

VO-KHAC KHOAN

**La régularisation dans les problèmes combinatoires et  
son application au problème des tournées de livraison**

*Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série  
verte*, tome 3, n° V1 (1969), p. 91-104

[http://www.numdam.org/item?id=RO\\_1969\\_\\_3\\_1\\_91\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RO_1969__3_1_91_0)

© AFCET, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de  
recherche opérationnelle. Série verte » implique l'accord avec les condi-  
tions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute uti-  
lisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une  
infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit conte-  
nir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

## LA REGULARISATION DANS LES PROBLEMES COMBINATOIRES ET SON APPLICATION AU PROBLEME DES TOURNEES DE LIVRAISON

par VO-KHAC KHOAN <sup>(1)</sup>

---

Résumé. — *Dans les problèmes combinatoires, les évaluations nécessaires pour l'exploitation par ramification, guidage et contrôle se font, en général, à l'aide d'un classement hiérarchique basé sur certaines notions topologiques. Nous nous proposons de chercher la topologie la plus adaptée. Pour le problème des circuits hamiltoniens optimaux d'un graphe, les calculs sont poussés à fond et montrent que l'on a intérêt à remplacer les coûts bruts par d'autres coûts tenant compte des positions relatives des sommets.*

*Cinq exemples numériques sont traités.*

### 1. IDEES DE BASE

La méthode principale de résolution des problèmes d'optimisation du type combinatoire est l'exploitation par « Ramification, Guidage et Contrôle » (cf. Lawler et Wood [6]). Le guidage se fait au moyen d'une certaine évaluation et le contrôle se fait à l'aide d'une autre évaluation (ces deux évaluations pourraient être identiques). Ces évaluations se calculent en général à partir d'un classement hiérarchique basé sur certaines *notions topologiques* (notions de voisinage). Ces notions topologiques sont en général basées directement sur les données brutes. Or, dans de nombreux problèmes combinatoires, il existe des transformations qui changent ces données brutes sans changer les positions relatives des diverses solutions réalisables et, par conséquent, sans changer la (ou les) solution optimale. De telles transformations sont dites *admissibles*. Un classement hiérarchique ne peut donc être correct que s'il est invariant sous les transformations admissibles. En fait, on ne connaît pas toutes les transformations admissibles. Il est cependant facile de dégager un ensemble de transformations admissibles élémentaires. Sous l'influence de l'ensemble de telles transformations, il se peut qu'il existe plusieurs

---

(1) Professeur associé à l'Université d'Orléans, Conseiller Scientifique à la Direction des Études de la CEGOS, Maître de Conférences à l'École Polytechnique.

coûts invariants mais qui donnent des classements hiérarchiques distincts. Il nous reste donc à choisir parmi ces coûts invariants celui qui possède le plus de signification économique.

Prenons un exemple : le problème des tournées (à un ou plusieurs dépôts distributeurs) et à un grand nombre de clients. Dans les algorithmes théorico-heuristiques, on cherche toujours à mettre dans une même tournée des clients voisins. On pourrait croire que deux clients sont voisins lorsque le coût de passage entre ces deux clients est faible. Il n'en est rien. Pour le prouver, il suffit d'examiner le paradoxe suivant : Considérons deux clients  $A$  et  $B$  dont le coût de passage est plus faible que tous les autres coûts de passage ; il est raisonnable de penser que dans la recherche d'une solution optimale, *on peut envisager que  $A$  et  $B$  sont sur une même tournée*. Construisons alors autour de ces clients deux barrières très difficilement franchissables. Le coût de passage entre  $A$  et  $B$  devient alors très grand (plus grand que tous les autres coûts de passage). Il est dès lors *tout aussi raisonnable* de penser que dans la recherche d'une solution optimale, *on peut admettre que  $A$  et  $B$  ne sont pas sur une même tournée*. Or — et voici le paradoxe — dans les deux cas, la solution optimale est la même. Construire une barrière autour d'un client est une transformation admissible laissant invariant l'ensemble des solutions optimales. La topologie du problème des tournées n'a de sens que si l'on utilise des coûts qui ne sont pas changés par les transformations admissibles ; les coûts bruts ne sont pas bons pour définir cette topologie.

Nous allons étudier des transformations admissibles élémentaires et les coûts se déduisant de ces transformations ; puis nous interpréterons certains de ces coûts et indiquerons leur utilisation pour construire les solutions optimales ou quasi-optimales.

Nous nous limitons, dans cette première note, au problème du commis-voyageur. Nous montrerons, dans une prochaine note, comment la méthode peut être adaptée au problème des tournées proprement dit.

## 2. ETUDE THEORIQUE

### 2.1. Le problème posé

Soit  $G$  un graphe non orienté connexe et complet à  $N$  sommets ( $N \geq 3$ ) valorisé par une matrice symétrique  $c(i, j)$  ( $1 \leq i, j \leq N$ ). Le nombre fini  $c(i, j)$  représente le coût de passage entre le sommet  $i$  et le sommet  $j$ , il peut être positif, négatif ou nul. Les coûts de passage peuvent ne pas vérifier l'inégalité du triangle. On appelle cycle hamiltonien tout cycle passant une fois et une seule par tout sommet du graphe ; le coût d'un cycle hamiltonien est, par définition la somme (algébrique) des coûts des arêtes formant le cycle. Le problème posé est le suivant :

*On cherche, parmi l'ensemble des cycles hamiltoniens un cycle de coût minimal.*

## 2.2. Transformations

### 2.2.1. Transformations admissibles

*On appelle transformation admissible toute transformation, sur la matrice des coûts, laissant inchangée la hiérarchie relative des cycles hamiltoniens.*

En particulier, une transformation admissible laisse inchangé l'ensemble des solutions optimales.

*L'image de la matrice des coûts bruts par une transformation admissible s'appelle une matrice de coûts admissibles.*

L'intérêt de cette notion est immédiat : on peut toujours remplacer la matrice des coûts bruts par une matrice de coûts admissibles pour résoudre le problème des circuits hamiltoniens optimaux.

**Proposition** (triviale)

*La composition de deux transformations admissibles est une transformation admissible.*

### 2.2.2. Transformations idéales

Pour une matrice de coûts donnée, une transformation admissible n'est intéressante que si elle dépend de cette matrice, car la nouvelle topologie n'est intéressante que si elle dépend étroitement de la topologie initiale.

*Définition*

Soient  $M$  une matrice donnée,  
 $J_M$  une transformation admissible,  
 $\mathcal{T}$  un ensemble de transformations admissibles.

*On dit que la transformation  $J_M$  est idéale pour  $M$  relativement à  $\mathcal{T}$  si  $J_{TM}TM = J_MM, \forall T \in \mathcal{T}$ .*

L'intérêt de cette notion est triviale : une transformation idéale efface l'effet des autres transformations admissibles préalablement appliquées à la matrice.

*Une matrice de coûts admissibles est dite idéale (pour  $M$ , relativement à l'ensemble  $\mathcal{T}$ ) si elle est l'image de  $M$  par une transformation idéale.*

Nous essayons de construire une transformation idéale relativement à un ensemble très grand  $\mathcal{T}$  de transformations admissibles. La matrice idéale de coûts obtenue remplacera la matrice initiale de coûts pour l'établissement de la liste hiérarchique des arêtes.

### 2.2.3. Similitudes

Soient  $\lambda$  un nombre réel et  $(\alpha_i)$  un vecteur à  $N$  dimensions ( $1 \leq i \leq N$ ).

*Définitions*

On appelle *homothétie* ( $\lambda$ ) la transformation consistant à multiplier la matrice des coûts par la constante  $\lambda$ .

On appelle *translation*  $(\alpha_i)$  la transformation consistant à ajouter à chaque rangée  $i$  (ligne et colonne) la constante  $\alpha_i$ .

Dans le cas particulier où  $\alpha_i = 0$  sauf  $i = i_0$ , la transformation s'appelle une *translation partielle* du sommet  $i_0$ , dans le cas où tous les  $\alpha_i$  sont égaux, la transformation s'appelle une *équi-translation*.

On appelle *similitude* (resp. *équi-similitude*) la composition d'une homothétie et d'une translation (resp. équi-translation).

Deux matrices de coûts sont dites *semblables* (resp. *équivalentes*) si l'une est l'image de l'autre par une similitude (resp. équi-similitude).

### Proposition

- (i) Toute homothétie  $(\lambda)$  est admissible si  $\lambda > 0$  ;
- (ii) Toute translation  $(\alpha_i)$  est admissible ;
- (iii) Toute similitude est admissible.

En effet, une homothétie  $(\lambda)$  multiplie le coût de chaque cycle hamiltonien par  $\lambda$  ; une translation  $(\alpha_i)$  augmente le coût de chaque cycle hamiltonien par  $2(\alpha_1 + \dots + \alpha_i + \dots + \alpha_N)$ , d'où la proposition.

Notons que l'assertion (ii) a été utilisée par Little, Murty, Sweeney et Karel [7] pour « réduire » la matrice des coûts.

Nous ne connaissons pas de transformations admissibles autres que les similitudes. Par conséquent, nous allons concentrer notre étude sur les similitudes. Nous montrerons qu'il existe une matrice équivalente à une matrice idéale et semblable à une matrice donnée.

## 2.3. Régularisation des coûts

### 2.3.1. Coûts centralisés

On appelle *coût centralisé*, en un sommet  $k$ , de l'arête  $(i, j)$  le nombre :

$$c(i, j; k) = c(i, j) - c(i, k) - c(k, j)$$

### Proposition

La matrice des coûts centralisés en  $k$  est une matrice admissible ; elle est idéale relativement au groupe des translations telles que  $\alpha_k = 0$ .

En effet, on obtient la matrice des coûts centralisés en  $k$  à l'aide de la translation  $(\alpha_i)$  avec  $\alpha_k = 0$  et  $\alpha_i = -c(i, k)$  si  $i \neq k$ . D'autre part, si l'on applique au préalable à la matrice donnée une translation partielle  $\alpha_i$  (avec  $i \neq k$ ), la matrice des coûts centralisés en  $k$  ne change pas.

La proposition précédente explique (dans une certaine mesure) le succès relatif des méthodes utilisant la liste hiérarchique basée sur les coûts centralisés (cf. Clark et Wright [3], Bertier [2], I.B.M. [4]). L'interprétation économique du coût centralisé  $c(i, j; k)$  est par ailleurs évidente : son opposé est égal au gain obtenu en passant directement de  $i$  à  $j$  au lieu de faire le transit en  $k$ .

### 2.3.2. Coûts moyens

On appelle *coût moyen* de l'arête  $(i, j)$  le nombre :

$$c_1(i, j) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N c(i, j, k)$$

Il est évident que la matrice des coûts moyens est admissible ; plus précisément, elle est semblable à la matrice donnée, car :

$$c_1(i, j) = c(i, j) - \frac{1}{N} [\Gamma(i) + \Gamma(j)]$$

où  $\Gamma(i) = \sum_{k \neq i} c(i, k)$  est la *centration* du sommet  $i$  (notion due à Bertier [2]).

### 2.3.3. Coûts régularisés

Soit  $p$  un entier  $\geq 1$  ; on désigne par  $c_{p+1}(i, j)$  le coût moyen calculé à partir des coûts  $c_p(i, j)$ .

On appelle *coût régularisé* de l'arête  $(i, j)$  la limite (si elle existe) de  $c_p(i, j)$  quand  $p$  tend vers l'infini.

#### Théorème d'existence

Quand  $p$  tend vers l'infini, le nombre  $c_p(i, j)$  tend vers

$$c_\infty(i, j) = c(i, j) + \frac{\Gamma}{(N-1)(N-2)} - \frac{\Gamma(i) + \Gamma(j)}{N-2}$$

où  $\Gamma$  est la centration totale du graphe :  $\Gamma = \Gamma(1) + \dots + \Gamma(N)$ .

#### Preuve

On établit aisément que :

$$c_p(i, j) = c(i, j) + \lambda_p \Gamma - \mu_p [\Gamma(i) + \Gamma(j)]$$

avec :

$$\lambda_p = \frac{1}{(N-2)(N-1)} + \frac{1}{N(N-1)} \left( \frac{2-N}{N} \right)^p - \frac{2}{N(N-2)} \left( \frac{2}{N} \right)^p$$

$$\mu_p = \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-2} \left( \frac{2}{N} \right)^p$$

D'où le théorème.

**REMARQUE**

Le théorème précédent reste valable lorsque l'on définit  $c_p(i, j)$  par la relation de récurrence :

$$c_{p+1}(i, j) = c_p(i, j) - \frac{1}{M} [\Gamma_p(i) + \Gamma_p(j)]$$

où  $M$  est un nombre fixé  $\geq N$ .

**Corollaire du théorème**

*Dans la matrice des coûts régularisés, tous les sommets possèdent une centration nulle :*

$$\Gamma_\infty(i) = 0 \quad , \quad \forall i = 1, 2, \dots, N$$

\*  
\* \*

La régularisation est une transformation admissible, car c'est une translation dont le vecteur translateur a pour composantes

$$\frac{\Gamma}{2(N-1)(N-2)} - \frac{\Gamma(i)}{N-2}.$$

On se demande alors si elle est idéale relativement au groupe des translations. La réponse est affirmative.

**2.3.4. Propriété d'invariance des coûts régularisés****Théorème**

*La régularisation est une transformation idéale relativement au groupe des translations.*

**Preuve**

Appliquons au préalable à la matrice des coûts  $c(i, j)$  une translation partielle  $(\alpha_k)$  ; la centration  $\Gamma(k)$  s'augmente de  $(N-1)\alpha_k$ , les autres centrations s'augmentent de  $\alpha_k$  et la centration totale s'augmente de  $2(N-1)\alpha_k$ . Les coûts régularisés ne changent donc pas.

**Application**

La régularisation de deux matrices *semblables* fournit deux matrices *équivalentes* et par conséquent la *même* liste hiérarchique des arêtes.

### 2.3.5. Interprétation économique des coûts régularisés

#### Théorème

Désignons par :

$\langle C \rangle$  le coût moyen de tous les cycles hamiltoniens

$C(i, j)$  le coût moyen des cycles hamiltoniens passant par  $(i, j)$

$C(\overline{i, j})$  le coût moyen des cycles hamiltoniens évitant  $(i, j)$

$G(i, j) = C(\overline{i, j}) - C(i, j)$  le gain moyen obtenu en passant par  $(i, j)$

Alors, nous avons les relations suivantes :

$$\langle C \rangle = \frac{\Gamma}{N-1}$$

$$C(i, j) = c_{\infty}(i, j) + \langle C \rangle$$

$$C(\overline{i, j}) = \langle C \rangle - \frac{2}{N-3} c_{\infty}(i, j)$$

$$G(i, j) = -\frac{N-1}{N-3} c_{\infty}(i, j)$$

#### Preuve

a) Le nombre de cycles hamiltoniens est  $\frac{1}{2} (N-1)!$  en considérant comme identiques deux cycles hamiltoniens décrits en sens opposés (mais cela est sans importance). Le nombre de cycles hamiltoniens passant par l'arête  $(i, j)$  est égal à  $(N-2)!$  La somme des coûts de tous les cycles hamiltoniens est donc  $(N-2)! \frac{\Gamma}{2}$ . Le coût moyen d'un cycle hamiltonien est donc :

$$\frac{\frac{1}{2} (N-2)! \Gamma}{\frac{1}{2} (N-1)!} = \frac{\Gamma}{N-1}$$



b) Par un raisonnement analogue, le coût moyen  $C(i, j)$  des cycles hamiltoniens passant par  $(i, j)$  est :

$$\begin{aligned}
 C(i, j) &= \langle c(i, k) \rangle + \langle c(j, h) \rangle + c(i, j) + \langle c(k, h) \rangle (N-3) \\
 &= \frac{1}{N-2} \sum_{\substack{k \neq i \\ k \neq j}} c(i, k) + \frac{1}{N-2} \sum_{\substack{h \neq i \\ h \neq j}} c(h, j) \\
 &\quad + c(i, j) + \frac{N-3}{(N-2)(N-3)} \sum_{\substack{k \neq h \\ h, k \neq i, j}} c(h, k) \\
 &= \frac{1}{N-2} [\Gamma - \Gamma(i) - \Gamma(j)] + c(i, j) \\
 &= \langle C \rangle + c_{\infty}(i, j)
 \end{aligned}$$

c) Le calcul de  $C(\bar{i}, \bar{j})$  se fait d'une manière semblable :

$$\begin{aligned}
 C(\bar{i}, \bar{j}) &= 2 \langle c(i, h) \rangle + 2 \langle c(j, k) \rangle + (N-4) \langle c(h, k) \rangle \\
 &= \frac{2}{N-2} \sum_{h \neq i, j} c(i, h) + \frac{2}{N-2} \sum_{k \neq i, j} c(k, j) \\
 &\quad + \frac{N-4}{(N-2)(N-3)} \sum_{\substack{k \neq h \\ k, h \neq i, j}} c(h, k) \\
 &= \frac{2}{N-3} \left[ \frac{\Gamma(i) + \Gamma(j)}{N-2} + \frac{N-4}{2N-4} \Gamma - c(i, j) \right] \\
 &= \langle C \rangle - \frac{2c_{\infty}(i, j)}{N-3}
 \end{aligned}$$

d) La formule donnant le gain  $G(i, j)$  se déduit aisément des autres formules.

### 3. UTILISATIONS PRATIQUES

D'après les propriétés des coûts régularisés, on remplace avantageusement la matrice des coûts bruts  $c(i, j)$  par celle des coûts régularisés  $c_{\infty}(i, j)$ . Pour des raisons pratiques (plus précisément pour éviter la division et l'utilisation des nombres négatifs), nous allons introduire la matrice des affinités qui est une matrice équivalente à la matrice des coûts régularisés.

### 3.1. Affinités et liste hiérarchique

#### 3.1.1. Définition de l'affinité

On appelle *affinité de l'arête*  $(i, j)$  le nombre  $a(i, j)$  défini par :

$$a(i, j) = \Gamma(i) + \Gamma(j) - (N - 2)c(i, j)$$

où  $\Gamma(i)$  est la centration du sommet  $i$ .

On appelle *affinité d'un cycle hamiltonien* la somme des affinités des arêtes du cycle.

#### 3.1.2. Propriétés des affinités

##### Théorème

(i) Les matrices d'affinités associées à deux matrices de coûts semblables sont équivalentes.

(ii) La somme des affinités des arêtes passant par un sommet  $i$  ne dépend pas du sommet, et est égale à la centration totale  $\Gamma$ .

(iii) Entre le gain moyen  $G(i, j)$  et l'affinité  $a(i, j)$  il existe la relation suivante :

$$a(i, j) = \langle C \rangle + \frac{(N - 3)(N - 2)}{(N - 1)} G(i, j)$$

où  $\langle C \rangle$  est le coût moyen des cycles hamiltoniens.

(iv). Entre l'affinité  $A$  d'un cycle hamiltonien quelconque et son coût  $C$ , il existe la relation suivante :

$$A + (N - 2)C = 2\Gamma$$

Ce théorème est conséquence immédiate des théorèmes établis au paragraphe précédent.

#### 3.1.3. Liste hiérarchique naturelle

On appelle *liste hiérarchique naturelle des arêtes* le classement des arêtes par ordre d'affinités décroissantes.

L'assertion (iv) du théorème précédent explique pourquoi on prend l'ordre décroissant ; l'assertion (iii) explique l'adjectif « naturelle » ; l'assertion (i) montre que cette liste hiérarchique ne change pas quand on applique au préalable à la matrice des coûts bruts une similitude quelconque.

La signification économique de l'assertion (iii) est importante. Lorsque  $N = 3$  (problème de 3 villes), l'affinité d'une arête ne dépend pas de cette arête, elle est égale à  $\langle C \rangle$  c'est-à-dire au coût de l'unique cycle hamiltonien ; dans la liste hiérarchique les trois arêtes occupent toujours le même rang.

### 3.2. Algorithme hiérarchique

#### 3.2.1. Description de l'algorithme

- (i) Établir la liste hiérarchique naturelle des arêtes.
- (ii) Construire *hiérarchiquement* un cycle hamiltonien (une arête est sélectionnée si elle suit hiérarchiquement les arêtes retenues et si elle ne forme ni fourche ni boucle avec ces dernières arêtes).
- (iii) Calculer l'affinité  $A_d$  de ce cycle hamiltonien hiérarchique.
- (iv) Calculer l'affinité des sommets (par définition, l'affinité d'un sommet  $i$  est la demi-somme des deux plus grandes affinités des arêtes passant par  $i$ ), soit  $A_e$  la somme des affinités des sommets.
- (v) Alors, les nombres  $A_d$  et  $A_e$  sont respectivement une *évaluation par défaut* et une *évaluation par excès* de l'affinité  $A_0$  d'un cycle hamiltonien optimal :

$$A_d \leq A_0 \leq A_e.$$

#### 3.2.2. Utilité de l'algorithme

L'algorithme permet de trouver rapidement une évaluation approximative de l'affinité d'un cycle hamiltonien optimal et de donner une précision sur cette approximation.

Lorsque  $N = 4$ , le cycle hamiltonien hiérarchique est optimal d'après la proposition suivante :

#### Proposition (triviale)

*Dans un quadrangule (graphe à 4 sommets), deux arêtes opposées possèdent une même affinité ; l'affinité d'une arête est égale au coût du cycle hamiltonien (unique) ne passant pas par l'arête.*

Cette proposition montre en particulier que la régularisation transforme tout losange géométrique à diagonales inégales en « carré », les deux diagonales se classent toujours dernières, après les quatre côtés. On évite ainsi la tentation de visiter d'abord la ville la plus « proche ».

Lorsque  $N$  n'est pas tellement grand ( $N$  de l'ordre de 10), l'algorithme hiérarchique permet l'obtention très rapide d'un excellent cycle hamiltonien, comme le montre les exemples suivants.

#### 3.2.3. Deux exemples d'application

EXEMPLE *a* (problèmes à 9 villes).

Cet exemple est tiré d'un article de Marconi [8] concernant d'ailleurs un problème de tournées. L'exemple est repris par Bertier [2]. La matrice triangulaire inférieure est la matrice des coûts bruts donnés ; la matrice triangulaire supérieure est celle des affinités calculées.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
0		137	163	138	135	90	198	146	185
1	18		72	194	233	188	156	125	87
2	7	25		150	119	172	133	186	197
3	10	7	6		136	182	108	168	116
4	22	13	22	19		151	245	81	92
5	20	11	6	4	20		60	183	166
6	10	21	17	20	12	30		123	169
7	11	19	3	5	29	6	20		180
8	16	35	12	23	38	19	24	16	

On trouve aisément que le cycle hamiltonien hiérarchique est 0, 6, 4, 1, 3, 5, 7, 2, 8, 0, d'affinité  $A_s = 1803$ . D'autre part la somme des affinités des sommets est  $A_e = 1806$ . L'affinité  $A_0$  optimale vérifie donc :

$$1803 \leq A_0 \leq 1806.$$

Si l'on prend le cycle hamiltonien hiérarchique comme cycle optimal, on commet une erreur au plus de 3 unités d'affinité et par suite de  $\frac{3}{9-2}$  unité de coûts. Comme le coût d'un cycle hamiltonien doit être entier, le cycle hamiltonien hiérarchique est optimal. Son coût est :

$$C = \frac{2\Gamma - 1\ 803}{N - 2} = 83.$$

EXEMPLE *b* (problème à 10 villes).

Cet exemple est tiré d'un article de Barachet [1]. La matrice triangulaire inférieure est celle (donnée) des coûts ; la matrice triangulaire supérieure est celle (calculée) des affinités.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
1		945	606	457	406	397	741	348	391	625
2	28		631	474	423	430	678	373	400	562
3	56	28		559	500	539	619	490	469	503
4	72	45	20		639	582	470	557	608	570
5	81	54	30	10		587	419	610	709	623
6	85	56	28	20	22		586	737	588	470
7	80	63	56	72	81	63		625	404	374
8	113	85	56	45	41	28	80		667	509
9	89	63	40	20	10	28	89	40		680
0	80	63	56	45	41	63	113	80	40	

Le cycle hamiltonien hiérarchique est alors 12309546871 d'affinité totale  $A_a = 6792$  donc de coût total  $\frac{4\,916 \times 2 - 6\,792}{8} = 380$ . L'évaluation par excès est  $A_e = 6998$ . On a donc :  $6792 \leq A_0 \leq 6998$ . Par conséquent le coût du cycle hiérarchique diffère de celle du cycle optimal au plus de 3%.

Nous montrerons plus tard (exploitation par ramification guidage et contrôle) que le cycle hamiltonien optimal est 12345098671, de coût total 378. Notons alors que l'arête 59 est très bien classée (dans la liste hiérarchique naturelle) mais ne se figure pas dans le cycle optimal. Ce résultat s'explique par le fait suivant : l'arête 59 figure dans tous les cycles « quasi-optimaux » 12309546871, 12340956871, 12340598671, 12340958671 de coûts respectifs 380, 381, 383, 383.

### 3.3. Exploitation par ramification, guidage et contrôle

Le principe général de l'exploitation par « Ramification, Guidage et Contrôle » est bien connu (cf. par exemple Lawler et Wood [6], Roy, Nghiem et Bertier [10]). Cependant, dans notre algorithme, le guidage

n'est pas donné par l'évaluation par excès, car en général cette évaluation diffère trop de la valeur exacte.

### 3.3.1. Algorithme R.G.C.

(i) La ramification est dichotomique (sélectionner ou rejeter une arête) et *utilise la liste hiérarchique naturelle* (le candidat est l'arête la mieux classée après les arêtes retenues).

(ii) Le contrôle se fait à l'aide d'une évaluation par excès analogue à celle donnée au paragraphe 3.2.1.

Évidemment, dans le calcul de l'affinité d'un sommet, on interdit les arêtes formant des fourches ou des boucles avec les arêtes déjà sélectionnées (évaluation  $v'_2$  de Nghiem proposée dans Bertier [2]).

(iii) Le guidage est très simple ; il est donné par l'évaluation par défaut  $A_d$  (affinité du cycle hamiltonien hiérarchique) ; soit  $(i, j)$  une arête candidate ; on calcule  $A_d(i, j)$  et  $A_d(\overline{i}, \overline{j})$  ; si  $A_d(i, j) \geq A_d(\overline{i}, \overline{j})$  on sélectionne  $(i, j)$  ; sinon on la rejette.

### 3.3.2. Exemples d'application

Nous avons appliqué l'algorithme R.G.C. à deux problèmes : le problème à 10 villes de Barachet (exposé précédemment) et un problème à 9 villes de Robacker [9] page 13 repris par Bertier [2] page 75. Le guidage indiqué conduit par une simple « descente » immédiatement à la solution optimale. Cependant pour contrôler que la solution obtenue par guidage est bien optimale il faut pousser le calcul un peu plus loin. Les divers exemples numériques montrent par ailleurs que l'évaluation par défaut  $A_d$  est plus proche de l'évaluation exacte que l'évaluation par excès  $A_e$  ; les solutions obtenues par guidage sont donc meilleures que ne l'indique le contrôle (cf. Vokhac [11]).

### 3.3.3. Guidage perfectionné

On peut perfectionner le guidage simple indiqué précédemment de la manière suivante :

On compare  $A_d(i, j)$  et  $A_d(\overline{i}, \overline{j})$ . Si le premier nombre est supérieur ou égal au second nombre, on sélectionne l'arête  $(i, j)$ . Dans le cas contraire, on ne rejette pas automatiquement cette arête. On cherche les deux arêtes  $(i, k)$  et  $(j, l)$  qui se présentent dans l'ordre hiérarchique. On calcule l'évaluation par défaut obtenue en sélectionnant  $(i, j)$  et en rejetant soit  $(i, k)$ , soit  $(j, l)$ , soit les deux. On compare ces évaluations par défaut obtenues à  $A_d(i, j)$ . Le résultat de cette comparaison décide la voie à s'engager.

Nous avons appliqué ce guidage perfectionné au problème à 33 villes de Karg et Thompson [5], repris par Bertier [2]. Nous avons trouvé la solution optimale par une simple « descente » (cf. Vokhac [11]).

#### 4. ADAPTATIONS A D'AUTRES PROBLEMES

La méthode de régularisation des coûts exposée précédemment pour le problème du voyageur de commerce s'adapte facilement à d'autres problèmes combinatoires. Nous montrerons, dans une prochaine note, comment on l'adapte au problème des tournées de livraison à un ou à plusieurs centres distributeurs et au problème d'ordonnancement de type purement séquentiel (cf. Vokhac [11], Nghiêm [12]).

Citons ici une adaptation très simple permettant de traiter des problèmes de chaîne hamiltonienne optimale.

##### 4.1. Problème de chaîne hamiltonienne optimale à extrémités arbitraires

Il suffit d'ajouter à l'ensemble des  $n$  sommets donnés un  $(n + 1)$  sommet fictif dont le coût de passage à tout autre sommet est nul. On se ramène alors au problème de cycle hamiltonien optimal à  $N = N + 1$  sommets.

##### 4.2. Problème de chaîne hamiltonienne optimale à extrémités fixées

On suppose que tous les coûts de passage sont positifs. On remplace le coût de passage entre les deux sommets fixés par zéro. On se ramène alors au problème de cycle hamiltonien minimal.

#### SOURCES REFERENTIELLES

- [1] BARACHET (L. L.). *Graphic solution of the traveling salesman problem*, J.O.R.S.A., 5 (1957), 6, 841-845.
- [2] BERTIER (P.). « Procédures pour élaborer des tournées de distributions », *Metra*, série spéciale, n° 8 (1966), 1-114.
- [3] CLARK (G.) et WRIGHT (J. W.). *Scheduling of vehicles from a central depot to a number of delivery points*, J. O. R. S. A., 12 (1964), 4, 568-581.
- [4] I.B.M. Programmes CAROL et P.V.S. (1968).
- [5] KARG (R. L.) et THOMPSON (G. L.). « An heuristic approach to solving traveling salesman problems », *Management Science*, 10 (1964), 225-248.
- [6] LAWLER (E. L.) et WOOD (D. E.). « Branch-and-Bound Methods », *A Survey Operations Research*, 14 (1966), 4, 699-719.
- [7] LITTLE (J. D. C.), MURTY (K. G.), SWEENEY (D. W.) et KAREL (C.). *An algorithm for the travelling salesman problem*, J.O.R.S.A., 11 (1963), 6, 863-1040.
- [8] MARCONI (R.). « La ricerca operativa applicata al problema dei rifornimenti », *Quaderni R.O.*, n° 1 (1962).
- [9] ROBACHER (J. T.). *Some experiments on the travelling salesman problem*, R. M. 1521, Rand Corporation, 28 juillet 1955.
- [10] ROY (B.), NGHIEM (Ph. T.) et BERTIER (P.). « Procédure S.E.P. ». Trois exemples numériques SEMA, Direction Scientifique, Note de travail n° 32 (1965). Programmes linéaires en nombres entiers et procédure S.E.P., *Metra*, 4 (1965), n° 4.
- [11] VO-KHAC (K.). *Le problème des tournées*, CEGOS, Direction des Études, notes 1, 2, 3 et 4 (1968-1969). (avec la collaboration des Ingénieurs de la CEGOS et de CORNEILLE, Stagiaire à la CEGOS).
- [12] NGHIÊM (Ph. T.). — Un problème de tournées de distribution à 49 villes. CEGOS, Direction des Études (1969).