{4/5,2} &= Q_{4/5} \cap \bar{D}_2 \\ &= \{ (x_1x_1), (x_1x_2), (x_1x_3), (x_1x_4), \\ & \quad (x_2x_2), (x_3x_3), (x_4x_4), \\ & \quad (x_2x_4), (x_3x_4) \} \end{aligned}$$

Représentons $I_{4/5,2}$ par un graphe (deux sommets sont liés par une flèche orientée du second vers le premier si et seulement si le couple d'éléments de E qu'il constitue appartient à $I_{4/5,2}$).

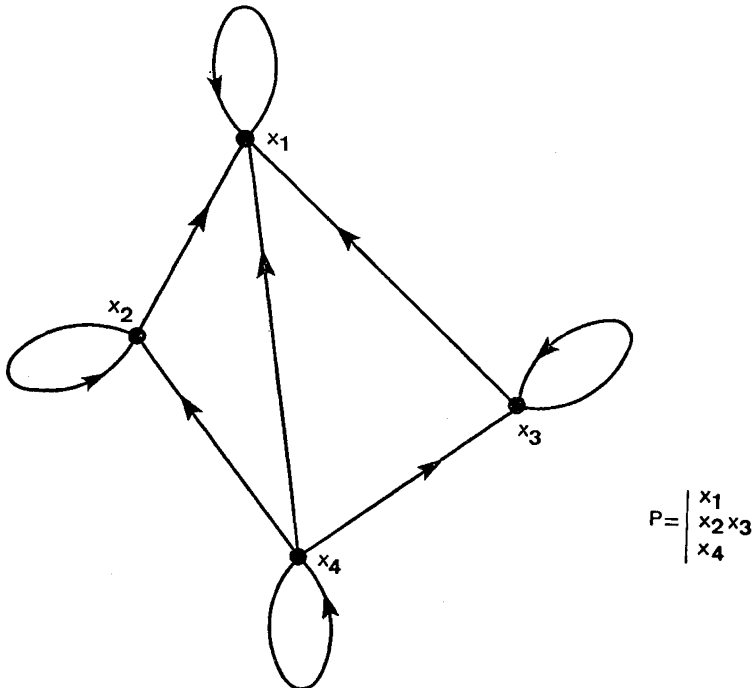


Figure 10

Nous pouvons compléter ce graphe par la représentation de la fermeture réflexo-transitive de $I_{4/5,2}$.

Nous obtiendrons ainsi la représentation d'un préordre.

Pour obtenir enfin un préordre complet, à partir de ce préordre, il nous suffit de calculer, pour chaque élément de E , la valeur de la fonction f :

$$\begin{aligned} f(x_1) &= 0 \\ f(x_2) &= f(x_3) = 1 \\ f(x_4) &= 2 \end{aligned}$$

Et le préordre complet P résultant des applications successives :

$(\varphi_{k,i}, \theta, \Pi_f)$ est représentable par la colonne suivante :

$$P : \begin{array}{|l} x_1 \\ x_2 \ x_3 \\ x_4 \end{array}$$

Si nous avions voulu appliquer g au lieu de f , nous aurions obtenu :

$$\begin{aligned} g(x_4) &= 0 \\ g(x_2) &= g(x_3) = 1 \\ g(x_1) &= 2 \end{aligned}$$

D'où le préordre

$$P : \begin{array}{|l} x_1 \\ x_2 \ x_3 \\ x_4 \end{array}$$

REMARQUE : Les préordres sont ici les mêmes. Mais dans le cas général, faut-il préférer l'application Π_f ou Π_g ?

Nous pourrions classer les éléments de E selon $f - g$.

Ce serait une application Π_{f-g} .

La méthode électre $f - g$ correspondante serait peut-être plus « objective ».

V. DONNEES SOUS FORME DE RELATIONS D'EQUIVALENCE

5.0. Supposons maintenant que chaque professeur i établisse seulement une relation d'équivalence sur l'ensemble des élèves, ou, ce qui revient au même, une partition des élèves.

Si le professeur responsable cherche, avec de telles informations, à construire une relation d'équivalence sur E , tenant compte le mieux possible de ces m opinions, il peut utiliser une des méthodes de « partition centrale », que nous allons développer ici.

Pour cela, nous allons d'abord définir un indice de distance entre deux ensembles quelconques de parties de E .

5.1. Indice général δ_1

Considérons deux ensembles quelconques de parties de E : R et Q

$$R \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]; Q \in \mathcal{P}[\mathcal{P}(E)] \quad (1)$$

Posons :

$$\psi(R, Q) = \frac{1}{|R|} \cdot \left[\sum_{Z \in R} \sup_{X \in Q} \frac{|X \cap Z|}{|X \cup Z|} \right]$$

C'est-à-dire pour chaque élément Z de R nous cherchons l'élément X de Q tel que le rapport des cardinaux de $X \cap Z$ et de $X \cup Z$ soit le plus grand possible; ψ est la moyenne des quotients ainsi obtenus.

Nous définissons l'application δ_1 par la relation :

$$\delta_1(R, Q) = 1 - \frac{1}{2} [\psi(R, Q) + \psi(Q, R)]$$

Démontrons que δ_1 est un indice de distance sur $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$

$$(i) \quad \psi(R, Q) \in [0, 1]$$

Donc : $\delta_1(R, Q) \in [0, 1]$

Donc : $\delta_1(R, Q) \geq 0$

(ii) δ_1 est symétrique par sa définition.

(iii) δ_1 est nul si et seulement si $R = Q$

En effet, $[R = Q] \Rightarrow [\psi(R, Q) = \psi(Q, R) = 1]$.

Donc : $[R = Q] \Rightarrow [\delta_1(R, Q) = 0]$

si $\delta_1(R, Q)$ est nul,

alors $\psi(R, Q) = \psi(Q, R) = 1$

Or, si $\psi(R, Q) = 1$, $Q \supset R$

et si $\psi(Q, R) = 1$, $R \supset Q$

Donc : $(\delta_1(R, Q) = 0) \Rightarrow (R = Q)$

δ_1 satisfait donc toutes les axiomes d'un indice de distance.

REMARQUE : δ_1 vaut 1 si et seulement si $\psi(Q, R) = \psi(R, Q) = 0$

$$(\forall X \in R)(\forall Z \in Q)(X \cap Z = \emptyset) \quad \text{c'est-à-dire : } \left(\bigcup_{z \in R} Z \right) \cap \left(\bigcup_{z \in Q} Z \right) = \emptyset$$

(1) $\mathcal{P}(E)$ est l'ensemble des parties de E ; $\mathcal{P}[\mathcal{P}(E)]$ est l'ensemble des parties de l'ensemble des parties de E .

5.2. Indice général δ_2

C'est un indice analogue à δ_1 mais variant entre 0 et l'infini.

Il est défini par :

$$\delta_2(R, Q) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{\psi(R, Q)} + \frac{1}{\psi(Q, R)} \right] - 1$$

$\psi(R, Q)$ étant compris entre 0 et 1, nous avons

$$\delta_2(R, Q) \geq 0$$

δ_2 est symétrique par définition :

$\delta_2(R, Q)$ est nul si et seulement si :

$$\psi(R, Q) = \psi(Q, R) = 1$$

c'est-à-dire : $R = Q$

δ_2 est donc aussi un indice de distance.

REMARQUE : Si chaque élément de R a une intersection vide avec chaque élément de Q , δ_2 est infini.

5.3. Application à l'analyse multicritère : « partitions centrales »

Nous cherchons à obtenir, à partir de m relations d'équivalence pondérées sur E , une relation d'équivalence unique sur E ; ou, ce qui revient au même, à partir de m partitions pondérées de E , une partition unique de E .

Soit P_i la partition définie par le professeur enseignant la matière i .

5.3.1. Partition médiane

Nous appelons « partition médiane », la partition P de E qui rend la somme pondérée des indices de distances de P aux P_i la plus petite possible.

Il faut donc minimiser :

$$\Pi_1(P) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta_1(P, P_i)$$

ou

$$\Pi_2(P) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta_2(P, P_i)$$

On « essaiera » ainsi successivement toutes les partitions de E . On retiendra la partition minimisant Π_1 (ou Π_2 , suivant l'indice choisi a priori).

La relation d'équivalence qu'elle représente est celle que nous adopterons et appellerons : « partition médiane ».

REMARQUE :

Pourquoi le nom « médiane » ?

La médiane d'une population statistique est la valeur qui minimise la somme des distances aux diverses observations. On peut généraliser cette définition :

Soit E un ensemble quelconque,

Soit A une partie finie de E ,

Soit δ un indice de distance sur E .

On dit que μ est la δ -médiane de A si et seulement si μ est l'élément de E qui minimise la quantité : $\sum_{x \in A} \delta(x, \mu)$.

5.3.2. Partition moyenne

Nous appelons « partition moyenne », la partition P de E qui rend la somme pondérée des carrés des indices de distance de P aux P_i la plus petite possible.

Il faut donc minimiser :

$$\rho_1(P) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta_1^2(P, P_i)$$

$$\rho_2(P) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta_2^2(P, P_i)$$

On « essaiera » encore toutes les partitions de E , successivement. On retiendra celle qui minimise ρ_1 (ou ρ_2 suivant l'indice choisi a priori).

La relation d'équivalence que représente P est appelée : « partition moyenne ».

REMARQUE :

Pourquoi le nom « moyenne » ?

La moyenne d'une distribution statistique est la valeur qui minimise la somme des carrés des distances aux diverses observations. On peut généraliser cette définition :

Soit E un ensemble quelconque.

Soit A une partie finie de E .

Soit δ un indice de distance sur E .

On dit que μ' est la δ -moyenne de A si et seulement si μ' est l'élément de E qui minimise la quantité : $\sum_{x \in A} \delta^2(x, \mu')$.

5.3.3. Dans quel cas pratique des professeurs formeront-ils des partitions dans l'ensemble des élèves?

Les notations $A-B-C-D-E$ créent des partitions, mais ces partitions étant ordonnées, ce sont plus exactement des préordres. Et la méthode de « partition centrale » ne sera pas intéressante.

Mais imaginons que pour organiser du travail en petits groupes, on demande aux professeurs de scinder au mieux leur classe. Et supposons que, pour des raisons administratives, les groupes de travail ne doivent pas varier suivant les matières. Le professeur responsable ne devra-t-il pas tout simplement agréger des partitions?

5.3.4. Existe-t-il un algorithme qui permette de cheminer dans l'espace des partitions de E , pour arriver au minimum de Π_1 , Π_2 , ρ_1 ou ρ_2 de manière systématique? Nous n'avons pas jusqu'ici trouvé de solutions à ce problème. Il semble que, dans les cas de dimensions raisonnables, l'exploration exhaustive sur ordinateur ne serait guère plus coûteuse que l'utilisation d'un algorithme rapidement convergent. Mais la question reste ouverte.

Une autre question importante demeure à l'ordre de nos préoccupations; les indices δ_1 et δ_2 sont-ils, ou non, des distances? C'est-à-dire vérifient-ils l'inégalité triangulaire?

VI. DONNEES SOUS FORME DE RELATIONS BINAIRES QUELCONQUES

6.0. Supposons maintenant que chaque professeur i établisse une relation binaire tout à fait quelconque sur E . Comment agréger ces m opinions?

Nous allons définir, comme dans les chapitres précédents, un indice de distance entre les parties de E .

6.1. Indice unipartite δ'_1

Soient A et B deux parties quelconques de E . Posons $Q = \{A\}$; $R = \{B\}$.

Appliquons l'indice « général » δ_1 aux ensembles de parties Q et R :

$$\delta_1(Q, R) = 1 - \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} = \frac{|A \Delta B|}{|A \cup B|}$$

Posons :

$$\delta'_1(A, B) = \delta_1(Q, R).$$

δ'_1 est bien un indice de distance sur les parties de E (variant entre 0 et 1).

REMARQUE : δ'_1 vérifie l'inégalité triangulaire, c'est-à-dire : δ'_1 est une distance sur $\mathcal{P}(E)$ ⁽¹⁾.

6.2. Indice unipartite δ'_2

Si nous avons appliqué l'indice général δ_2 aux ensembles de parties $Q = \{A\}$ et $R = \{B\}$, nous aurions trouvé :

$$\delta_2(Q, R) = \frac{|A \cup B|}{|A \cap B|} - 1 = \frac{|A \Delta B|}{|A \cap B|}$$

Posons alors :

$$\delta'_2(A, B) = \delta_2(Q, R)$$

L'indice δ'_2 ainsi défini varie entre 0 et l'infini (il vaut l'infini si A et B sont disjoints).

REMARQUE : La distance la plus courante dans $\mathcal{P}(E)$ n'est autre que la différence symétrique. Elle correspond au carré de la distance euclidienne entre les vecteurs formés par les diverses valeurs prises, dans E , par les fonctions caractéristiques correspondantes.

6.3. Application à l'analyse multicritère

Nous voulons agréger m relations binaires quelconques R_i , pondérées par des coefficients p_i .

A chaque relation binaire R_i , correspond une partie A_i du produit cartésien $E \times E$, d'après la relation :

$$(\forall x \in E) (\forall y \in E) ([x, y] \in A_i \Leftrightarrow xR_i y)$$

6.3.1. Relation binaire médiane

Nous cherchons la partie A du produit cartésien $E \times E$ qui minimise la somme pondérée des distances entre elle-même et tous les A_i ,

$$\Pi'_1(A) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta'_1(A, A_i)$$

ou

$$\Pi'_2(A) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta'_2(A, A_i)$$

c'est-à-dire :

$$\Pi'_1(A) = \sum_{i=1}^m p_i \frac{|A \Delta A_i|}{|A \cup A_i|}$$

ou

$$\Pi'_2(A) = \sum_{i=1}^m p_i \frac{|A \Delta A_i|}{|A \cap A_i|}$$

(1) La démonstration de cette propriété est due à M. Morlat, et se trouve en annexe C, p. 60.

La relation binaire correspondant à A sera appelée : « relation binaire médiane ».

Il nous faudra donc calculer successivement Π'_1 (ou Π'_2) pour toutes les parties de $E \times E$, ce qui nécessitera 2^{n^2} calculs différents. Mais si nous avons une idée a priori sur le type de structure sur E désiré, pour rendre compte des m relations binaires pondérées, les calculs seront moins nombreux. Par exemple, si nous voulons obtenir un ordre sur E , il n'y aura que $n!$ calculs de Π'_1 (ou Π'_2). Nous choisirons alors l'ordre qui minimise Π'_1 (ou Π'_2), que nous appellerons « l'ordre médian ».

EXEMPLE : $E = \{a, b, c\}$ (il y a 3 élèves)

$$n = 3$$

ensemble des matières = $\{1, 2, 3\}$

$$m = 3$$

coefficients : $p_1 = 2; p_2 = 1; p_3 = 1$

R_1 est définie par le tableau

	a	b	c
a	1	1	0
b	1	1	0
c	0	1	1

(fonction caractéristique de la partie de $E \times E$ correspondante)

R_2 est définie par le tableau

	a	b	c
a	1	0	0
b	0	0	1
c	0	1	0

R_3 est définie par le tableau

	a	b	c
a	0	0	1
b	1	0	0
c	0	1	1

Il y a 512 relations binaires possibles dans $E(2^{(3^2)} = 512)$, mais seulement 6 ordres totaux possibles ($3! = 6$).

Si donc le professeur responsable cherche à obtenir un ordre médian, et non pas une relation binaire médiane, les calculs seront extrêmement allégés.

Soit $0_1, 0_2, 0_3, 0_4, 0_5$ et 0_6 les 6 ordres à considérer.

$0_1 : a \geq b \geq c$ ou

	a	b	c
a	1	1	1
b	1	1	0
c	1	0	0

$0_2 : a \geq c \geq b$

$0_3 : b \geq c \geq a$

$0_4 : b \geq a \geq c$

$0_5 : c \geq b \geq a$

$0_6 : c \geq a \geq b$

Tableau représentatif des distances δ'_1 :

	0_1	0_2	0_3	0_4	0_5	0_6
R_1	1/2	2/3	1/2	1/2	2/3	4/5
R_2	7/8	5/7	7/8	5/7	5/7	7/8
R_3	3/4	3/4	4/7	3/4	4/7	4/7
Π'	2,625	2,797	2,446	2,464	2,618	3,046

$$(\Pi'_3 = 2,446 = \min \Pi')$$

Donc 0_3 est l'ordre médian cherché

$$\underline{b \geq c \geq a}$$

6.3.2. Relation binaire moyenne

Si au lieu de chercher à minimiser la somme pondérée des distances aux R_i , nous avons voulu minimiser la somme pondérée des carrés des distances aux R_i , nous aurions obtenu la relation binaire moyenne ou l'ordre moyen.

La relation binaire moyenne sera telle que la quantité ρ'_1 (ou ρ'_2) est la plus petite possible avec :

$$\rho'_1(R) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta_1'^2(R, R_i)$$

$$\rho'_2(R) = \sum_{i=1}^m p_i \cdot \delta_2'^2(R, R_i)$$

6.4. Remarque à propos de données préordinales, correspondant chacune au même nombre de classes

Il est actuellement fréquent que les professeurs ne notent plus leurs élèves de 0 à 20 ou de 0 à 10, mais leurs donnent une lettre A, B, C, D ou E , suivant qu'ils les estiment excellents, bons, moyens, mauvais ou très mauvais. Ils créent alors dans l'ensemble de la classe une partition en 5 parties ordonnées, c'est-à-dire qu'ils établissent un préordre déterminant 5 sous-classes.

Si le professeur responsable doit tenir compte au mieux de ces m préordres, il pourra bien sûr utiliser une des méthodes déjà vues pour ce type de données (Electre f ou g , ou bien même, somme pondérée des rangs). Mais nous présentons ici une autre méthode, également adaptée à ce cas particulier.

Supposons que le professeur i donne la partition :

$$P_i = \{ A_i, B_i, C_i, D_i, E_i \}$$

(Les A_i sont des ensembles d'élèves notés A , etc...)

et que le professeur j donne :

$$P_j = \{ A_j, B_j, C_j, D_j, E_j \}$$

Posons

$$\delta_3(P_i, P_j) = \delta'_1(A_i, A_j) + \delta'_1(B_i, B_j) + \delta'_1(C_i, C_j) + \delta'_1(D_i, D_j) + \delta'_1(E_i, E_j)$$

δ_3 est évidemment un indice de distance sur ce type de partitions.

C'est même une distance (l'inégalité triangulaire, étant vérifiée pour δ'_1 sera vérifiée pour δ_3).

δ_3 nous permet donc de trouver la partition $P = \{ A, B, C, D, E \}$ médiane ou moyenne, par des procédés analogues à ceux déjà utilisés.

REMARQUE :

Posons :

$$\delta_4(P_i, P_j) = \delta'_2(A_i, A_j) + \delta'_2(B_i, B_j) + \delta'_2(C_i, C_j) + \delta'_2(D_i, D_j) + \delta'_2(E_i, E_j)$$

δ_4 est bien sûr un indice de distance, et permet encore de déterminer une partition centrale (moyenne ou médiane).

6.5. Remarque à propos de données sous forme d'ensemble de parties définies

Supposons maintenant que chaque professeur donne son avis sur chaque élève en répondant par oui ou par non aux questions suivantes :

« Est-il intelligent ?

Est-il dissipé?

Est-il travailleur?

Est-il bon élève? »

Le professeur i déterminera ainsi un ensemble de 4 parties définies (chacune correspondant à une qualité bien précise). Soit P_i cet ensemble

$$P_i = X_i^1, X_i^2, X_i^3, X_i^4.$$

Le professeur responsable de la classe cherchera à donner des appréciations à chaque élève du style :

« intelligent, travailleur, bon élève, mais dissipé ».

L'indice δ_3 que l'on vient d'utiliser s'applique ici :

$$\delta_3(P_i, P_j) = \sum_{k=1} \delta'_1(X_i^k, X_j^k)$$

Cet indice est même une distance.

Il permet de déterminer un ensemble central (moyen ou médian) de 4 parties définies.

L'appartenance éventuelle à chacune de ces 4 parties permettra de qualifier globalement chaque élève.

REMARQUE : On aurait pu adopter δ_4 au lieu de δ_3 .

* * *

Ainsi le professeur responsable tiendra compte d'une part, des m critères que forment les m matières, et d'autre part des critères d'intelligence, de dissipation, de travail et de résultats effectifs. Cela n'est-il pas, en quelque sorte, de l'analyse « bi-multicritère » ?

VIII. DONNEES SOUS FORME DE RELATIONS QUELCONQUES

8.0. Supposons que chaque professeur i établisse seulement une relation R_i quelconque, entre les élèves, qui n'est pas binaire mais « k -aire » (k étant le même pour tous les professeurs).

8.1. Chaque relation R_i est alors équivalente à une partie du produit cartésien

$$E_k = \underbrace{E \times E \times \dots \times E}_{k \text{ fois}}$$

Les indices « unipartites » δ'_1 et δ'_2 peuvent s'appliquer à l'ensemble des R_i , et permettent chacun d'obtenir une relation k -aire médiane, et une relation k -aire moyenne, par des procédés analogues à ceux employés précédemment.

8.2. Cas particulier : la préordonnance

Une relation quaternaire particulière entre les éléments de E est la préordonnance ⁽¹⁾. Elle correspond à un préordre dans le produit cartésien $E \times E$.

Supposons que chacun des professeurs donne des informations du style : il y a plus de différence entre les élèves x_j et $x_{j'}$ qu'entre les élèves x_k et $x_{k'}$.

On pourra noter cela : $(x_j, x_{j'}) \geq (x_k, x_{k'})$

ou bien : $(x_j, x_{j'}, x_k, x_{k'}) \in R_i$

(R_i étant la relation quaternaire correspondant à l'opinion du professeur i).

Le professeur responsable de la classe pourra chercher la relation quaternaire moyenne ou médiane, par la méthode que l'on vient de voir. Mais cette dernière relation sera très difficilement interprétable, en général; et il cherchera plutôt à obtenir une préordonnance comme structure finale.

Il peut chercher la préordonnance médiane ou moyenne (de même qu'on a pu obtenir un ordre médian ou moyen ⁽²⁾). Mais les calculs sont, de toute façon, fort longs et le professeur responsable aurait sans doute intérêt à appliquer une des méthodes se basant sur des données préordinales (dans l'ensemble $E \times E$).

Ainsi, la méthode Electre- f ou g permet, à partir d'un m -tuple de préordonnances pondérées sur E , d'obtenir une préordonnance unique. La somme pondérée des rangs le permettrait aussi.

VII. CONCLUSION

Nous venons ainsi de voir douze méthodes d'analyses multicritères, ou d'agrégation des opinions. Peut-on dire que certaines de ces méthodes soient « meilleures » que d'autres? Cela dépend du critère que l'on utilise pour juger de ces méthodes : la quantité d'information nécessaire, le coût, la précision, la rapidité, etc...

Il faudrait, à proprement parler, faire une analyse multicritère sur l'ensemble des analyses multicritères!

En fait, le genre de méthode que l'on adoptera dépend essentiellement du type de problème réel qu'il faut traiter. L'ensemble M des m critères peut être, comme ici, un ensemble de professeurs, ou de matières.

Mais il peut aussi représenter :

- des états de la nature,
- des critères de classification, d'affectation, d'ordonnement, des items, des variables,
- des branches d'activité,
- des électeurs,
- les opinions des membres d'un groupe, etc...

(1) Voir annexe B p. 60.

(2) Voir paragraphe 7-3-1.

Quant à l'ensemble E des n éléments structurés par les m critères qui était ici un groupe d'élèves, il peut représenter aussi :

- des actions possibles,
- des objets, biens ou ressources économiques, des observations,
- des agents économiques, des individus,
- des candidats à un titre ou un poste,
- des lieux où installer une usine,
- des activités,
- des moyens de communication,
- des hommes politiques, etc...

car dans tous les domaines apparaissent de tels problèmes.

C'est ainsi que, dans la vie quotidienne, nous pratiquons à chaque instant l'analyse multicritère ou l'agrégation des opinions. Mais nous faisons cela instinctivement, sans le savoir, tout comme M. Jourdain faisait de la prose.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. BENAYOUN, B. ROY et B. SUSSMANN, « Manuel de référence du programme Electre », Note de Synthèse et Formation n° 25 de la Direction Scientifique de la SEMA, juin 1966.
- [2] J. C. CELLARD, B. LABBE et SAVISKY, « Le programme Elisée. Présentation et Applications », *METRA*, vol. VI, n° 3, 1967, pp. 503-520.
- [3] B. ROY, « Pourquoi des approches multi-critères et comment », Note de travail n° 108, nov. 1969, Direction Scientifique de la SEMA.
- [4] B. ROY, « Algèbre moderne et théorie des graphes » (Application aux Sciences Économiques et sociales), Dunod, 1969.
- [5] B. ROY, « A propos de l'agrégation d'ordres complets : quelques considérations théoriques et pratiques », Colloque du C.N.R.S. sur la décision, Aix-en-Provence, juillet 1967.
- [6] B. ROY, « Classement et choix en présence de points de vue multiples », *R.I.R.O.* 2^e année, n° 8, 1968, p. 57-75.
- [7] K. J. ARROW, « Social choices and individual values », John Wiley and Sons, New York, 1963, 2^e édition.
- [8] M. ROUX, « Sur un algorithme de classification automatique », Thèse de 3^e cycle Fac. des Sciences de Paris.
- [9] I. C. LERMAN, « Les bases de la classification automatique », Gauthiers Villars, 1970.
- [10] J. P. BENZECRI, « Sur les algorithmes de classification. Problèmes et méthodes de la taxicromie », ISUP, 1966.
- [11] SHEPARD et KRUSKAL, « Non metric methods for scaling and for factor analysis », *American Psychologist*, vol. 19, 1964.
- [12] L. LEBART J. P. FÉNELON « Statistique et Informatique Appliquées », Dunod, 1971.
- [13] M. BARBUT et B. MONJARDET, « Ordre et classification. Algèbre et combinatoire », Hachette Université, 1970.

ANNEXE A

Nous supposons connus les signes de logique mathématique suivants :

$\forall, \exists, \nexists, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \in, \circ$

\forall quelque soit

\exists il existe... tel que

\nexists il n'existe pas... tel que

\Rightarrow implique

\Leftrightarrow est équivalent

\in appartient à

\circ signe de composition d'applications

\bar{A} signifie : complémentaire de A

$E \times E$: produit cartésien, ensemble des couples d'éléments de E

$\mathcal{T}(E)$: ensemble des parties de E

relation

k -aire : relation entre k éléments de E

\mathbf{R} : ensemble des réels

$|X|$: cardinal de l'ensemble X

ANNEXE B

Rappel de quelques définitions

Soit E un ensemble fini quelconque.

Indice de distance : voir [8].

Une application δ du produit cartésien $E \times E$, dans \mathbf{R} est un « indice de distance », si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :

(i) $\delta(x, y)$ est nul si et seulement si $x = y$:

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow (x = y))$$

(ii) δ est une application symétrique :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\delta(x, y) = \delta(y, x))$$

Distance :

Un indice de distance δ est appelé « distance » s'il vérifie l'inégalité triangulaire :

(iii) $(\forall x \in E)(\forall y \in E)(\forall z \in E)(\delta(x, y) \leq \delta(xz) + \delta(zy))$

Hiérarchie : voir [8].

Un ensemble \mathcal{H} de parties de E forme une hiérarchie sur E si et seulement si les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

(i) Toute partie à un seul élément appartient à \mathcal{H} :

$$(\forall x \in E)((x) \in \mathcal{H})$$

(ii) L'ensemble E appartient à \mathcal{H} : $E \in \mathcal{H}$

(iii) Si deux éléments A et B de \mathcal{H} ont une intersection non vide, l'un des deux contient l'autre :

$$(\forall A \in \mathcal{H})(\forall B \in \mathcal{H})(A \cap B \neq \emptyset \Rightarrow (A \subset B \text{ ou } B \supset A))$$

Hiérarchie indicée : voir [8].

Une hiérarchie \mathcal{H} sur E est dite « indicée » s'il existe une application φ de \mathcal{H} dans l'ensemble des réels positifs telle que :

$$(i) (\forall x \in E)(\varphi(\{x\}) = 0)$$

c'est-à-dire : pour toute partie à un seul élément, φ est nul.

$$(ii) (\forall A \in \mathcal{H})(\forall B \in \mathcal{H})((A \supset B \text{ et } A \neq B) \Rightarrow (\varphi(A) > \varphi(B)))$$

c'est-à-dire : si A et B sont deux éléments quelconques d'une hiérarchie et que A contient strictement B , alors $\varphi(A)$ est strictement plus grand que $\varphi(B)$.

Ultramétrie :

Un indice de distance δ est appelé « ultramétrie », s'il vérifie l'inégalité suivante :

$$(iii) (\forall x \in E)(\forall y \in E)(\forall z \in E)(\delta(x, y) \leq \sup[\delta(x, z), \delta(z, y)])$$

* Toute ultramétrie est une distance.

* Il existe une bijection entre l'ensemble des ultramétries sur E et l'ensemble des hiérarchies indicées sur E .

Préordre :

Une relation binaire sur E est appelée « préordre » si elle est réflexive et transitive.

Préordre complet :

Un préordre est dit « complet » s'il permet de comparer tout couple d'éléments de E :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in E)(xPy \text{ ou } yPx)$$

Ordre :

Une relation binaire sur E est appelée « ordre » si elle est réflexive, antisymétrique et transitive.

Ordre complet :

Un ordre est dit « complet » s'il permet de comparer tout couple d'éléments de E .

Relation d'équivalence :

Une relation binaire sur E est dite « d'équivalence » si elle est réflexive, symétrique et transitive.

* Les relations d'équivalence et les ordres sont des préordres particuliers.

Règle de souveraineté :

Soit E un ensemble de n éléments.

Soit M un ensemble de m critères sur E .

Soit \mathcal{R} l'ensemble des ordres totaux sur E .

Une application z de \mathcal{R}^m dans \mathcal{R} respecte la règle de souveraineté si et seulement si :

$$(\forall R \in \mathcal{R})(z(\underbrace{R, R \dots R}_{m \text{ fois}}) = R)$$

Cela signifie, dans le cas où les m critères représentent les opinions de m électeurs d'une certaine assemblée, et z est la règle d'agrégation choisie pour obtenir une seule opinion générale, que, s'il y a unanimité pour un certain ordre R sur E , l'ordre général de l'assemblée sera R .

Règle de loyauté :

Soit $R_1, R_2 \dots R_m$ un m -t-uple d'ordres totaux sur E .

Soient x_K , et $x_{K'}$ deux éléments quelconques de E .

$$G_{(R_1, R_2 \dots R_m)}(x_K, x_{K'}) = \{i/x_K R_i x_{K'}\}$$

Soit \mathcal{R} l'ensemble des ordres totaux de E .

Une application z de \mathcal{R}^m dans \mathcal{R} satisfait à la règle de loyauté si et seulement si :

$$(\forall x_K \in E)(\forall x_{K'} \in E)(\forall X \in \mathcal{R}^m)(\forall X' \in \mathcal{R}^m / G_{X'}(x_K, x_{K'}) \supset G_X(x_K, x_{K'}))$$

$$([x_K z(X) x_{K'}] \Rightarrow [x_K z(X') x_{K'}])$$

Pour clarifier cette formulation, reprenons le même exemple d'assemblée électorale.

Si les opinions se modifient en faveur de x_K par rapport à $x_{K'}$, et que la règle d'agrégation choisie z donnait $x_K > x_{K'}$, elle donne encore : $x_K > x_{K'}$.

Préordonnance :

Un ensemble E est muni d'une préordonnance s'il existe un préordre sur les couples d'éléments de E .

* L'existence d'un indice de distance implique celle d'une préordonnance.

ANNEXE C

Théorème démontré par M. Morlat :

Soient A et B deux parties quelconques de E .

$$\text{Posons } d(A, B) = \frac{|A \Delta B|}{|A \cup B|}$$

d est une distance sur $\mathcal{P}(E)$

Démonstration :

On a toujours $0 \leq d(A, B) \leq 1$

$d(A, B) = 0$ si et seulement si $A = B$

$d(A, B) = 1$ si et seulement si $A \cap B = \emptyset$.

Il suffit de montrer que pour 3 parties A, B, C , on a :

$$d(A, C) < d(A, B) + d(B, C)$$

Nous noterons :

$$\text{card}(A \cap B \cap C) = u$$

$$\text{card}(A \cap B) = u + z$$

$$\text{card}(A \cap C) = u + y$$

$$\text{card}(B \cap C) = u + x$$

$$\text{card}(A) = u + y + z + a$$

$$\text{card}(B) = u + x + z + b$$

$$\text{card}(C) = u + x + y + c$$

Les 7 nombres u, x, y, z, a, b, c , ne sont astreints à aucune autre condition que d'être positifs ou nuls, et il faut montrer qu'on a toujours l'inégalité :

$$\frac{a + c + x + z}{a + c + x + y + z + u} \leq \frac{a + b + x + y}{a + b + x + y + z + u} + \frac{b + c + y + z}{b + c + x + y + z + u} \quad (1)$$

On montrera d'abord que cette inégalité est vraie quand $b = y = 0$; en effet, elle s'écrit dans ce cas, en posant $a + c + x + z + u = n$:

$$\frac{a + c + x + z}{n} = \frac{a + x}{n} + \frac{c + z}{n} \leq \frac{a + x}{n - c} + \frac{c + z}{n - a}$$

ce qui s'écrit également :

$$\frac{a + c + x + z}{a + c + x + z + u} \leq \frac{a + x}{a + x + z + u} + \frac{c + z}{c + x + z + u}$$

Si y n'est pas nul, on peut écrire :

$$\frac{a + c + x + z}{a + c + x + y + z + u} \leq \frac{a + c + x + z}{a + c + x + z + u}$$

$$\frac{a + x}{a + x + z + u} \leq \frac{a + x + y}{a + x + y + z + u}$$

$$\frac{c + z}{c + x + z + u} \leq \frac{c + y + z}{c + x + y + z + u}$$

D'où on déduit immédiatement, en additionnant membre à membre les deux dernières inégalités écrites en confrontant avec la précédente, qu'on a aussi l'inégalité :

$$\frac{a + c + x + z}{a + c + x + y + z + u} \leq \frac{a + x + y}{a + x + y + z + u} + \frac{c + y + z}{c + x + y + z + u} \quad (3)$$

Enfin passons de là au cas général, où b lui-même n'est pas nul; on a évidemment toujours, les fractions qui figurent dans les inégalités précédentes étant toutes inférieures ou égales à 1 :

$$\frac{a + x + y}{a + x + y + z + u} \leq \frac{a + x + y + b}{a + x + y + z + u + b}$$

et

$$\frac{c + y + z}{c + x + y + z + u} \leq \frac{c + y + z + b}{c + x + y + z + u + b}$$

d'où résulte que l'inégalité (1), relative au cas le plus général, est toujours vérifiée.

Nota : la démonstration précédente s'étend de façon immédiate au cas où le cardinal des parties finies est remplacé par une mesure positive quelconque.

ANNEXE D

IPHIGENIE

ou

Une treizième méthode d'analyse multicritère

D.0. Les méthodes dites « Iphigénie » (1) sont des méthodes de regroupement et séparation ayant pour but de définir très simplement des partitions (ou relations d'équivalence).

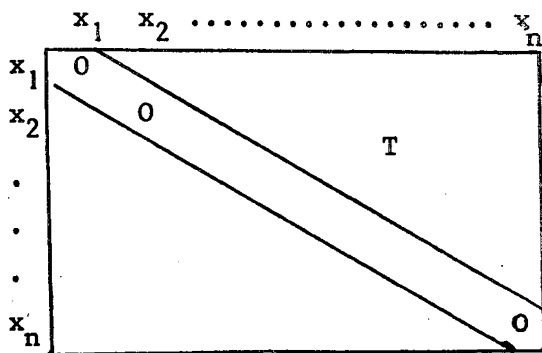
D.1. IPHIGENIE — I

La méthode IPHIGENIE I s'applique dans le cas de données cardinales (voir chapitre II). E est un ensemble de n élèves notés par m professeurs. A chaque élève x_k correspond un vecteur à m dimensions.

Calculons la distance euclidienne (2) entre ces vecteurs pris 2 à 2 :

$$\delta(x_k, x_{k'}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m (y_k^i - y_{k'}^i)^2}$$

L'ensemble de ces distances se traduit par une matrice D carrée symétrique, à n^2 termes, et dont la diagonale ne contient que des zéros. Le triangle T , au-dessus de la diagonale comporte $\frac{n(n-1)}{2}$ termes.



(1) Dans la mythologie grecque, Iphigénie, fille d'Agamemnon et de Clytemnestre, est la sœur d'Électre.

(2) Dans le cas général, on calculera non pas la simple distance euclidienne δ , mais :

$$D^i(x_k, x_{k'}) = \sqrt{\sum_{i=1}^m p_i (y_k^i - y_{k'}^i)^2} \quad \text{où } p_i \text{ est le poids du critère } i.$$

(3) Le lecteur verra que les méthodes Iphigénie sont basées uniquement sur des pré-ordonnances. Les résultats seront donc identiques si la base du calcul n'est plus la distance euclidienne mais son carré (ce qui peut alléger les calculs).

Cherchons la plus petite valeur de T , et décidons de regrouper les deux éléments de E correspondants.

Puis cherchons la plus grande valeur de T et décidons de séparer les 2 éléments de E correspondants.

Éliminons alors ces deux valeurs extrêmes et, dans ce qui reste de T de

$$\left(\frac{n(n-1)}{2} - 2 \right), \text{ termes}$$

cherchons de nouveau la plus petite et la plus grande valeur, donnant lieu respectivement à un regroupement et à une séparation.

Puis, éliminons ces deux nouvelles valeurs extrêmes de T et continuons le même procédé jusqu'à obtenir une incohérence.

Il y aura, en effet, incohérence lorsque nous aurons par exemple :

x_i déjà regroupé avec x_j

x_j déjà séparé de x_k

et qu'un nouveau regroupement donne :

x_i à regrouper avec x_k .

(Ce sera une incohérence par regroupement. Nous pourrions également obtenir une incohérence par séparation.)

Lorsqu'une incohérence se produit, on arrête le processus et on regarde quels ont été les regroupements et les séparations effectués, ce qui détermine une partition de E . C'est notre résultat.

D.2. IPHIGENIE — II

D.2.0. La méthode Iphigénie II applique encore le même procédé de regroupement-séparation sur un tableau de distances, construit non plus à partir d'un ensemble de vecteurs mais à partir d'un ensemble de relations binaires.

Supposons que nos m professeurs aient défini m relations binaires sur E . Chaque relation binaire correspond à une partie de $E \times E$. Or nous savons calculer des distances entre des parties d'un ensemble (voir VI). Posons par exemple :

$$(\forall i \leq m)(\forall j \leq m) \left(\delta(R_i, R_j) = \left| \frac{R_i \Delta R_j}{R_i \cup R_j} \right| \right)$$

Nous pouvons donc construire notre matrice carrée D (à m^2 termes) et appliquer le procédé décrit dans Iphigénie I.

Mais nous obtiendrons une partition, non plus de l'ensemble des élèves mais de l'ensemble des matières. Ce n'est plus de l'analyse multicritère mais une démarche du même type que les analyses factorielles ou de correspondances.

REMARQUE :

Il est relativement rare dans la réalité de se trouver devant des relations binaires tout à fait quelconques.

Le problème se posera plutôt pour des relations d'ordre, de préordre ou des relations d'équivalence.

D.2.1. Utilisations pratiques

Dans notre exemple, si chaque professeur établit une relation d'ordre sur l'ensemble E des élèves, Iphigénie II regroupera les matières donnant des résultats analogues. Peut-être aurons-nous ainsi la partition :

Mathématiques. Physique.
 Français. Latin. Philosophie.
 Histoire. Géographie. Sciences Naturelles.
 Gymnastique.
 Dessin.

D.2.2. Supposons maintenant qu'un psychosociologue essaie de déterminer les facteurs qui peuvent faire qu'un élève travaille plus ou moins dans une certaine matière.

Il étudiera pour chaque élève :

- le lieu d'habitation,
- l'âge,
- le Q.I.,
- la profession du père,
- celle de la mère,
- le nombre de frères, et de sœurs etc...

La plupart de ces variables, supposées explicatives, ne sont ni cardinales, ni ordinales et établiront seulement des relations d'équivalence sur E . Nous traiterons ces relations d'équivalence avec les préordres complets relatifs aux diverses matières, par la méthode Iphigénie II.

La partition résultante sera peut-être :

- Lieu d'habitation, Mathématiques, Physique.
- Q.I., Philosophie, Français, Latin.
- Age, nombre de frères et sœurs, gymnastique.
- Profession du Père, Histoire, Géographie.
- Sciences Naturelles.
- Dessin.
- Profession de la mère, etc...

Et nous en tirerons des observations du style :

Le Q.I. est en relation essentielle avec la réussite en philosophie, elle-même liée à celles en français et latin.

ou bien :

La profession de la mère ne semble pas influencer sur le fait qu'un élève soit bon ou mauvais, etc...

D.3. IPHIGENIE III

La méthode Iphigénie III applique sur l'ensemble des observations (ou des élèves) le même procédé de regroupement-séparation que précédemment à partir de distances non plus définies sur des données cardinales mais sur des données sous forme de relations d'équivalence.

Elle fait donc correspondre à un m -tuple de relations d'équivalence sur E une relation d'équivalence unique sur E (comme en 5-3-3).

Principe :

Soit F_k l'ensemble des classes d'équivalence correspondant au critère k .

$$\text{Soit } F = \bigcup_{k \in [1, m]} F_k$$

Chaque série de données attachée à la $i^{\text{ème}}$ observation x_i (ou à l'élève x_i) se traduit par une partie X_i de F telle que :

$$(\forall i \in [1, n])(\forall k \in [1, m])(F_k \cap X_i = \begin{cases} \text{classe d'équivalence selon le } k^{\text{ème}} \text{ cri-} \\ \text{tère à laquelle appartient } x_i \end{cases})$$

Nous pouvons ainsi trouver une distance entre tout couple x_i et x_j d'éléments de E (ou d'élèves) par la formule :

$$d(x_i, x_j) = \frac{|X_i \Delta X_j|}{|X_i \cup X_j|}$$

Ce qui nous permet de construire notre tableau de distances D et d'appliquer le procédé de regroupement-séparation déjà vu dans les méthodes Iphigénie I et II.