REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE VERTE

MIHAI F. A. OPRESCU

Le calcul du flux optimum dans un réseau par la méthode des compensations successives

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 3, nº V1 (1969), p. 39-59

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1969__3_1_39_0>

© AFCET, 1969, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

R.I.R.O.
(3e année, N° V-1, 1969, p. 39-59)

LE CALCUL DU FLUX OPTIMUM DANS UN RÉSEAU PAR LA MÉTHODE DES COMPENSATIONS SUCCESSIVES

par Mihai F. A. Oprescu

Résumé. — *L'article se propose la description d'une nouvelle méthode de calcul du flux optimum dans les réseaux (M.C.S.), qui présente des avantages remarquables du point de vue de sa programmation sur les calculateurs électroniques.*

A la base de l'algorithme exposé se trouve le principe de l'équilibre successif des entrées et sorties de chaque sommet.

La première partie de l'ouvrage décrit en détail le principe de la méthode, dans la seconde partie sont démontrées deux propriétés fondamentales, la troisième se réfère à l'application pratique de la méthode, tandis que la quatrième contient des remarques utiles regardant l'enregistrement des dates dans la mémoire, ainsi que le schéma logique détaillé du calcul pour la programmation de l'algorithme sur les calculateurs électroniques.

L'ouvrage se termine par quelques conclusions concernant les avantages de la méthode proposée par rapport à l'algorithme de Ford-Fulkerson.

L'utilisation de plus en plus intense des calculateurs électroniques pour la résolution des problèmes économiques, impose souvent la révision des algorithmes, devenus classiques, dans le sens de la simplification de leur programmation.

Ce processus d'adaptation, tout en imposant l'analyse profonde des algorithmes existants, conduit parfois à la découverte de nouveaux algorithmes qui en diffèrent dans leur principe.

La méthode des compensations successives (MCS) que nous proposons ici, est le résultat des efforts faits pour trouver un algorithme plus simple que celui de Ford-Fulkerson concernant le calcul du flux optimum dans un réseau, en vue de la résolution par systèmes électroniques.

La première et la deuxième partie de ce travail contiennent le principe fondamental de la méthode, la troisième partie se réfère à son application pratique, tandis que la quatrième présente le schéma logique de calcul, détaillé pour la programmation sur calculateur électronique.

1. CONSIDERATIONS PRELIMINAIRES

Soit $G = (X, U)$ un graphe fini sans boucle, où l'on associe à chaque arc un nombre $c(u) \geqslant 0$ dénommé « la capacité de l'arc u » et où il n'existe qu'un seul point d'entrée x_0 et un seul point de sortie x_n.

Un flux φ du réseau est une quantité $\varphi(u)$ associée à chaque arc $u \in U$ de façon que :

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant c(u) \tag{1}$$

$$\sum_{u \in U_x^-} \varphi(u) - \sum_{u \in U_x^+} \varphi(u) = 0 \qquad \forall\, x \in X,\ x \neq x_0 \text{ et } x \neq x_n \tag{2}$$

le symbole U_x^- représente l'ensemble des arcs incidents à l'intérieur du sommet x, tandis que U_x^+ représente l'ensemble des arcs incidents à l'extérieur de x. On associe au graphe $G = (X, U)$ la matrice

$$A' = (a'_{ij}) \quad i, j = 0, 1, \ldots, n$$

dont les éléments $a'_{ij} \geqslant 0$ sont respectivement égaux à la capacité de l'arc ou bien nuls selon que l'arc correspondant appartient ou non à l'ensemble U.

MCS se propose de commencer par cette matrice et d'arriver de façon itérative, à la matrice qui indique le flux optimum.

L'idée fondamentale de l'algorithme consiste à établir l'équilibre successif des capacités des arcs incidents à l'intérieur et des arcs incidents à l'extérieur dans chaque sommet x, par la compensation du déséquilibre entre la capacité des arcs incidents à l'intérieur et à l'extérieur des sommets adjacents à ceux-ci.

Étudiant les relations (1) et (2) on remarque que la matrice associée au flux d'un graphe a des éléments non négatifs, au plus égaux à la capacité des arcs correspondants, tandis que la somme des éléments situés sur une ligne est égale à la somme des éléments de la colonne ayant le même indice.

En vue de faciliter la présentation, on apporte les modifications suivantes à la matrice A' :

— on supprime la colonne d'indice $j = 0$ et la ligne d'indice $i = n$, qui représentent respectivement le flux d'entrée en x_0 et de sortie par x_n, flux qui doit être calculé ;

— on transporte la ligne $i = 0$ à la place de la ligne $i = n$ qu'on a antérieurement supprimée, étant donné que la somme des éléments de la ligne $i = 0$ représente le flux d'entrée dans le réseau, comparé à la somme des éléments de la colonne $j = n$ qui représente le flux de sortie du réseau.

On obtient ainsi une matrice $A(n \times n)$ telle que :

$$a_{ij} = a'_{ij} \quad , \quad i = 1, \ldots, n-1 \,;\, j = 1, \ldots, n$$

$$a_{nj} = a'_{0j} \quad , \quad j = 1, \ldots, n.$$

Cette matrice correspond au graphe dans lequel on a condensé les sommets x_0 et x_n du réseau en un sommet unique x_n. On borde ensuite la matrice A, à droite et en bas, respectivement par les vecteurs

$L = (l_1, ..., l_n)$ et $C = (c_1, ..., c_n)$ dont les composantes sont données par les relations

$$(3) \qquad \begin{aligned} l_i &= \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \quad , \quad i = 1, ..., n \\ c_j &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \quad , \quad j = 1, ..., n \end{aligned}$$

Ensuite, on borde la matrice résultante, à droite et par le bas respectivement par les vecteurs $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ dont on calcule les composantes seulement pour $i = j$ de la manière suivante :

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\text{si } l_i = c_i \rightarrow \lambda_i = \mu_i = 0 \\ &\text{si } l_i < c_i \rightarrow \lambda_i = 0 \quad \text{et} \quad \mu_i = |l_i - c_i \\ &\text{si } l_i > c_i \rightarrow \lambda_i = l_i - c_i \quad \text{et} \quad \mu_i = 0. \end{aligned}$$

TABLEAU 1

$i \backslash j$	1	2	3	... h	... n	L	λ
1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	... a_{1h}	... a_{1n}	l_1	λ_1
2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	... a_{2h}	... a_{2n}	l_2	λ_2
3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	... a_{3h}	... a_{3n}	l_3	λ_3
.						.	.
.						.	.
.						.	.
k	a_{k1}	a_{k2}	a_{k3}	... a_{kh}	... a_{kn}	l_k	λ_k
.						.	.
.						.	.
.						.	.
$n-1$	$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,3}$	... $a_{n-1,h}$	... $a_{n-1,n}$	l_{n-1}	λ_{n-1}
n	a_{01}	a_{02}	a_{03}	... a_{0h}	... a_{0n}	l_n	λ_n
c	c_1	c_2	c_3	... c_h	... c_n		
μ	μ_1	μ_2	μ_3	... μ_h	... μ_n		

Grâce à cette distribution, on obtient une situation claire de l'équilibre des entrées-sorties de chaque sommet du graphe. Les éléments $\lambda_i \neq 0$ du vecteur λ, indiquent de combien la capacité des arcs incidents à l'extérieur dépasse celle des arcs incidents à l'intérieur dans les sommets x_i.

Les éléments $\mu_i \neq 0$ du vecteur μ indiquent de combien la capacité des arcs incidents à l'intérieur dépasse la capacité des arcs incidents à l'extérieur dans les sommets x_i.

On observe que :

$$(5) \qquad \sum_{i=1}^{n} l_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} c_j$$

et

$$(6) \qquad \sum_{i=1}^{n} l_i - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{i=1}^{n} \min (l_i, c_i) = \sum_{j=1}^{n} c_j - \sum_{j=1}^{n} \mu_j$$

Des relations (5) et (6), il résulte :

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{j=1}^{n} \mu_j. \tag{7}$$

2. LES PROPRIETES FONDAMENTALES DE LA MCS

Pour continuer, énonçons-la. (1)

Proposition 1. Dans un graphe fini $G = (X, U)$ sans boucle, avec un seul point d'entrée x_0 et un seul point de sortie x_n, le flux obtenu par la méthode des compensations successives est maximum.

Démonstration. Soit λ_{i_0} le premier élément du vecteur λ, différent de zéro. On essaye de compenser cet excès de capacité des arcs incidents à l'extérieur du sommet x_{i_0}, en diminuant la capacité des arcs incidents à l'intérieur, des sommets adjacents à x_{i_0} dont la capacité des arcs incidents à l'intérieur est plus grande que celle des arcs incidents à l'extérieur. On fait cette compensation jusqu'à l'annulation de λ_{i_0}, ensuite on passe à l'élément suivant λ_{i_1} différent de zéro, et ainsi de suite, jusqu'à l'annulation de tous les éléments de λ. Il est à remarquer que l'ordre dans lequel les éléments $\lambda_i \neq 0$ du vecteur λ sont compensés, est indifférent du point de vue théorique. Pratiquement, nous allons convenir de compenser ces éléments dans l'ordre croissant de l'indice i.

Si un élément $\lambda_{i_k} \neq 0$ ne peut être compensé, on essaie l'annulation de la valeur restante λ'_{i_k} poursuivant les éléments $a_{i_k j} \neq 0$ de la ligne i_k dans l'ordre croissant de la longueur des chemins qui lient le sommet x_{i_k}, aux sommets dans lesquels prédomine la capacité des arcs incidents intérieurs.

Si λ'_{i_k} n'a pas pu être compensé, la valeur restante λ''_{i_k} sera annulée en poursuivant les éléments $a_{i_k j} \neq 0$ de la ligne i_k dans l'ordre croissant des indices j, par exemple.

Ces blocages signalent que le flux qu'on essaye de faire passer dans le réseau est trop grand. L'opération de compensation dans ces points de blocage se réalise donc en déséquilibrant le réseau. Cette opération peut être conçue de différentes manières. Pour faciliter la programmation sur calculateur, on convient de procéder comme suit.

a) On compense l'élément $\lambda_{i_k} \neq 0$ autant que possible, en utilisant le surplus de capacité des arcs incidents à l'intérieur des sommets adjacents à x_{i_k}.

b) On compense la quantité λ'_{i_k} restante à la suite de la compensation partielle de λ_{i_k}, avec le premier élément différent de zéro de la ligne i_k. Soit $a_{i_k j_0}$ cet élément.

Si $\lambda'_{i_k} \leqslant a_{i_k j_0}$, alors la valeur de l'élément $a_{i_k j_0}$ est remplacée par la valeur $a_{i_k j_0} - \lambda'_{i_k}$, λ_{i_k} est annulé, et on passe à l'exécution des opérations indiquées au point (*c*).

(1) Au cours de l'impression de l'article, l'auteur nous a fait parvenir une démonstration plus détaillée qu'il était trop tard, à notre grand regret, pour substituer au texte initial ; les lecteurs intéressés pourront prendre contact avec l'auteur (N.D.L.R.).

Si $\lambda'_{i_k} > a_{i_k j_0}$, alors l'élément $a_{i_k j_0}$ est annulé, tandis que l'élément λ_{i_k} du vecteur λ recevra la valeur $\lambda'_{i_k} - a_{i_k j_0}$. La nouvelle valeur de λ_{i_k} est comparée avec l'élément suivant différent de zéro de la ligne i_k appartenant à la matrice A. Soit $a_{i_k j_1}$ cet élément.

On répète pour $a_{i_k j_0}$, le raisonnement qu'on a fait antérieurement pour $a_{i_k j_0}$. Si cette fois encore λ_{i_k} ne peut être annulé, on reprend le raisonnement jusqu'à l'annulation de λ_{i_k}, qui se produira assurément à un moment donné, parce que

$$\lambda_{i_k} \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{i_k j}.$$

c) On passe à l'itération suivante, ce qui veut dire qu'on calcule à nouveau les éléments des vecteurs L, C, λ, μ et qu'on cherche à nouveau le premier élément $\lambda_{i_0} \neq 0$ du nouveau vecteur λ, etc.

On remarque, qu'au cours du développement des calculs, le procédé a lieu en concordance avec la relation (1).

Donc, la méthode des compensations successives proposée réalise à chaque itération :

(i) la compensation du surplus de la capacité des arcs incidents à l'extérieur (λ_{i_k}), aux sommets où ce surplus existe, utilisant le principe fondamental de la diminution du surplus de la capacité des arcs incidents à l'intérieur (μ_{j_c}) des sommets adjacents, si ce surplus existe.

(ii) la compensation du surplus de la capacité des arcs incidents à l'extérieur, aux sommets où ce surplus existe, en provoquant le déséquilibre du réseau, si la condition (i) ne peut être accomplie.

Évidemment, (i) et (ii) sont les conditions qui nous prouvent en fin de compte, que le flux obtenu au moment de l'équilibre du réseau, sera un flux maximum. Donc, au moment où tous les éléments du vecteur λ deviennent égaux à zéro, l'algorithme s'arrête. A ce moment nous nous trouvons devant deux situations possibles :

a) Si une solution existe, c'est-à-dire qu'on est arrivé à l'équilibre du réseau, les éléments de la matrice A représentent à ce moment la capacité qui doit être allouée à chaque arc du graphe pour pouvoir obtenir un flux maximum.

b) S'il n'existe pas de solution, alors tous les éléments de la matrice A sont nuls.

Proposition 2. Dans un graphe fini $G = (X, U)$ sans boucle, avec un seul point d'entrée x_0 et un seul point de sortie x_n, le flux maximum ou la non existence d'une solution sont mises en évidence dans un nombre fini d'itérations par MCS.

Démonstration. Étant donné que les éléments $l_i (i=1,...,n)$ et $c_j (j=1,...,n)$ sont finis, leur annulation obtenue en les diminuant successivement des quantités $\lambda_i (i = 1, ..., n)$, conformément aux indications antérieures, sera réalisée forcément en un nombre fini d'étapes. Dans le cas où un flux optimum existe, il sera mis en évidence *a fortiori* en un nombre fini

d'itérations, puisque l'annulation des éléments du vecteur λ se réalisera dans ce cas évidemment avant l'annulation de tous les éléments de la matrice A associée au graphe.

Pour conclure, la MCS assure donc l'obtention du flux maximum dans un nombre fini d'itérations.

On remarque que la méthode des compensations successives peut être énoncée aussi d'une manière inverse, comme il suit :

(i) la compensation du surplus de la capacité des arcs incidents à l'intérieur (μ_{j_e}), aux sommets où ce surplus existe, employant la diminution du surplus de la capacité (λ_{i_k}) des arcs incidents à l'extérieur des sommets adjacents, si ce surplus existe.

(ii) la compensation du surplus de la capacité des arcs incidents à l'intérieur, aux sommets où ce surplus existe, en provoquant le déséquilibre du réseau, si la condition (i) ne peut être réalisée.

Dans ce cas, le raisonnement est analogue à celui antérieur à une transposition près de la matrice A associée au graphe.

Nous avons préféré le premier énoncé, étant donné qu'il exprime d'une manière plus suggestive les phénomènes réels.

Les détails concernant le développement de l'algorithme dans différentes situations, peuvent être suivis facilement sur le schéma logique de calcul des figures 3 à 5 et dans l'exemple indiqué dans le paragraphe suivant

3. EXEMPLE DE CALCUL

Nous donnons maintenant un exemple qui pourra illustrer un procédé de réalisation du principe de la compensation.

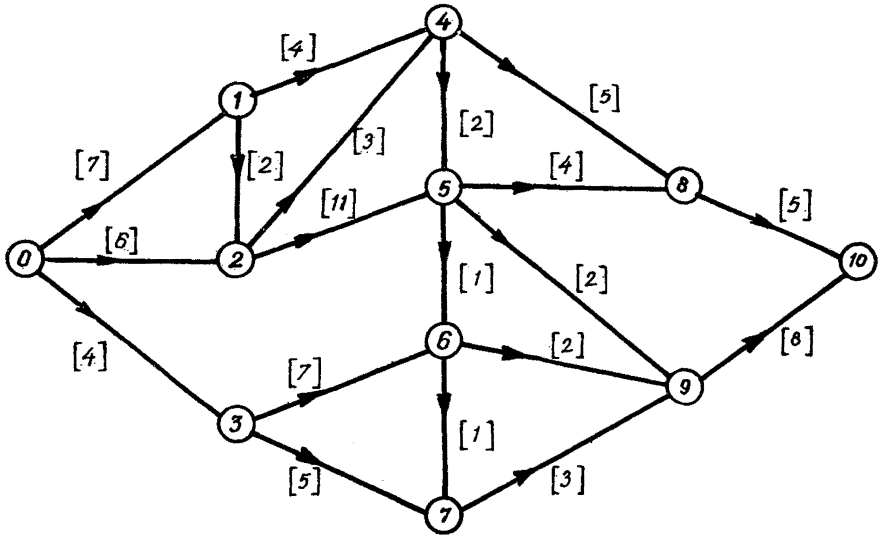

Figure 1

Nous nous proposons le calcul du flux maximum qui traverse le graphe $G = (X, U)$ présenté dans la figure 1 en utilisant la MCS.

TABLEAU 2

$i \backslash j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		7	6	4							
1			2		4						
2					3	11					
3							7	5			
4						2			5		
5							1		4	2	
6								1		2	
7										3	
8											5
9											8
10											

Dans cette matrice on supprime la colonne $j = 0$ et la ligne $i = 10$ et on substitue la ligne $i = 0$ à la place de la ligne $i = 10$. On borde par la droite la matrice avec les vecteurs $L = \left(\sum_{j=1}^{10} a_{1j}, \ldots, \sum_{j=1}^{10} a_{10,j}\right)$, λ et par le bas avec les vecteurs $C = \left(\sum_{i=1}^{10} a_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^{10} a_{i,10}\right)$, μ. On obtient le tableau 3.

TABLEAU 3

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	L	λ
1		2		4							6	0
2				3	11						14	6
3						7	5				12	8
4					2			5			7	0
5						1		4	2		7	0
6							1		2		3	0
7									3		3	0
8										5	5	0
9										8	8	1
10	7	6	4								17	4
C	7	8	4	7	13	8	6	9	7	13		
μ	1	0	0	0	6	5	3	4	0	0		

On commence le processus de compensation en cherchant successivement les éléments du vecteur λ différents de zéro. Ainsi $\lambda_2 = 6$ indique le fait que, au sommet x_2 la capacité des arcs incidents à l'extérieur dépasse de 6 la capacité des arcs incidents à l'intérieur. On compense ce déséquilibre, en diminuant la capacité des arcs incidents à l'extérieur de x_2, c'est-à-dire les éléments de la ligne 2, en suivant les composantes non nulles du vecteur μ qui nous indique les sommets adjacents en x_2, où la capacité des arcs incidents à l'intérieur est plus grande que celle des arcs incidents à l'extérieur.

Dans ce cas, on diminuera de 6, l'élément $a_{25} = 11$, parce que, selon l'indication de l'élément $\mu_5 = 6$ du vecteur μ, au sommet x_5 adjacent à x_2, la capacité des arcs incidents à l'intérieur dépasse de 6 la capacité des arcs incidents à l'extérieur. Il en résulte que le tableau devient :

TABLEAU 4

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	L	λ
1		2		4							6	0
2				3	5						8	0
3						7	5				12	8
4					2			5			7	0
5						1		4	2		7	0
6							1		2		3	0
7									3		3	0
8										5	5	0
9										8	8	1
10	7	6	4								17	4
C	7	8	4	7	7	8	6	9	7	13		
μ	1	0	0	0	0	5	3	4	0	0		

On continue le processus avec l'élément suivant différent de zéro. De sorte qu'on trouve $\lambda_3 = 8$.

On voit dans le tableau 4 que le surplus de capacité λ_3, des arcs incidents à l'extérieur du sommet x_3 peut être compensée par la diminution de la capacité des arcs incidents à l'intérieur des sommets adjacents

x_6 et x_7 respectivement de 5 et de 3 selon l'indication donnée par μ_6 et μ_7. En conséquence le tableau 4 devient :

TABLEAU 5

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	L	λ
1		2		4							6	0
2				3	5						8	0
3						2	2				4	0
4					2			5			7	0
5						1		4	2		7	0
6							1		2		3	0
7									3		3	0
8										5	5	0
9										8	8	1
10	7	6	4								17	4
C	7	8	4	7	7	3	3	9	7	13		
μ	1	0	0	0	0	0	0	4	0	0		

L'élément suivant différent de zéro est $\lambda_9 = 1$.

Dans ce cas particulier, ne pouvant trouver aucun sommet adjacent à x_9 qui ait la capacité des arcs incidents à l'intérieur plus grand que celle des arcs incidents à l'extérieur, on diminuera la capacité des arcs incidents à l'extérieur en provoquant le déséquilibre des sommets adjacents. Cette situation est due au flux du réseau qui dépasse le flux maximum possible.

La situation sera donc la suivante :

TABLEAU 6

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	L	λ
1		2		4							6	0
2				3	5						8	0
3						2	2				4	0
4					2			5			7	0
5						1		4	2		7	0
6							1		2		3	0
7									3		3	0
8										5	5	0
9										7	7	0
10	7	6	4								17	5
C	7	8	4	7	7	3	3	9	7	12		
μ	1	0	0	0	0	0	0	4	0	0		

L'élément suivant différent de zéro est $\lambda_{10} = 5$. Il indique le surplus de la capacité des arcs incidents à l'extérieur du sommet x_0 par rapport à la capacité des arcs incidents à l'intérieur du sommet x_n.

Selon l'indication de μ_1, la capacité d'entrée dans le réseau peut être diminuée de 1 sans que le réseau soit déséquilibré.

Le déséquilibre persiste entre la capacité de l'entrée dans le réseau qui devient de 16 unités et la capacité des arcs de sortie dans le réseau qui est de 12. Dans ce cas on peut rétablir l'équilibre, en diminuant de 4 la capacité des arcs incidents à l'extérieur de x_0, provoquant le déséquilibre des sommets adjacents à x_0.

TABLEAU 7

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	L	λ
1		2		4							6	4
2				3	5						8	0
3						2	2				4	0
4					2			5			7	0
5						1		4	2		7	0
6							1		2		3	0
7									3		3	0
8										5	5	0
9										7	7	0
10	2	6	4								12	0
C	2	8	4	7	7	3	3	9	7	12		
μ	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0		

En continuant, on aura donc :

TABLEAU 8

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	L	λ
1				2							2	0
2				3	5						8	2
3						2	2				4	0
4					2			5			7	2
5						1		4	2		7	0
6							1		2		3	0
7									3		3	0
8										5	5	0
9										7	7	0
10	2	6	4								12	0
C	2	6	4	5	7	3	3	9	7	12		
μ	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0		

TABLEAU 9

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	L	λ
1				2							2	0
2				1	5						6	0
3						2	2				4	0
4					2			5			7	4
5						1		4	2		7	0
6							1		2		3	0
7									3		3	0
8										5	5	0
9										7	7	0
10	2	6	4								12	0
C	2	6	4	3	7	3	3	9	7	12		
μ	0	0	0	0	0	0	0	4	0	0		

TABLEAU 10

$i \backslash j$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	L	λ
1				2							2	0
2				1	5						6	0
3						2	2				4	0
4					2			1			3	0
5						1		4	2		7	0
6							1		2		3	0
7									3		3	0
8										5	5	0
9										7	7	0
10	2	6	4								12	0
C	2	6	4	3	7	3	3	5	7	12		
μ	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		

Les vecteurs λ et μ ont toutes leurs composantes nulles, ce qui signifie que l'équilibre est obtenu dans le réseau. Donc l'algorithme a pris fin.

Dans le tableau 10 on voit que le flux optimum cherché est de 12 et la figure 2 représente le graphe correspondant.

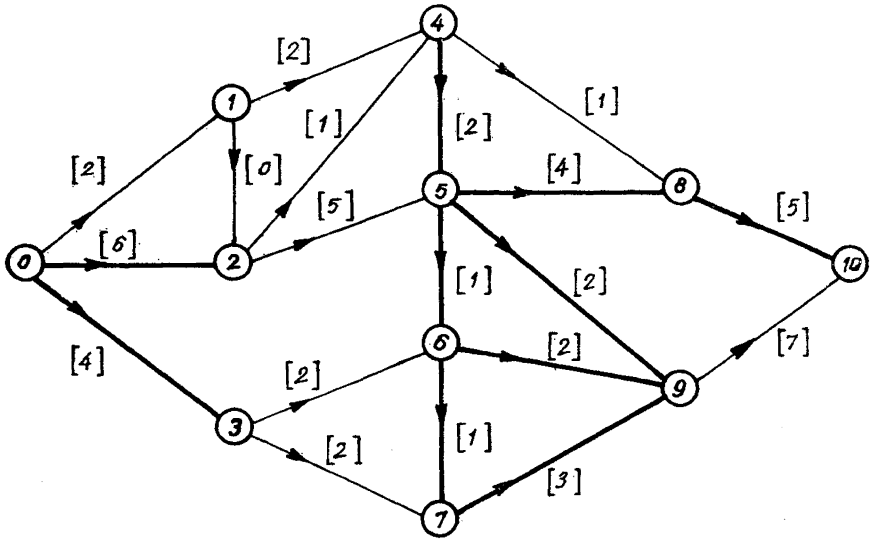

Figure 2

Observations

1. MCS peut être réalisée aussi de la manière suivante :

Phase 1. On forme le tableau 1 et on essaye la compensation de tous les éléments $\lambda_i \neq 0$ du vecteur λ, en se basant sur les éléments $\mu_j \neq 0$ du vecteur μ, de la même façon que dans le paragraphe 2.

Phase 2. Si dans la première phase, on n'a pas réussi à annuler tous les éléments $\lambda_i \in \lambda$, on compensera tous ceux qui sont différents de zéro sur la base du déséquilibre du réseau par le même procédé utilisé dans le paragraphe 2.

On reprend les phases 1 et 2 jusqu'à ce que tous les éléments $\lambda_i \in \lambda$ deviennent nuls.

2. Le procédé simplifié de réalisation du principe de la compensation, présenté plus haut dans le but de l'utilisation du calculateur, implique quelquefois un numérotage initial convenable des sommets du graphe, ou un nouveau calcul du flux optimum à la suite de la permutation de quelques lignes et respectivement des colonnes.

4. LA DESCRIPTION DU SCHEMA LOGIQUE DE CALCUL

Avant de passer à la description du schéma logique on fera quelques observations concernant l'enregistrement des données dans la mémoire du calculateur (1).

Les données d'entrée et les constantes consistent en :

— les n^2 éléments de la matrice $A = (a_{ij})i,j = 1, ..., n$ enregistrées par lignes,

— trois cellules pour l'enregistrement des numéros $(n, 0)$, $(0, n)$ et $(n^2, 0)$,

— 48 cellules réservées pour les différentes constantes utilisées par le programme.

Les adresses de travail utilisées sont au nombre de $4n + 17$ et réparties de la manière suivante :

— n cellules pour l'enregistrement du vecteur $L = (l_1, ..., l_n)$

— n cellules pour l'enregistrement du vecteur $C = (c_1, ..., c_n)$

— n cellules pour l'enregistrement du vecteur $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$

— n cellules pour l'enregistrement du vecteur $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$

— 10 cellules pour $(i, 0)$; $(0, i)$; $(j, 0)$; $(0, j)$; $(n \cdot i, 0)$; $(0, n \cdot i)$; $(n - 1, 0)$; $(0, n - 1)$; $(i, n \cdot i)$; $(n \cdot i, i)$;

— 2 cellules c et d. c est utile pour l'enregistrement des éléments c_j déplacés à droite avant d'être comparés aux l_i qui à leur tour sont déplacés à droite. Cette manœuvre assure le bon fonctionnement du bloc 20. Dans la cellule d se place la différence $l_i - c_j$.

— 5 cellules pour $\tilde{\mu}$, $\tilde{\lambda}$, γ, $\tilde{\gamma}$ et δ. $\tilde{\lambda}$ et $\tilde{\mu}$ sont utiles à l'enregistrement des éléments λ_i et μ_j déplacés à droite, dans le but d'assurer le fonctionnement correct du bloc 43 et 46. La comparaison dans le bloc 46 se fait entre a_{ij} déplacé à droite et $\tilde{\mu}$. δ, γ et $\tilde{\gamma}$ sont utiles à l'enregistrement des différences $\mu_j - \lambda_i$, $a_{ij} - \mu_j$ et $a_{ij} - \lambda_i$ non déplacées à droite.

En continuant on fera la description du schéma logique de calcul.

---

(1) Dans l'hypothèse de l'utilisation d'un calculateur à 2 instructions par mot (supposée dans cette description), le symbole (i, j) représente une cellule de la mémoire où l'on enregistre les numéros dans la base huit i et j respectivement dans la première partie et dans la deuxième.

Les blocs 1-16 calculent les composantes des vecteurs $L = (l_1, ..., l_n)$ et $C = (c_1, ..., c_n)$ conformément aux relations (3).

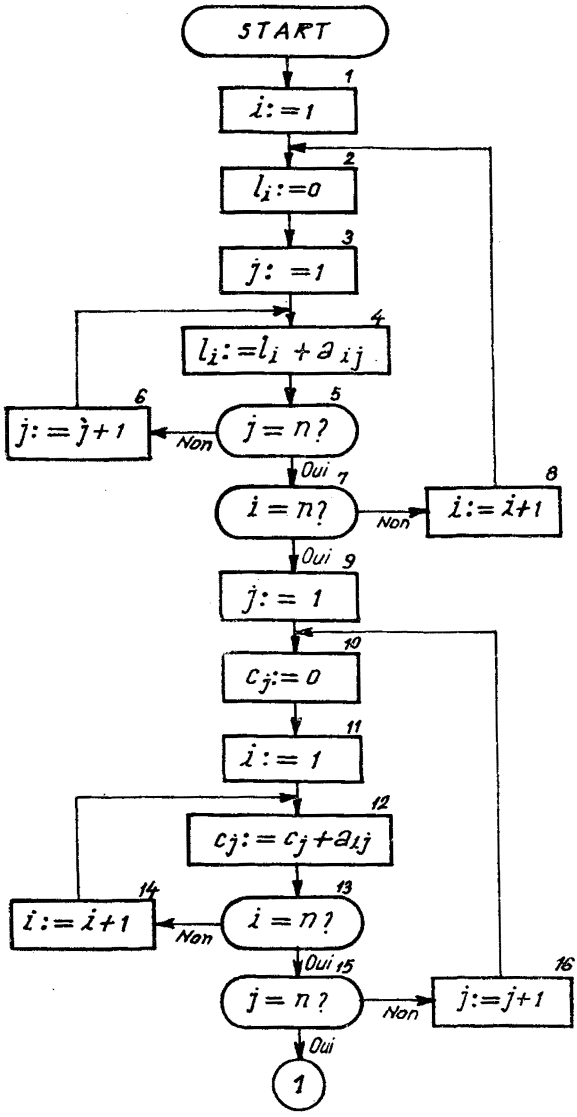

Figure 3

Les blocs 17-33 calculent les composantes des vecteurs $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $\mu = (\mu_1, ..., \mu_n)$ seulement pour $i = j$, conformément aux relations (4).

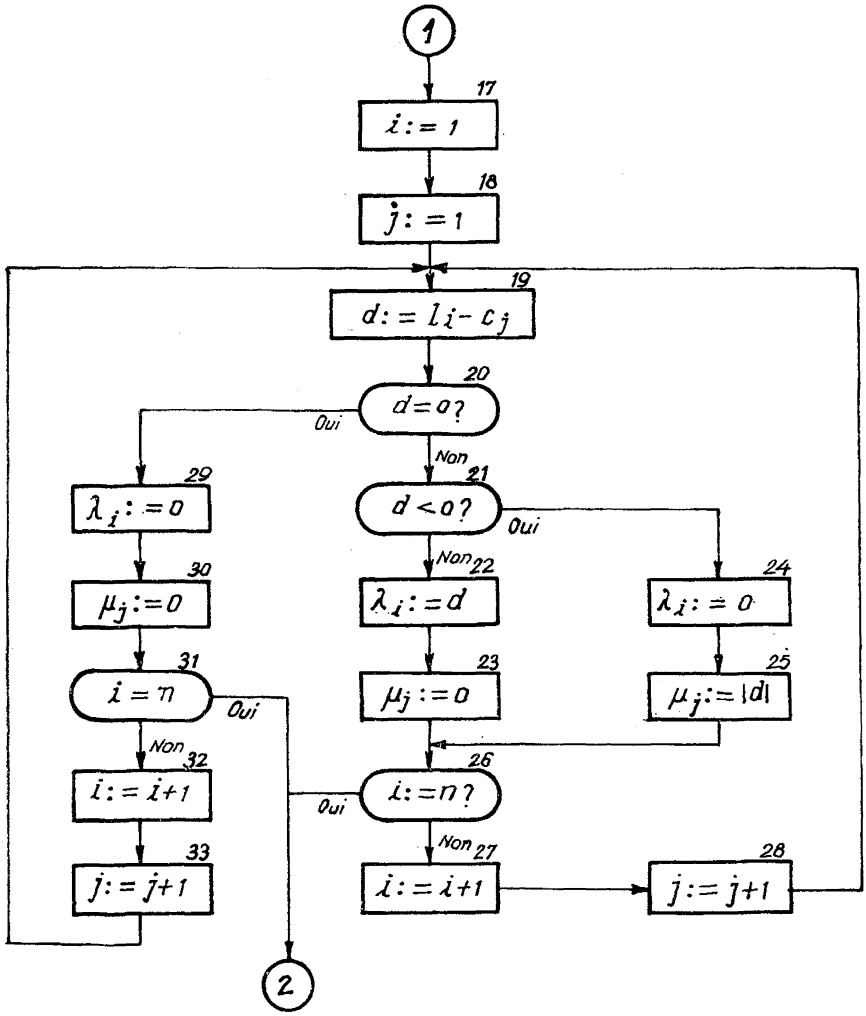

Figure 4

Les blocs 34-37 choisissent successivement les éléments différents de zéro du vecteur λ.

Les blocs 38-41 choisissent les éléments différents de zéro de la ligne i de la matrice A.

Les blocs 42-44 comparent μ_j à λ_i. Dans le cas où $\mu_j - \lambda_i < 0$ et $\mu_j = 0$ il résulte que le sommet x_j adjacent au sommet x_i, n'a pas la capacité des arcs incidents à l'intérieur plus grande que celle des arcs incidents à l'extérieur.

On reprend le calcul depuis le bloc 40 pour voir si le sommet suivant x_{j+1} est adjacent à x_i (bloc 39). Dans le cas affirmatif, on voit si la capacité des arcs incidents à l'intérieur de x_{j+1} est plus grande que la capacité des arcs incidents à l'extérieur (bloc 44).

Les blocs 45-52. Dans le cas où au sommet x_j la capacité des arcs incidents à l'intérieur est plus grande que celle des arcs incidents à l'extérieur, on compare la capacité a_{ij} à μ_j. Si $a_{ij} - \mu_j \geqslant 0$, on fait les attributions suivantes : $a_{ij} := a_{ij} - \mu_j$, $\lambda_i := \lambda_i - \mu_j$ et $\mu_j := 0$, tandis

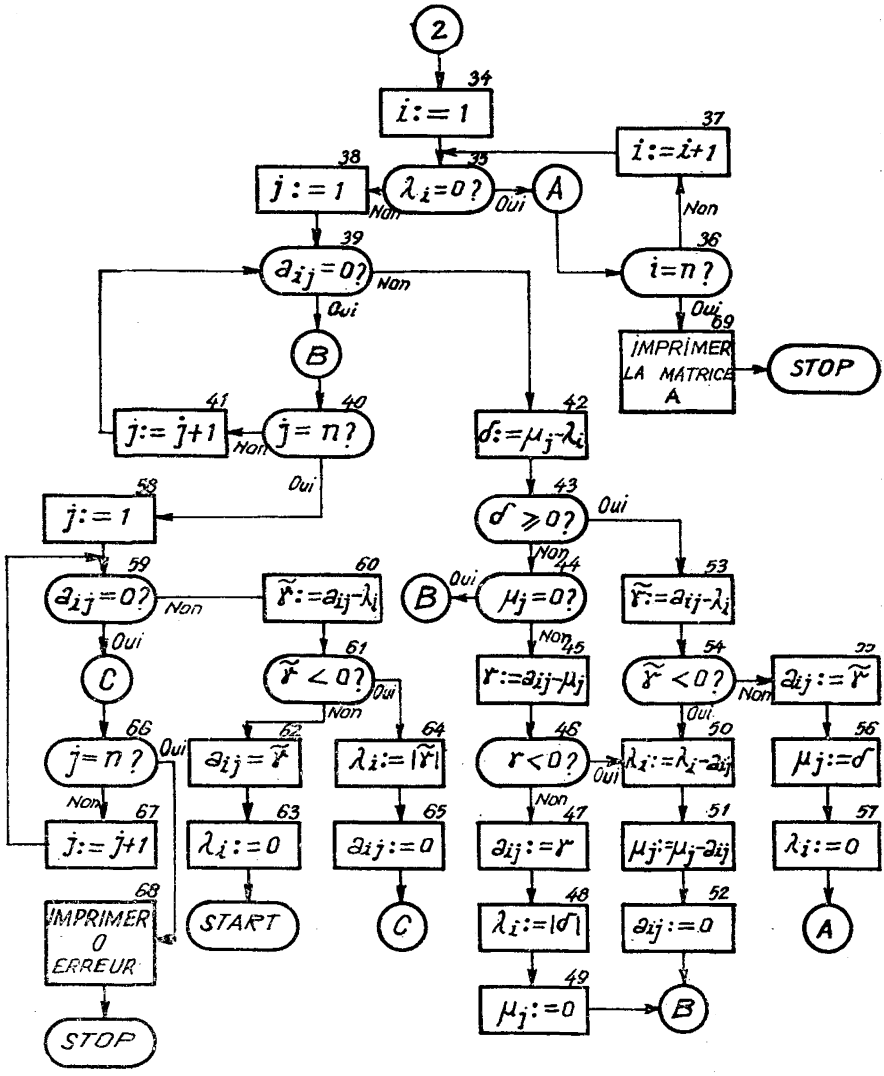

Figure 5

qu'on reprend les opérations depuis le bloc 40, jusqu'à ce que λ_i soit annulé. Si $a_{ij} - \mu_j < 0$ alors on réalise les attributions : $\lambda_i := \lambda_i - a_{ij}$, $\mu_j := \mu_j - a_{ij}$ et $a_{ij} := 0$, et les opérations sont reprises depuis le bloc 40.

Les blocs 53-57 réalisent les attributions $a_{ij} := a_{ij} - \lambda_i$, $\mu_j := \delta$ et $\lambda_i := 0$ quand $\mu_j - \lambda_i \geqslant 0$ et $a_{ij} - \lambda_i \geqslant 0$ et l'on reprend le calcul depuis le bloc 36.

Si l'on a $\mu_j - \lambda_i \geqslant 0$ et $a_{ij} - \lambda_i < 0$ on passe à l'exécution du bloc 50.

Les blocs 58-68 réalisent la compensation de λ_i par la suppression de l'équilibre des sommets adjacents à x_i lorsque λ_i dépasse la capacité disponible de compensation $\mu_j \neq 0$ des arcs incidents à l'intérieur des sommets adjacents à x_i.

Le bloc 69 imprime la matrice A associée au flux maximum obtenu.

CONCLUSIONS

La MCS proposée pour le calcul du flux optimum dans les réseaux présente des avantages objectifs en ce qui concerne sa programmation sur les calculateurs électroniques.

Le programme d'exécution de cette méthode peut être réalisé dans 300 cellules seulement. Évidemment, ce chiffre dépend en grande partie de l'habileté du programmateur. En tout cas, la programmation de la méthode exposée est incomparablement plus avantageuse que la programmation de l'algorithme de Ford-Fulkerson [4], pour la réalisation duquel chacune des trois phases, soulève de grandes difficultés pour le programmateur.

Un autre avantage de la MCS consiste aussi dans l'économie de mémoire car on travaille seulement sur la matrice du graphe, tandis que la méthode de Ford-Fulkerson demande deux matrices.

Il en résulte aussi un accroissement de vitesse dans la résolution des problèmes d'optimisation du flux dans les réseaux par la MCS.

REMERCIEMENTS

L'auteur exprime ses meilleurs remerciements au professeur Manea Manescu, membre correspondant de l'Académie Roumaine, président du Conseil scientifique du Centre de calcul économique et cybernétique économique, Bucarest, qui a stimulé cette recherche.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. Berge, *Théorie des graphes et ses applications*, Paris, 1958.
2. A. Kaufmann, *Méthodes et modèles de la recherche opérationnelle*, Dunod, Paris, 1962.
3. G. Desbazeille, *Exercices et problèmes de recherche opérationnelle*, Dunod, Paris, 1964.
4. L. R. Ford et D. R. Fulkerson, « Maximal flow through a network », *Canad. J. of Math.*, 8, 1956, p. 399.