REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE. SÉRIE VERTE

J. C. DODU

J. P. LUDOT

J. POUGET

Sur le regroupement optimal des sommets dans un réseau électrique

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle. Série verte, tome 3, nº V1 (1969), p. 17-37

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1969__3_1_17_0>

R.I.R.O.
(3e année, N° V-1, 1969, p. 17-37)

SUR LE REGROUPEMENT OPTIMAL DES SOMMETS DANS UN RESEAU ELECTRIQUE

par J. C. DODU, J. P. LUDOT et J. POUGET [1]

Résumé. — *L'objet de cette note est de formuler de manière logique le problème de la réduction des réseaux électriques. Celle-ci s'avère en effet nécessaire, lorsque l'on veut étudier l'évolution à long terme de réseaux à centaines de points.*

La méthode consiste à réaliser une partition minimale dans l'ensemble des sommets, de telle sorte que les sommets d'une classe aient la même influence à ε près sur les intensités parcourant les branches. Ce problème est résolu par un programme mathématique en nombres entiers récemment élaboré à la Direction des Études et Recherches.

On montre que le problème du groupement optimal des sommets revient à rechercher le nombre chromatique d'un graphe et, par suite, s'intègre dans une classe plus vaste de problèmes, posés en intelligence artificielle, ou il s'agit d'effectuer la synthèse des causes à partir des conséquences.

INTRODUCTION

Les études de développement des moyens de production d'énergie électrique et du réseau à haute tension qui les rend solidaires se heurtent à de nombreuses difficultés.

Elles tiennent d'une part à ce que le transit électrique ne se fait pas uniquement suivant la circulation d'un flot conservatif et d'autre part à ce qu'un grand nombre de variables est nécessaire pour décrire la réalité.

Ainsi au réseau à haute et très haute tension (380, 225, 90 et 63 kV) qui couvre la France est associé un graphe à plus de 3 000 sommets et environ le double d'arêtes.

La première difficulté empêche l'utilisation d'algorithmes de flots (comme celui de Ford-Fulkerson). Il sera ici surtout question de la seconde difficulté.

(1) Électricité de France, Direction des Études et Recherches, Service des Études de Réseau et Calcul Automatique.

En plus de ces variables « spatiales » (il y a 3 000 sommets parce qu'on veut décrire assez correctement la variété géographique) il faut qu'il y ait des variables « temporelles » car on veut optimiser le développement sur une période assez longue.

Il faut donc impérativement réduire le nombre de variables « spatiales ». On peut envisager, avec les ordinateurs actuels, de suivre le développement et d'optimiser quelques dizaines de sommets, mais non pas 3 000.

Ce problème de réduction d'un graphe de 3 000 sommets à un graphe de 20 sommets par exemple était jusqu'ici résolu empiriquement, surtout d'après des considérations géographiques. En effet les divers sommets que l'on va confondre (appliquer) en un seul sommet équivalent se regroupent parce qu'ils sont « électriquement voisins », c'est-à-dire que leur influence sur le reste du réseau peut se cumuler.

Il n'est pas évident que cette « distance électrique » entre sommets ait un rapport avec la distance géographique.

Les injections de courant en chaque sommet sont autant de causes qui influent sur le déroulement d'un phénomène à effets complexes : les transits électriques dans chaque ligne.

Le problème posé revient donc à effectuer un regroupement qui, tout en simplifiant ces causes, permet d'expliquer à peu près les mêmes effets. C'est un problème semblable qui d'après un tableau donnant, pour une liste de malades, de nombreux symptômes possibles, permettrait de remonter à un petit nombre de maladies ; on pourrait citer bien d'autres exemples et nous dirons, pour être bref, que le problème posé n'est que le représentant d'une classe très vaste qui touche de nombreux domaines et les plus divers : publicité, psychologie, etc.

Les considérations qui suivent montrent comment ce problème a été abordé à la Direction des Études et Recherches de l'Électricité de France.

1. FORMULATION DU PROBLEME PAR UN PROGRAMME MATHEMATIQUE EN NOMBRES ENTIERS

Notations :

B : ensemble des branches ; $|B| = m$,

S : ensemble de sommets ; $|S| = n$,

α : matrice d'incidence, indicée par $(S \times B)$,

Y : matrice des admittances en court-circuit, indicée par $(S \times S)$,

a : matrice de transfert, indicée par $(B \times S)$,

y : matrice diagonale des admittances, indicée par $(B \times B)$.

1.1. L'étude d'un système de production et d'acheminement de l'énergie électrique s'effectue le plus souvent dans l'approximation du courant continu, qui permet de représenter un réseau maillé par un système d'équations linéaires.

Dans l'espace des nœuds, ces relations s'écrivent sous la forme $I = YV$ (I vecteur des courants injectés, V vecteur des potentiels), où Y désigne la matrice des admittances en court-circuit, dans les termes ont pour expression :

$$Y_{ij} = -y_{ij}$$
$$Y_{ii} = \sum_{j \in \Gamma(i)} y_{ij}$$

y_{ij} étant l'admittance de la branche ij et $\Gamma(i)$ l'ensemble des sommets adjacents au sommet i.

L'équation précédente constitue l'expression généralisée de la loi d'Ohm pour un réseau maillé. Il est aisé d'en déduire les intensités parcourant les branches en fonction des seuls injecteurs par la relation matricielle :

(1) $$p = aI \quad \text{avec} \quad a = y\alpha_t Y^{-1} = [a_{ij}]$$ [1]

α_t étant la matrice transposée de la matrice d'incidence du graphe associé au réseau, y la matrice diagonale des admittances de branches.

1.2. On se propose de réaliser une partition dans l'ensemble des sommets, de telle sorte que les sommets d'une classe aient la même influence à ε près sur les intensités parcourant les branches.

Il importe préalablement de définir un critère de ressemblance dans l'ensemble des sommets.

L'effet d'une variation d'une unité de la valeur du courant injecté au sommet j se traduit par une variation simultanée de valeur a_{ij} de l'intensité du courant parcourant la branche i. On dira que les sommets j et k exercent la même influence électrique sur le transit circulant dans i, s'ils satisfont l'inégalité :

$$|a_{ij} - a_{ik}| < \varepsilon$$

ε désignant un nombre positif, mais fixé de manière exogène.

Cette relation est généralisée dans l'espace à m dimensions des transits de branche. On définit la distance $d(j, k)$ entre deux sommets j et k par :

$$d(j, k) = \operatorname*{Max}_i |a_{ij} - a_{ik}| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

Les sommets j et k sont dits voisins électriquement si :

(2) $$d(j, k) < \varepsilon$$

Une classe de la partition cherchée est constituée par un sous-ensemble de sommets voisins électriquement, c'est-à-dire vérifiant la relation (2) pour tout couple de sommets appartenant à la classe.

---

(1) Une définition exacte de Y^{-1} est donnée dans [4].

Il est clair qu'une telle partition peut s'effectuer de plusieurs manières possibles. Le problème consiste à trouver la partition qui comporte le nombre minimal de classes.

1.3. On définit le graphe non orienté $G = (X, U)$ de la façon suivante :

1° à tout sommet $j = 1, 2, \ldots, n$ on associe un élément de X noté x_j

2° $(x_j, x_k) \in U$ si $d(j, k) < \varepsilon$.

Un sous-ensemble C d'éléments de X vérifiant la propriété :

$$x_j \in C, \;\; x_k \in C \Rightarrow (x_j, x_k) \in U$$

forme une clique du graphe C.

Le problème peut s'énoncer ainsi : trouver un recouvrement des sommets du graphe G par une famille de cliques $C_1, C_2, \ldots, C_\upsilon$ disjointes et dont le nombre est minimum.

On appelle graphe complémentaire le graphe $G' = (X', U')$ défini par :

1° $X' = X$;

2° $(x_j, x_k) \in U' \Leftrightarrow (x_j, x_k) \notin U$.

Il est évident que les ensembles de la famille $C_1, C_2, \ldots, C$ sont intérieurement stables dans G'. Le problème revient par suite à trouver le nombre chromatique du graphe G'.

1.4. A tout recouvrement de υ cliques, on peut faire correspondre des nombres t_i (où $i = 1, 2, \ldots, n$) par :

$$t_i = r \quad \text{si} \quad x_i \in C_r \qquad (r = 1, 2, \ldots, \upsilon)$$

Le problème revient alors à trouver des entiers t_i tels que

$$(3) \qquad \begin{aligned} & 1 \leqslant t_i \leqslant \upsilon \\ & (x_j, x_k) \notin U \Rightarrow t_j \neq t_k \end{aligned}$$

et rendant υ minimum.

La contrainte (3) peut s'écrire :

$$(x_j, x_k) \notin U \Rightarrow |t_j - t_k| \geqslant 1$$

ou encore, en introduisant les variables booléennes z_{jk} :

$$(x_j, x_k) \notin U \Rightarrow \begin{cases} t_j - t_k \geqslant 1 - nz_{jk} \\ t_k - t_j \geqslant 1 - n(1 - z_{jk}) \end{cases}$$

On reconnaît la formulation classique d'un problème d'ordonnancement avec contraintes disjonctives.

Ce problème est abordé à EdF grâce à une méthode heuristique de résolution des programmes mathématiques en nombres entiers, que l'on va rappeler maintenant très brièvement.

En annexe *I* figure l'exposé d'une méthode empirique, permettant la recherche du nombre chromatique grâce à des considérations de théorie des graphes.

2. LA METHODE DE RESOLUTION

Nous avons résolu le problème de la recherche du nombre chromatique par l'application d'une méthode heuristique de résolution des programmes mathématiques en nombres entiers. Il serait trop long d'exposer cette méthode en détail et, par ailleurs, le lecteur peut aisément s'en procurer une decription plus complète [3].

Nous ne rappellerons que les éléments qui permettent en quelque sorte d'utiliser le caractère spécifique de ce genre de problème.

La méthode a l'inconvénient d'être heuristique donc de ne pas garantir l'optimum, mais pour l'application qui en est faite ici, il suffit, pour que la solution obtenue soit satisfaisante que le nombre de cliques donné par cette résolution soit inférieur à un certain nombre fixé par l'utilisateur. Les solutions obtenues ont rempli cette condition.

2.1. Principe général de l'algorithme

Soient $(m_i, i = 1, N + 1)$ des fonctions concaves définies dans R^M. Le but de l'algorithme est de résoudre le programme mathématique :

1) $m_i(x) \geqslant 0 \qquad i = 1, N$

2) $x \in N^M$

3) $b \leqslant x \leqslant c$

$$\text{MAX } m_{N+1}(x)$$

La méthode proposée est, dans son principe, rapprochable de celle de M. Huard [2] pour la résolution des problèmes non linéaires en continu :

On cherche d'abord un point entier $\tilde{x}$ du domaine D (défini par les contraintes (1)) en cheminant dans le pavé (b, c) (défini par les contraintes (3)) ; on tronque ensuite ce domaine par la contrainte représentative de la fonction économique soit : $m_{N+1}(x) - m_{N+1}(\tilde{x}) > 0$; on cherche un point intérieur au nouveau domaine ainsi défini, et ainsi de suite.

Le processus ainsi défini converge puisqu'il y a un nombre fini de points entiers dans le domaine défini par les contraintes (1) et (3).

Si l'on applique ce processus, l'essentiel pour résoudre le problème posé est d'élaborer un algorithme permettant d'obtenir un point intérieur à un domaine D, supposé convexe par hypothèse.

La méthode proposée pour cela est heuristique et a encore dans son principe un rapport avec la méthode des centres, puisque cette recherche d'un point appartenant à un domaine se fait en maximisant une distance généralisée, cette maximisation se faisant sans contraintes.

Recherche d'un point entier appartenant à un domaine convexe de R^M.

Ce problème peut se formuler ainsi : on cherche $x \in R^M$ tel que [1] :

(α) $\lambda(x) = \inf [Z/Z = m_i(x), i = 1, N] \geqslant 0,$

(β) $x \in H$;

en désignant par H l'ensemble des points entiers du pavé (b, c).

La recherche d'un tel point se fait alors de la manière suivante : On chemine de point entier en point entier dans le pavé H, c'est-à-dire que l'on construit une suite de points $(x^0, \ldots, x^p)$ de points de H jusqu'à ce que, ou bien l'on rencontre un point x^p tel que $\lambda(x^p) \geqslant 0$, ou bien le résultat de l'application de certains critères nous interdise de continuer.

Pour construire cette suite il nous est nécessaire de définir, d'une part l'ensemble des successeurs d'un point et, d'autre part, un critère de choix permettant de sélectionner un successeur parmi ceux *a priori* possibles.

Le critère de choix est le suivant :

a) Notons p la formation vectorielle positive de R^N dans R^{N+}, appelée fonction de poids, définie par :

$$p(y) = (p_i(y) \quad , \quad i = 1, N)$$

avec :

$$p_i(y) = \sup [y_i] - y_i + 1 \quad , \quad i = 1, N$$

b) A tout couple ordonné (x, x'), $x', x \in R^M$ on associe le scalaire :

$$g(x', x) = < p(m(x)) \quad , \quad \overline{m(x')} - \overline{m(x)} >.$$

où on a posé :

$$m(x) = (\overline{m_i(x)} \quad , \quad i = 1, N) = (\min (m_i(x), 0) \quad , \quad i = 1, N)$$

le successeur x^t de x^{t-1} à une étape t quelconque de la construction de la suite $(x^0, \ldots, x^p)$ est un point vérifiant :

$$g(x^t, x^{t-1}) = \max [Z/Z = g(y, x^{t-1}) \quad , \quad y \in S(t-1, x^{t-1})]$$

en notant $S(t-1, x^{t-1})$ l'ensemble des successeurs de x^{t-1} à l'étape t.

(1) La fonction $\lambda(x) : R^M \longrightarrow R$ est une « F-distance » au sens de la méthode des centres.

2.2. Formulation du problème de recherche du nombre chromatique en vue de sa résolution par la méthode proposée

Nous avons vu (§ 1.4) que le problème pouvait se formuler de la manière suivante :

$$(1) \qquad m_{j,k}(t) = |t_j - t_k| \geqslant 1 \qquad \forall\, (x_j, x_k) \notin U$$

$$(2) \qquad 1 \leqslant t_j \leqslant \nu$$

$$\mathrm{MIN}\ \nu$$

ou bien sous la forme :

$$(1') \qquad \begin{cases} t_j - t_k \geqslant 1 - nz_{jk} \\ t_k - t_j \geqslant 1 - n(1 - z_{jk}) \end{cases}$$

$$(2') \qquad 1 \leqslant t_j \leqslant \nu$$

$$\mathrm{MIN}\ \nu$$

Pour l'application de la méthode, il est inutile de connaître l'expression analytique des contraintes, il suffit de pouvoir calculer leur valeur en un point et plus exactement, il nous suffit de connaître la valeur en un point lorsque cette valeur est négative. Par conséquent, la formulation avec les contraintes du type (1′) n'est pas nécessaire et nous pouvons résoudre directement le problème formulé avec les contraintes du type (1) ce qui :

— nécessite moitié moins de contraintes,

— permet de ne pas introduire de variables bivalentes : d'une part ceci est très important car dans les exemples concrets traités le nombre de variables bivalentes ainsi introduites est de plusieurs milliers et d'autre part ceci est général : l'introduction artificielle de variables bivalentes pour exprimer des conditions logiques est inutile pour l'application de cette méthode.

En résumé, l'application de la méthode se fait de la manière suivante :

a) υ étant un nombre donné, on chemine dans le pavé défini par les contraintes (2) pour trouver un point appartenant au domaine défini par les contraintes (1) ; étant donné le processus de cheminement choisi, il suffit de calculer en chaque point t les valeurs $\overline{m_{j,k}(t)}$ pour tout arc $(x_j, x_k) \notin U$ et on a :

$$\overline{m_{j,k}(t)} = 0 \text{ si } t_j \neq t_k \text{ et } \overline{m_{j,k}(t)} = -1 \text{ si } t_j = t_k.$$

b) On applique ce processus pour des valeurs de υ de plus en plus petites jusqu'à ce que pour une certaine valeur de υ on ne trouve plus de solution réalisable c'est-à-dire vérifiant les contraintes (1) et (2).

La dernière solution réalisable obtenue est la solution retenue.

2.3. Expérience numérique (1)

Les graphes que nous avons traités sont reproduits en annexe II :

— les chiffres indiqués représente les numéros des sommets,

— lorsque l'on rencontre une ligne telle que : 11, 12, 13, 14, ..., cela signifie que le sommet numéro 11 est relié par un arc au sommet numéro 12, au sommet numéro 13, etc. Également en annexe II, on a reproduit la solution obtenue pour chacun des exemples traités :

— les chiffres représentant la valeur des variables : $t_1, ..., t_n$,

— les sommets étant numérotés « sans trous », lorsqu'on lit : 7, 6, 9, 5, 6, ... cela signifie que la valeur de t_1 est 7, celle de t_2 est 6, etc.

Graphe n° 1

Ce graphe est le graphe $G(X, U')$ c'est-à-dire, d'après les notations employées, le graphe complémentaire, la solution représente donc les différentes couleurs de ce graphe : nous avons trouvé qu'il fallait 9 couleurs différentes.

Temps de calcul : 5 secondes (sur C.D.C. 6.600).

Graphe n° 2

Ce graphe est également le graphe $G(X, U')$: nous avons trouvé qu'il fallait 3 couleurs.

Temps de calcul : 2 secondes.

Graphe n° 3

Ce graphe est le graphe $G(X, U)$ c'est-à-dire que la solution obtenue indique les différentes cliques auxquelles appartiennent les différents sommets : on a donc trouvé 23 cliques.

Temps de calcul : 256 secondes.

Cet exemple et le suivant sont des exemples concrets.

Graphe n° 4.

Ce graphe est, comme le précédent, le graphe $G(X, U)$: nous avons obtenu 47 cliques.

Temps de calcul : 822 secondes.

Le temps de calcul est relativement élevé mais il n'est pas moins vrai que cet exemple correspond à un programme mathématique, formulé avec des contraintes du type (1) et (2) (§ 2.2), de 4 281 variables bivalentes, 99 variables entières comprises entre 1 et 99, et 8 562 contraintes et formulé avec des contraintes du type (1') et (2), de 99 variables entières comprises entre 1 et 99 et 4 281 contraintes.

(1) Voir [4] pour l'interprétation physique des résultats.

ANNEXE I

BORNES SUPERIEURE ET INFERIEURE DU NOMBRE CHROMATIQUE METHODE EMPIRIQUE DE RESOLUTION

Soit $G = (X, U)$ un graphe non orienté ; on désigne par $d(x)$ le degré d'un élément de X dans G. On pose :

$$D = \underset{x \in X}{\mathrm{Max}}\, d(x) \quad ; \quad d = \underset{x \in X}{\mathrm{Min}}\, d(x)$$

On appelle $\Gamma(x)$ l'ensemble des sommets adjacents à x. Le nombre chromatique vérifie les inégalités :

$$\frac{n}{n - d} \leqslant \gamma \leqslant D + 1,$$

où $n = |X|$.

Démonstration

a) On pose $G_0 = G$; $G_0 = (X_0, U_0)$; $d_0(x) = d(x)$; $D_0 = D$. On définit le sous-ensemble $E_0 \subset X_0$ par :

$$E_0 = \{ x \mid d_0(x) = D_0 \}$$

Si $x_0 \in E_0$, on forme le sous-graphe $G_1 = (X_1, U_1)$ obtenu après élimination de x_0. On a donc :

$$X_1 = X_0 - \{ x_0 \} \quad ; \quad D_1 \leqslant D_0$$

Il faut montrer que, si le graphe G_1 est coloré avec $(D_1 + 1)$ couleurs, il est possible de colorer G_0 avec $(D_0 + 1)$ couleurs. En effet x_0 est adjacent à D_0 sommets, ce qui nécessite $(D_0 + 1)$ couleurs au plus, la couleur de x_0 étant celle qui n'apparaît pas dans $\Gamma_0(x_0)$.

A l'issue de k éliminations, on obtient le graphe G_k tel que :

$$|X_k| = n - k \quad ; \quad D_k \leqslant D_{k-1} \leqslant \ldots \leqslant D_0$$

La démonstration s'achève par récurrence, si l'on a pu montrer la propriété pour les graphes G_{n-1} et G_{n-2}, ce qui est évident ; d'où $\gamma \leqslant D + 1$.

b) Soit $d'(x)$ le degré d'un sommet dans le graphe complémentaire G' ; D' le degré maximum, d' le degré minimum. On a :

$$d(x) + d'(x) = n - 1 \quad ; \quad \forall x \in X$$
$$d + D' = n - 1 \quad ; \quad D + d' = n - 1$$

On considère un recouvrement minimal des sommets du graphe G par une famille de cliques disjointes $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$. On pose $n_k = |C_k.|$ On remarque que :

$$d_k(x) = n_k - 1 \leqslant d(x) \leqslant D \quad ; \quad \forall x \in C_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, \upsilon)$$

$d_k(x)$ étant le degré de x dans C_k ; d'où : $n_k \leqslant D + 1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, \upsilon)$.

Il vient, en sommant les inégalités précédentes :

$$\sum_{k=1}^{\nu} n_k = n \leqslant \nu(D + 1), \qquad \text{et par suite :} \qquad \nu \geqslant \frac{n}{D + 1}$$

Or : $\gamma' = \nu$; $n - d' = D + 1$. Il en résulte que :

$$\gamma' \geqslant \frac{n}{n - d'} \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

Le nombre antichromatique ν vérifie les relations symétriques :

$$\frac{n}{D+1} \leqslant \nu \leqslant n - d$$

De plus, si l'on désigne par C la plus grande des cliques dans G, on a : $\gamma \geqslant |C|$, d'où : $\nu' \geqslant \alpha'$, α' étant le nombre de stabilité interne du graphe G' ; et par suite, dans tout graphe : $\nu \geqslant \alpha$ (relation duale de : $\alpha\gamma \geqslant n$).

Méthode empirique pour la recherche du nombre chromatique :

Le procédé consiste à trouver une coloration du graphe $G = G_0$ à l'aide de p couleurs, p variant dans les limites précédentes. Pour cela, on élimine les éléments de X, formant le sous-ensemble :

$$E_0 = \{ x \mid d_0(x) < p \}$$

Soit $G_1 = (X_1, U_1)$ le sous-graphe obtenu. Il est clair que, s'il est possible de colorer G_1 avec p couleurs, il en est de même pour G. On simplifie alors le graphe G_1 par élimination du sous-ensemble $E_1 \subset X_1$, défini par :

$$E_1 = \{ x \mid d_1(x) < p \}$$

On répète le processus jusqu'à ce que l'on se trouve en présence de l'une ou l'autre des alternatives (en désignant par $G_k = (X_k, U_k)$ le graphe obtenu à cette étape) :

a) $X_k = \varnothing$: il est possible de colorer G à l'aide de p couleurs ; on essaie : $\gamma = p - 1$.

b) $d_k(x) \geqslant p$, $\forall\, x \in X_k$: on applique au graphe G_k le sous-algorithme suivant :

On fait correspondre à tout sommet $x \in X_k$ un nombre entier $g(x) \geqslant 0$ par une procédure itérative. Supposons qu'à l'étape t on ait défini la fonction g sur un ensemble A_t de sommets. On cherche le sommet $x_1 \notin A_t$, tel que l'ensemble

$$\Gamma_k(x_1) \cap A_t$$

soit maximal. On définit alors $g(x_1)$ comme le plus petit entier non négatif qui n'appartient pas à l'ensemble :

$$\{ g(y) \mid y \in \Gamma_k(x_1) \cap A_t \} ;$$

on pose :

$$A_{t+1} = A_t \cup \{ x_1 \}$$

Dans le premier cas on obtient la coloration du graphe G en attribuant au sommet $x \in E_{r-1}$ ($r = 1, 2, \ldots, k$) la couleur qui n'apparaît pas dans $\Gamma_{r-1}(x)$.

ANNEXE II

GRAPHE n°1

1 ; 3 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 16 , 17 , 18

2 ; 4 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

3 ; 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 17

4 ; 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

5 ; 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

6 ; 8 , 9 , 11 , 12 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

7 ; 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17

8 ; 9 , 12 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

9 ; 11 , 12 , 14 , 15 , 16 , 18

10 ; 11 , 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

11 ; 13 , 14 , 15 , 16 , 17 , 18

12 ; 13 , 14 , 15 , 16 , 18

13 ; 14 , 15 , 16 , 17 , 18

14 ; 17 , 18

15 ; 16 , 17 , 18

16 ; 17 , 18

<u>SOLUTION</u>

7 , 6 , 9 , 5 , 6 , 3 , 8 , 2 , 4 , 3 , 1 , 1 , 5 , 9 , 7 , 9 , 4 , 8

GRAPHE n°2

1 ; 29

2 ; 10 , 13 , 18 , 19 , 20 , 21 , 24 , 36

3 ; 4 , 6 , 11 , 12 , 16 , 33 ,

4 ; 5

6 ; 7

7 ; 14

8 ; 9 , 51

9 ; 56 , 62

10 ; 25

13 ; 67

14 ; 15

15 ; 26

16 ; 17

17 ; 30

20 ; 66

21 ; 22

22 ; 23 , 64

23 ; 64

24 ; 25

25 ; 26 , 28

26 ; 27

30 ; 31 , 54

31 ; 54

32 ; 34

34 ; 35 , 61

35 ; 43

37 ; 38 , 42 , 43 , 49

38 ; 39 , 41

39 ; 40

40 ; 60

41 ; 45

43 ; 44

44 ; 59

45 ; 46 , 47

47 ; 48 , 57

48 ; 49

49 ; 50

51 ; 52

52 ; 53 , 55

53 ; 55

55 ; 56

57 ; 58

60 ; 61

61 ; 62 , 63

64 ; 65

65 ; 66

66 ; 67

SOLUTION

1 , 1 , 1 , 2 , 1 , 3 , 1 , 3 , 1 , 2 , 3 , 3 , 3 , 3 , 2 , 3 , 2 , 3 , 3 , 3 , 2 , 3
2 , 2 , 3 , 1 , 3 , 1 , 3 , 1 , 3 , 2 , 3 , 3 , 2 , 3 , 3 , 2 , 1 , 3 , 3 , 1 , 1 , 3 ,
3 , 2 , 1 , 3 , 2 , 1 , 2 , 2 , 3 , 2 , 1 , 3 , 1 , 3 , 1 , 2 , 1 , 3 , 3 , 1 , 3 , 2 ,
1 ,

GRAPHE n°3

4 ; 62

5 ; 98

8 ; 65 , 83

12 ; 18

14 ; 67

16 ; 17 , 19 , 20 , 21 , 22 , 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 ,
34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 42 , 50 , 52 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 66 ,
68 , 69 , 70 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 85 , 86 , 87 , 90 , 92

17 ; 19 , 20 , 21 , 22 , 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 ,
35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 50 , 52 , 54 , 55 ,
56 , 57 , 58 , 59 , 66 , 68 , 69 , 70 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 92 ,

18 ; 70

19 ; 20 , 21 , 22 , 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 ,
36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 50 , 51 , 52 , 54 , 55 ,
56 , 57 , 58 , 59 , 66 , 68 , 69 , 70 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 92 ,

20 ; 21 , 22 , 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 ,
37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 ,
56 , 57 , 58 , 59 , 66 , 68 , 69 , 70 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 92

21 ; 22 , 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 ,
38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 ,
57 , 58 , 59 , 60 , 66 , 68 , 69 , 70 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

22 ; 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 ,
39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 ,
57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

23 ; 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 ,
40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 ,
59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 ,
84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

24 ; 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 ,
41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 ,
59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 ,
84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92

25 ; 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 ,
42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 ,
60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 ,
85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92

26 ; 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 ,
43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 ,
62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 ,
86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

27 ; 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44
44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 ,
66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 ,
87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

28 ; 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 ,
45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 ,
68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 ,
88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

29 ; 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 ,
46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 ,
69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 ,
89 , 90 , 91 , 92 ,

30 ; 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 ,
49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 ,
71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 ,
89 , 90 , 91 , 92 ,

31 ; 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 ,
50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 ,
72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 ,
91 , 92

32 ; 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 ,
51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 ,
73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 ,
92 ,

33 ; 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 ,
52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 ,
74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

34 ; 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 ,
53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 ,
76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

35 ; 36 , 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 ,
54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 ,
76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

36 ; 37 , 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 ,
54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 ,
75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

37 ; 38 , 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 ,
55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 ,
76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92

38 ; 39 , 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 ,
57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

39 ; 40 , 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 ,
57 , 58 , 59 , 60 , 61 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 ,
77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

40 ; 41 , 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 ,
58 , 59 , 60 , 61 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 ,
78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

41 ; 42 , 43 , 44 , 45 , 46 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 ,
59 , 60 , 61 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

42 ; 43 , 44 , 45 , 46 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 ,
62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 ,
86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

43 ; 44 , 45 , 46 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61
62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 ,
84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

44 ; 45 , 46 , 47 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61
62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 ,
84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

45 ; 46 , 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61 , 62 ,
63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 ,
85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

46 ; 48 , 49 , 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61 , 62 , 63 ,
66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 ,
86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

47 ; 48 , 49 , 60 , 61 , 63 , 79 , 81 ,

48 ; 49 , 50 , 51 , 54 , 60 , 61 , 62 , 63 , 79 , 80 , 81 , 91 ,

49 ; 50 , 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 57 , 60 , 61 , 62 , 63 , 69 , 73 , 74 , 75 , 76 ,
77 , 79 , 80 , 81 , 91 ,

50 ; 51 , 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 ,
71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 ,
90 , 91 , 92 ,

51 ; 52 , 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 61 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 ,
72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 ,
91 , 92 ,

52 ; 53 , 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 ,
75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

53 ; 54 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 ,
76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

54 ; 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 ,
76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

55 ; 56 , 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 ,
78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

56 ; 57 , 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

57 ; 58 , 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 ,
80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

58 ; 59 , 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 ,
84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

59 ; 60 , 62 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 ,
85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

60 ; 61 , 62 , 63 , 66 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 ,
81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

61 ; 62 , 63 , 79 , 80 , 81 , 91 ,

62 ; 63 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 ,
86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

63 ; 76 , 79 , 80 , 81 , 91 ,

64 ; 65 ,

65 ; 83 ,

66 ; 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 ,
88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

68 ; 69 , 70 , 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 ,
88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

69 ; 71 , 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 ,
90 , 91 , 92 ,

71 ; 72 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 ,
91 , 92 ,

72 ; 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 ,
92 ,

73 ; 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

74 ; 75 , 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

75 ; 76 , 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92

76 ; 77 , 78 , 79 , 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

77 ; 78 , 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

78 ; 79 , 80 , 84 , 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

79 ; 80 , 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

80 ; 81 , 84 , 85 , 86 , 87 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

81 ; 91 ,

84 ; 85 , 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

85 ; 86 , 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

86 ; 87 , 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

87 ; 88 , 89 , 90 , 91 , 92 ,

88 ; 89 , 90 , 92 ,

89 ; 90 , 91 , 92 ,

90 ; 91 , 92 ,

91 ; 92 ,

93 ; 94 , 98 , 99 ,

94 ; 95 , 96 , 98 , 99 ,

95 ; 96 , 97 , 99 ,

96 ; 97 , 99 ,

98 ; 99 ,

SOLUTION

1 , 2 , 3 , 12 , 13 , 4 , 5 , 17 , 6 , 7 , 8 , 14 , 9 , 15 , 10 , 20 , 20 , 14 , 20
20 , 20 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 ,
22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 21 , 22 , 22 , 21 , 21 , 21 , 22 , 22 , 22 , 22 ,
22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 21 , 21 , 12 , 21 , 16 , 16 , 22 , 15 , 20 , 22 , 20 ,
22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 22 , 21 , 22 , 21 , 11 , 17 , 22 , 22 , 22 , 22 .
23 , 22 , 22 , 22 , 22 , 18 , 18 , 19 , 19 , 19 , 13 , 18

GRAPHE n°4

16 ; 17 ,

17 ; 19 , 20 ,

19 ; 20 , 21 ,

20 ; 21 , 22 , 23 , 56 , 68 , 69 , 72 , 85 , 86 , 87 , 90 ,

21 ; 22 , 23 , 56 , 68 , 69 , 72 , 85 , 86 , 87 , 90 ,

22 ; 23 , 24 , 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 31 , 32 , 33 , 34 , 38 , 42 , 55 , 56 , 57 ,
58 , 59 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 77 , 78 , 85 , 86 , 87 , 90 ,

23 ; 24 , 25 , 26 , 27 , 32 , 42 , 55 , 56 , 58 , 59 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 78 ,
85 , 86 , 87 , 90 ,

24 ; 25 , 26 , 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 56 ,
57 , 58 , 59 , 69 , 71 , 73 , 74 , 75 , 77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

25 ; 26 , 27 , 28 , 29 , 31 , 32 , 33 , 34 , 38 , 42 , 52 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 ,
69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 77 , 78 , 85 , 86 , 87 , 90 ,

26 ; 27 , 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 56 , 57 , 58 ,
59 , 69 , 71 , 73 , 74 , 75 , 77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

27 ; 28 , 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 ,
69 , 71 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

28 ; 29 , 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 57 , 58 , 59 , 69 , 71 ,
73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 90 ,

29 ; 30 , 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 57 , 58 , 59 , 71 , 73 , 74 ,
75 , 76 , 77 , 78 , 90 ,

30 ; 31 , 32 , 33 , 34 , 35 , 36 , 37 , 38 , 39 , 42 , 50 , 52 , 54 , 55 , 57 , 73 ,
74 , 75 , 76 , 77 ,

31 ; 32 , 33 , 34 , 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 69 , 71 , 73 , 74 ,
75 , 76 , 77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

32 ; 33 , 34 , 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 69 , 71 , 73 , 74 , 75 ,
77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

33 ; 34 , 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 69 , 71 , 73 , 74 , 75 , 76 ,
77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

34 ; 35 , 38 , 42 , 52 , 55 , 57 , 58 , 59 , 69 , 71 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,
87 , 90 ,

35 ; 36 , 37 , 38 , 39 , 42 , 50 , 52 , 54 , 55 , 57 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 ,

36 ; 37 , 39 , 41 , 45 , 50 , 52 , 54 , 74 , 75 , 76 ,

37 ; 39 , 41 , 45 , 50 , 52 , 54 , 74 , 75 , 76 ,

38 ; 42 , 52 , 55 , 57 , 58 , 59 , 71 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 , 90 ,

39 ; 40 , 41 , 43 , 44 , 45 , 46 , 50 , 51 , 54 , 76 ,

40 ; 41 , 43 , 44 , 45 , 46 , 50 , 51 , 54 ,

41 ; 43 , 44 , 45 , 46 , 50 , 51 , 54 ,

42 ; 52 , 55 , 56 , 57 , 58 , 59 , 69 , 71 , 73 , 74 , 75 , 77 , 78 , 86 , 87 ,

43 ; 44 , 45 , 46 , 50 , 51 , 54 ,

44 ; 45 , 46 , 50 , 51 , 54 ,

45 ; 46 , 50 , 51 , 54 ,

46 ; 50 , 51 , 54 ,

47 ; 61 ,

48 ; 61 , 81 ,

49 ; 81 ,

50 ; 51 , 54 , 75 , 76 ,

51 ; 54 , 60 , 80 , 91 ,

52 ; 54 , 55 , 57 , 58 , 59 , 73 , 74 , 75 , 76 , 77 , 78 ,

54 ; 74 , 75 , 76 ,

55 ; 56 , 57 , 58 , 59 , 69 , 71 , 73 , 74 , 75 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

56 ; 58 , 59 , 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 78 , 85 , 86 , 87 , 90 ,

57 ; 58 , 59 , 71 , 73 , 74 , 75 , 77 , 78 , 90 ,

58 ; 59 , 69 , 71 , 73 , 74 , 77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

59 ; 68 , 69 , 71 , 72 , 73 , 74 , 77 , 78 , 85 , 86 , 87 , 90 ,

60 ; 79 , 80 ,

61 ; 81 ,

68 ; 69 , 72 , 85 , 86 , 87 , 90 ,

69 ; 71 , 72 , 73 , 77 , 78 , 85 , 86 , 87 , 90 ,

71 ; 73 , 77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

72 ; 85 , 86 , 87 , 90 ,

73 ; 74 , 75 , 77 , 78 , 86 , 87 , 90 ,

74 ; 75 , 76 ; 77 , 78 ,

75 ; 76 , 77 , 78 ,

76 ; 77 , 78 , 87 , 90 ,

78 ; 86 , 87 , 90 ,

80 ; 91 ,

85 ; 86 , 87 , 90 ,

86 ; 87 , 90 ,

87 ; 90 ,

94 ; 99 ,

95 ; 96 ,

SOLUTION

1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , 13 , 14 , 15 , 34 , 34 , 16 , 41 ,
41 , 41 , 47 , 45 , 46 , 46 , 46 , 46 , 46 , 46 , 44 , 46 , 46 , 46 , 46 , 44 , 44 , 44
46 , 43 , 43 , 43 , 46 , 43 , 43 , 43 , 43 , 35 , 36 , 37 , 43 , 42 , 44 , 17 , 43 ,
46 , 45 , 46 , 46 , 45 , 38 , 35 , 18 , 19 , 20 , 21 , 22 , 23 , 45 , 45 , 24 , 46 ,
45 , 46 , 44 , 44 , 44 , 46 , 46 , 38 , 42 , 36 , 25 , 26 , 27 , 45 , 45 . 45 , 28 ,
29 , 45 , 42 , 30 , 31 , 39 , 40 , 40 , 32 , 33 . 39

- 19 -

BIBLIOGRAPHIE

[1] F. Bessiere, « Sur la recherche du nombre chromatique d'un graphe par un programme linéaire en nombres entiers », *Revue Française de Recherche Opérationnelle,* 2e trimestre 1965, n° 35.

[2] P. Huard, « Resolution of mathematical programming with non linear contraints by the method of centres » dans *Non linear Programming,* p. 208-219 (Ed. Abadie) North Holland Publ. Co. Amsterdam, 1967.

[3] J. P. Ludot, « Méthode heuristique de résolution des programmes mathématiques en nombres entiers », Recherche d'une résolution entière appartenant à un domaine convexe de $R^M(I)$ EdF, *Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches,* n° 2, série C, 1968.

[4] J. C. Dodu, J. P. Ludot et J. Pouget, « Sur le regroupement optimal des sommets d'un réseau électrique » ; E.D.F. Bulletin de la Direction des Études et Recherches, n° 1, série B, 1969.