

M. ALBOUY

A. BRETON

Interprétation économique du principe du maximum

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle,
tome 2, n° V3 (1968), p. 37-68

http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_3_37_0

© AFCET, 1968, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTERPRETATION ECONOMIQUE DU PRINCIPE DU MAXIMUM

par M. ALBOUY ⁽¹⁾ et A. BRETON ⁽²⁾

Résumé. — Les économistes disposent, avec le Principe du Maximum de Pontryagin, d'un outil efficace pour traiter les problèmes d'optimisation dynamique dans le cas relativement fréquent des systèmes transitifs.

En optimisation statique le théorème de Kuhn et Tucker fait apparaître des variables duales dont l'interprétation économique est fondamentale. De même le Principe du Maximum fait appel à des variables associées dont l'interprétation semble essentielle en économie dynamique.

En dehors de toute idée d'optimisation on peut montrer l'existence d'un vecteur de prix d'usage attaché à chaque commande du système à partir d'un état donné. Dans le cas de la commande optimale on peut montrer que ce vecteur de prix d'usage est précisément le vecteur des variables associées défini par Pontryagin.

On peut mettre en évidence la dualité qui lie le vecteur prix d'usage au mouvement dans le temps du vecteur d'état. On peut ainsi faire apparaître un problème primal et un problème dual. On peut alors interpréter l'optimum comme l'équilibre d'un jeu à somme nulle entre l'exploitant du système (aspect primal) et le propriétaire fictif du système (aspect dual).

Depuis les travaux de Kuhn et Tucker sur la programmation mathématique à variables continues, les économistes disposent d'un outil d'analyse statique extrêmement utile pour expliciter les théories marginalistes classiques, souligner leurs limites et préciser leur portée.

Les premiers travaux de Pontryagin et de son équipe ainsi que les développements récents de la théorie de la commande fournissent à présent aux économistes un outil d'analyse dynamique un peu plus subtil mais tout aussi fertile en enseignement.

Cet article ne prétend pas substituer à la démonstration donnée par les auteurs du Principe du Maximum une démonstration plus simple ou plus abstraite. Restant volontairement simple du point de vue mathématique, il vise à montrer que les résultats de Pontryagin et de son équipe sont essentiels pour le développement de la pensée économique.

(1) Ingénieur Études Économiques Générales E.D.F. Professeur d'Économie à l'E.S.E. et à l'école des H.E.C.

(2) Ingénieur Études Économiques Générales E.D.F.

I. THEORIE DE LA COMMANDE ET PRINCIPE DU MAXIMUM

I-1. — Classe de systèmes concernés

Dans la suite de cet article nous nous intéresserons à une classe particulière de systèmes. Tout d'abord nous supposons que le vecteur « état » du système, noté X , est défini dans un espace R^n , c'est-à-dire que chaque composante $X_i (i = 1 \dots n)$ possède toutes les propriétés de la droite réelle. La base de temps qui repère l'évolution du système est elle-même définie dans R . L'évolution $\frac{dX}{dt}$ au cours du temps (notée aussi $\overset{0}{X}$) est

régie par une transformation F qui dépend :

- de l'état X du système à l'instant t ,
- de l'époque t (et, par l'intermédiaire de t , de signaux extérieurs dont l'évolution $w(t)$ est connue),
- de variables de commande $u(t)$ permettant d'agir à tout instant sur le système.

Le vecteur de commande $u(t)$ de composantes $u_1, u_2 \dots u_r$ appartient à un certain domaine de commande $u \in \bar{U}$.

On admettra que chaque signal de commande est une fonction du temps, $u(t)$, continue par morceaux sur l'intervalle d'étude $t_0 \leq t \leq T$.

Ainsi, lorsqu'on connaît l'état initial X_{t_0} , la trajectoire du système est définie par le système d'équations différentielles du premier ordre :

$$\overset{0}{X}_i = F_i(X, u, t)$$

Les fonctions F_i sont définies dans tout le domaine $u \in \bar{U}$. On les suppose continues par rapport à X et u et continûment différentiables par rapport à X . Il s'agit donc d'un système :

- *transitif* (c'est-à-dire non héréditaire) « Toute l'histoire passée est résumée dans l'état X atteint par le système au moment présent »,
- *non autonome* : « La transformation qui régit l'évolution dépend de la date à laquelle s'effectue cette transformation »,
- *déterministe* : « Si l'on connaît la commande et l'état initial, l'évolution est complètement déterminée ».

Nous supposons, en outre, que ce système est muni d'une structure d'évaluation inter périodes *unidimensionnelle additive*, c'est-à-dire qu'il existe une fonction numérique d'évaluation instantanée $F_0(X, u, t)$ associée à toute portion infinitésimale de trajectoire et que la fonction d'évaluation globale relative à une portion de trajectoire quelconque comprise dans l'intervalle de temps (t_1, t_2) est donnée par l'intégrale :

$$\int_{t_1}^{t_2} F_0(X, u, t) dt \quad \text{pour } t_1, t_2 \in (t_0, T)$$

I-2. — Problèmes de régulation

On peut, à propos de tels systèmes, se poser plusieurs questions. La première consiste à étudier l'évolution du système entre t_0 et T en fonction de l'évolution des commandes $u \in U$. Cette exploration permet de définir l'ensemble des points qu'il est possible d'atteindre à partir d'une situation initiale fixée, ou réciproquement l'ensemble des situations de départ permettant d'atteindre une cible donnée (étude de contrôlabilité). On peut ensuite chercher à repérer la valeur prise par la fonction d'évaluation globale associée à une trajectoire. Cette analyse, trop souvent négligée, est extrêmement importante, car elle fait déjà émerger, en dehors de toute préoccupation d'optimum, un système de valorisation (étude de dualité). On peut enfin rechercher une commande optimale $u^*(t)$, c'est-à-dire une commande qui appartienne à la classe des commandes possibles et qui maximise (ou respectivement minimise) la fonction d'évaluation globale entre t_0 et T .

I-3. — Portée économique de la théorie de la commande

En dépit du caractère assez général des problèmes qui viennent d'être soulevés, on notera qu'il s'agit d'une classe particulière de systèmes, et on peut s'interroger sur la portée économique de la théorie de la commande. Bien évidemment l'hypothèse d'une transformation continue déterministe ne correspond pas à la perception que nous pouvons avoir des phénomènes économiques ; cependant, devant les difficultés mathématiques, nous sommes souvent obligés de nous en contenter, tout au moins en première approximation.

L'hypothèse de transitivité est commode car elle évite de manier les équations intégral-différentielles ; elle n'est pas absurde dans la mesure où le système se prête à une observation convenable. En effet, on peut constater que le caractère héréditaire que nous attribuons souvent aux phénomènes, provient d'une carence dans la procédure d'observation et d'identification. Ceci étant, il est facile de montrer sur de nombreux exemples que l'on cherche souvent à identifier les phénomènes économiques sous forme de systèmes déterministes transitifs, non autonomes.

L'hypothèse la plus critiquable concerne la structure d'évaluation, mais là encore nous sommes contraints de constater qu'il est commode, pour le centre de commande, de choisir une fonction numérique intertemporelle additive.

C'est ainsi qu'en matière de choix des investissements, le vecteur « État » du système est défini par les capacités installées des différents moyens de production, le vecteur « commande » par les décisions d'investissement et de déclassement, la fonction globale d'évaluation par la somme actualisée des dépenses d'investissements et d'exploitation.

Concernant la gestion des stocks, le vecteur « État » du système est formé des niveaux des différents stocks. S'il s'agit d'un problème d'approvisionnement-stockage, le vecteur « commande » représente les flux

d'entrée, la fonction d'évaluation enregistre la somme des dépenses actualisées d'approvisionnement et de stockage occasionnées pour satisfaire les flux de sortie prévus. S'il s'agit d'un problème de production-stockage, les flux d'entrée du système étant connus, le vecteur de commande concerne les flux de sortie tandis que la somme actualisée des dépenses d'exploitation sert de fonction économique d'évaluation.

Cette formalisation s'étend à d'autres phénomènes, par exemple aux problèmes de financement. Dans ce cas, le système est repéré par l'état du stock de réserves alimentées par l'autofinancement et l'état des différents endettements.

Parmi toutes les politiques financières d'emprunt et d'autofinancement qui permettent de faire face aux besoins d'investissement, l'entreprise choisira celle qui minimise durablement ses charges financières. Ces quelques exemples démontrent la nécessité d'une interprétation économique générale du Principe du Maximum.

I-4. — Rappel du principe du Maximum

I-4-1. — Fonctions auxiliaires

Considérons donc un système appartenant à la classe définie ci-dessus.

L'évolution est régie par n équations de mouvement

$$\dot{X}_i = F_i(X, u, t) \quad \text{avec} \quad i = (1 \dots n)$$

La fonction d'évaluation sur l'intervalle d'étude (t_0, T) s'écrit

$$X_0 = \int_{t_0}^T F_0(X, u, t) dt$$

Parmi les commandes admissibles $u(t) \in \mathbf{U}$ on suppose qu'il existe au moins une commande optimale.

Quelles sont les conditions caractéristiques d'une commande (ou si l'on préfère d'une trajectoire) optimale ?

Pour énoncer ces conditions, Pontryagin introduit un système de variables auxiliaires $\psi_0, \psi_1 \dots \psi_n$ définies par $n + 1$ équations différentielles du premier ordre :

$$\dot{\psi}_i = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial F_{\alpha}(X, u, t)}{\partial X_i} \psi_{\alpha}, \quad (i = 0 \dots n)$$

($\dot{\psi}_i$ dérivée de ψ_i par rapport au temps).

La solution de ces équations différentielles définit un vecteur à $n + 1$ composantes, ces dernières étant des fonctions du temps différentiables par morceaux. Ces fonctions auxiliaires sont alors utilisées pour construire une nouvelle fonction d'évaluation instantanée, \mathcal{H} , appelé *hamiltonien*, et qui s'écrit :

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=0}^n \psi_{\alpha} F_{\alpha}(X, u, t)$$

d'où l'on déduit immédiatement :

$$\begin{aligned} \overset{0}{X}_i &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \psi_i}, \quad (i = 0 \dots n), \quad \text{avec} \quad \overset{0}{X}_0 = F_0(X, u, t); \\ \overset{0}{\psi}_i &= - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial X_i}, \quad (i = 0 \dots n). \end{aligned}$$

I-4-2. — Enoncé

Ces définitions préalables étant données, le principe du Maximum s'énonce alors de la manière suivante :

Soit $u(t)$ pour $t \in (t_0, T)$ une commande admissible faisant passer le système de l'état initial (X_{t_0}, t_0) à un état final (X_T, T) . Pour que $u(t)$ et la trajectoire correspondante $X(t)$ soit respectivement une commande optimale $u^*(t)$ et une trajectoire optimale $X^*(t)$, il est nécessaire qu'il existe un système de fonctions auxiliaires non nulles $\psi(t)$ telles que :

1° Pour tout $t \in (t_0, T)$ l'hamiltonien $\mathcal{H}[\psi(t), X(t), u(t), t]$ atteint son maximum pour $u = u^*(t)$; c'est-à-dire :

$$\mathcal{H}[\psi(t), X^*(t), u^*(t), t] = \mathcal{H}^*(\psi(t), X(t), t).$$

2° A tout instant t .

$\psi_0(t)$ est une constante négative, et :

$$\mathcal{H}^* = - \int_{t_0}^T \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial F_{\alpha}[X(\mathcal{T}), u(\mathcal{T}), \mathcal{T}]}{\partial \mathcal{T}} \psi_{\alpha}(\mathcal{T}) d\mathcal{T}$$

— Si le système est autonome, c'est-à-dire si la fonction d'évaluation instantanée F_0 et les équations du mouvement F_i ($i = 1 \dots n$) sont indépendantes du temps, on obtient alors $\boxed{\mathcal{H}^* = 0}$.

— Si l'on conserve un système non autonome, on peut faire jouer au temps le rôle d'une variable supplémentaire en écrivant $X_{n+1} = t$ d'où

$$\overset{0}{X}_{n+1} = 1.$$

Dans ce cas, on peut associer une variable adjointe ψ_{n+1} à cette nouvelle variable d'état en écrivant :

$$\overset{0}{\psi}_{n+1} = - \sum_{\alpha=0}^n \frac{\partial F_{\alpha}(X, u, t)}{\partial t} \psi_{\alpha}$$

Et si l'on pose :

$$\mathcal{H}' = \sum_{\alpha=0}^{n+1} \psi_{\alpha} F_{\alpha}(X, u, t) = \mathcal{H} + \psi_{n+1},$$

on définit un nouvel hamiltonien \mathcal{H}' .

Avec cet hamiltonien généralisé, on obtient :

$$1^{\circ} \mathcal{H}'(\psi(t), X(t), u(t), t) = \mathcal{H}'^*(\psi(t), X(t), t), \text{ pour } u = u^*(t).$$

$$2^{\circ} \mathcal{H}'^*(\psi(t), X(t), t) = 0, \text{ car } \mathcal{H}^* + \psi_{n+1}(t) = 0.$$

I-4-3. — Conditions aux limites

On a énoncé le principe dans le cas d'un état final (X_T, T) imposé. Que se passe-t-il si l'état final est libre ?

D'une façon générale, Pontryagin a établi une condition dite *condition de transversalité* qui permet le raccordement de la trajectoire aux conditions limites. Soit S l'hypersurface sur laquelle doit se trouver l'état final pour $t = T$ et (K) l'hyperplan tangent à S en ce point. On dira que le vecteur $\psi(T)$ de composantes $\psi_1 \dots \psi_n$ satisfait la *condition de transversalité* en T si le vecteur $\psi(T)$ est orthogonal à (K) ⁽¹⁾.

I-4-4. — Remarque

Ce résultat mathématique est fondamental pour plusieurs raisons.

Tout d'abord il *généralise dans plusieurs directions le calcul classique des variations* :

— Il s'intéresse non plus à une variable de commande unique mais à un vecteur de variables de commande.

— Les variables de commande ne sont pas nécessairement les dérivées par rapport au temps des variables d'état.

— Les conditions caractéristiques de la trajectoire optimale sont valables *non seulement à l'intérieur* du domaine de commande *mais aussi sur sa frontière*.

Ensuite, et c'est là l'objet principal de cet article, il fait apparaître un ensemble de fonctions auxiliaires $\psi(t)$ qui jouent en théorie économique un rôle de premier plan.

Enfin, bien que s'adressant à une classe de systèmes un peu moins vaste que ceux que prétend traiter la programmation dynamique, le principe du Maximum paraît plus adapté à la résolution de nombreux problèmes.

D'un point de vue mathématique, on peut noter que la démonstration de Pontryagin évite soigneusement de s'appuyer sur le principe d'optimalité sur lequel est fondée la programmation dynamique.

De même, on peut observer que les problèmes d'existence d'une trajectoire optimale sont supposés résolus et que le principe du *Maximum* constitue seulement une condition *nécessaire d'optimalité*. Toutefois, on peut démontrer qu'il fournit une condition nécessaire et suffisante dans le cas d'un système linéaire soumis à une commande additive, du type :

$$\dot{X}(t) = A(t) \cdot X(t) + \rho(u)$$

(1) Autrement dit la condition de transversalité signifie que le produit scalaire, noté $\langle \psi(T), \theta \rangle$, pour tout vecteur θ appartenant à (K) est nul. Pour un état final libre, $\psi(T) = 0$.

II. INTERPRETATION ECONOMIQUE

Cette interprétation économique sera divisée en trois parties :

Tout d'abord, nous montrerons que l'on peut associer à toute trajectoire, qu'elle soit ou non optimale, un système de valorisation, et nous énoncerons un théorème de conservation de la valeur.

Ensuite, nous nous intéresserons à une trajectoire optimale afin d'identifier ce système de valorisation avec le système des fonctions auxiliaires de Pontryagin et l'équation de conservation avec l'hamiltonien généralisé.

Dans une troisième partie, nous montrerons la liaison qui peut exister entre les équations de récurrence de la programmation dynamique et le principe du Maximum, ce qui nous permettra d'explicitier le rôle des fonctions ψ de Pontryagin comme indicateurs de décomposition temporelle.

II-1. — Régulation commandée. Théorème de conservation

II-1-1. — Variables et forme bilinéaire associées à une commande

RECHERCHE D'UN VECTEUR DE VARIABLES ASSOCIÉES

On suppose connue à l'instant t la règle de commande $\tilde{u}(X(\mathcal{T}), \mathcal{T})$ que l'on appliquera au système aux époques $\mathcal{T} \in (t, T)$ ainsi que l'état $X(t)$ dans lequel se trouve le système à l'instant t . On considère la fonction d'évaluation globale entre t et T

$$\int_t^T F_0[X(\mathcal{T}), \tilde{u}(X(\mathcal{T}), \mathcal{T}), \mathcal{T}] d\mathcal{T}$$

qui ne dépend, pour $\tilde{u}(X(\mathcal{T}), \mathcal{T})$ fixée, que de $X(t)$ et de t , soit :

$$\tilde{J}[X(t), t] = \int_t^T F_0[X(\mathcal{T}), \tilde{u}(X(\mathcal{T}), \mathcal{T}), \mathcal{T}] d\mathcal{T}$$

En différentiant par rapport au temps, on obtient :

$$F_0[X(t), \tilde{u}(X(t), t), t] + \frac{d\tilde{J}[X(t), t]}{dt} = 0$$

soit encore :

$$\boxed{F_0[X, \tilde{u}, t] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \tilde{J}[X(t), t]}{\partial X_i} \overset{\circ}{X}_i + \frac{\partial \tilde{J}[X(t), t]}{\partial t} = 0}$$

(équation 1)

On peut définir les nouvelles variables

$$p_i = - \frac{\partial \tilde{J}[X(t), t]}{\partial X_i} \quad i = (1 \dots n)$$

$$p_{n+1} = - \frac{\partial \tilde{J}[X(t), t]}{\partial t}$$

Le vecteur $p(t)$ représente donc un système de variables associées à la règle de commande $\tilde{u}[X(\mathfrak{T}), \mathfrak{T}]$ pour $\mathfrak{T} \in (t, T)$. Comment peut-on le calculer ?

DETERMINATION D'UN VECTEUR $p(t)$

Le vecteur $p(t)$ satisfait à l'équation (1), équation aux dérivées partielles qui s'écrit :

$$F_0[X(t), \tilde{u}(X(t), t), t] - \sum_{i=1}^n p_i \overset{\circ}{X}_i - p_{n+1} = 0$$

On peut poser :

$$G[X(t), \tilde{u}(X(t), t), p, t] = F_0 - \sum_{i=1}^n p_i \overset{\circ}{X}_i \quad (2)$$

L'équation (1) prend alors la forme suivante :

$$G[X(t), \tilde{u}(X(t), t), p, t] - p_{n+1} = 0 \quad (3)$$

En utilisant les équations du mouvement :

$$\overset{\circ}{X}_i = F_i[X(t), u(t), t] \quad , \quad i = (1 \dots n)$$

on déduit immédiatement de l'équation (3) :

$$\boxed{\overset{\circ}{X}_i = - \frac{\partial G}{\partial p_i} \quad , \quad (i = 1 \dots n)} \quad (4)$$

D'autre part, comme l'équation (3) se met sous la forme :

$$G[X(t), \tilde{u}(X(t), t), p, t] = - \frac{\partial \tilde{J}[X(t), t]}{\partial t}$$

en prenant la dérivée partielle par rapport à X_i , on obtient :

$$\frac{\partial G}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^r \frac{\partial G}{\partial u_j} \times \frac{\partial u_j}{\partial X_i} = - \frac{\partial}{\partial X_i} \left[\frac{\partial \tilde{J}[X(t), t]}{\partial t} \right]$$

Soit, en inversant l'ordre des dérivations :

$$\frac{\partial p_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[- \frac{\partial \tilde{J}}{\partial X_i} \right] = \frac{\partial G}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^r \frac{\partial G}{\partial u_j} \times \frac{\partial u_j}{\partial X_i}$$

D'une façon générale, le vecteur p dépend de la règle de commande \tilde{u} et de la trajectoire X . Mais si celles-ci sont fixées, on peut considérer le vecteur p comme une simple fonction du temps, d'où le système d'équations différentielles :

$$\boxed{{}^0 p_i = \frac{\partial G}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^r \frac{\partial G}{\partial u_j} \times \frac{\partial u_j}{\partial X_i} \quad , \quad \left(\begin{array}{l} i = 1 \dots n \\ j = 1 \dots r \end{array} \right)} \quad (5)$$

Ces équations permettent de déterminer l'évolution du vecteur $\tilde{p}(\mathfrak{T})$ associé à la règle de commande $\tilde{u}(X(\mathfrak{T}), \mathfrak{T})$ sur l'intervalle (t, T) à condition de connaître les conditions aux limites.

En particulier, dans le cas d'un état final libre ⁽¹⁾, on sait que

$$\tilde{J}[X(t), t] = \int_t^T F_0[X(\mathfrak{T}), \tilde{u}(X(\mathfrak{T}), \mathfrak{T}), \mathfrak{T}] d\mathfrak{T} \text{ tend vers } 0$$

lorsque t tend vers T et ceci quels que soient $X(T)$ et T . Donc $\tilde{J}[X(T), T]$ est identiquement nul, ce qui entraîne $p_i(T) = 0$ dans le cas particulier d'un état final libre.

FORME BILINÉAIRE ASSOCIÉE A LA COMMANDE

Il existe une *forme bilinéaire* entre les $\overset{0}{X}_i$ et les p_i . On peut en effet mettre l'équation (1)

$$F_0(X, u, t) - \sum_{i=1}^n p_i \cdot F_i(X, u, t) - p_{n+1} = 0$$

sous la forme

$$\sum_{i=0}^n p_i \cdot F_i(X, u, t) + p_{n+1} = 0$$

en posant $\overset{0}{X}_0 = F_0(X, u, t)$ et $p_0 = -1$.

Si l'on pose à présent :

$X_{n+1} = t$, (d'où $\overset{0}{X}_{n+1} = 1$), on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n+1} p_i \cdot \overset{0}{X}_i = 0$$

Il existe donc une forme bilinéaire entre les p_i et les $\overset{0}{X}_i$. Lorsque $\overset{0}{X}_i$ décrit l'espace vectoriel R^{n+2} , p_i décrit une partie de l'espace dual de R^{n+2} . C'est pourquoi on appellera, par la suite p_i , variable duale.

(1) Cas auquel on peut se ramener fréquemment en économie.

II-1-2. — Interprétation économique

Quelle est la signification économique du vecteur $p(t)$, du vecteur ${}^0p(t)$ et de la forme bilinéaire ?

D'après sa définition, la quantité $— [p_i(t)]$ représente à l'instant t la variation de la fonction d'évaluation globale $\int_t^T F_0(X, u, \mathfrak{T}) d\mathfrak{T}$, engendrée par une variation marginale de l'état $X_i(t)$ lorsqu'on connaît la règle des décisions futures.

Dans le cas d'un problème d'investissement, par exemple, X représente le parc d'équipement, u la politique d'investissement, $F(X, u, \mathfrak{T})$ la valeur actuelle à l'époque 0 des coûts d'investissement et d'exploitation de l'époque \mathfrak{T} . Si à partir d'un état donné du parc à l'instant t , on se donne une politique d'investissement et de gestion dans le futur, on connaît la dépense totale actualisée qui lui est associée. La quantité p_i est la réduction des dépenses futures actualisées, entraînée par une augmentation marginale de la capacité installée en type d'équipement (i). Autrement dit, p est la *valorisation* ⁽¹⁾ que l'on attache implicitement au parc d'équipement lorsqu'on a défini la politique d'investissement et de gestion c'est-à-dire la manière de l'utiliser.

Dans le cas où X représente les niveaux des stocks d'eau d'un système de réservoirs hydrauliques, u les décisions de turbinage et les ordres de production aux centrales thermiques, $\int_t^T F_0(X, u, \mathfrak{T}) d\mathfrak{T}$ le coût total de production entre t et T pour satisfaire exactement la demande d'électricité $D(\mathfrak{T})$ à tout instant \mathfrak{T} , l'interprétation économique des variables $p(t)$ est claire. Elles représentent la *valeur implicite* que l'on attribue à l'instant \mathfrak{T} aux différents stocks d'eau du seul fait qu'on se donne la politique de gestion c'est-à-dire l'évolution du système. La valeur p_i du stock d'eau X_i est en effet égale à l'économie de combustibles que l'on peut dégager dans le futur si l'on dispose d'un m^3 d'eau supplémentaire (au niveau X_i) dans le réservoir (i) et si l'on suit la politique de gestion fixée.

En matière de financement, si l'on possède un niveau X de réserves, à toute stratégie financière correspond une valeur implicite de l'auto-financement. Cette valeur est révélée par la réduction des charges que l'on pourrait espérer si l'on disposait d'une réserve plus élevée. Elle mesure donc le *taux d'actualisation interne implicite* de cette entreprise.

Bref, toute trajectoire d'un système économique à partir d'un état $X(t)$ représente, qu'on le veuille ou non, un arbitrage dans le temps : il est donc normal qu'à chaque niveau des variables d'état corresponde un système de valorisation lié à l'usage que l'on va faire dans le futur des « potentialités »

(1) Au sens de la fonction d'évaluation adoptée.

résumées dans l'état $X(t)$. Donc d'une façon générale, $p_i(t)$ est le « prix d'usage » du bien X_i à la date t , eu égard à la politique de gestion adoptée ⁽¹⁾.

Cette mesure du « prix d'usage » du système est évidemment comme toute mesure, une mesure *marginale*. La détermination de la valeur de $p(\mathcal{T})$ à un instant \mathcal{T} quelconque au moyen du système d'équations différentielles (4) et (5) montre que cette interprétation est valable pour n'importe quel état X et à n'importe quel instant $\mathcal{T} \in [t_0, T]$.

Le vecteur $\overset{0}{p}(\mathcal{T})$ est évidemment la variation au cours du temps du « prix d'usage » du système considéré. Cette variation permet d'apprécier la réponse du système en termes de variables duales, c'est-à-dire la variation du prix d'usage d'un parc d'équipement, du prix fictif des réserves hydrauliques ou encore du taux d'actualisation interne lié à l'évolution des réserves financières. En matière d'équipement, la variation du prix d'usage prend d'ailleurs une appellation plus précise : $\overset{0}{p}(t)$, différence entre le prix d'usage à l'instant t et le prix d'usage à l'instant $(t + dt)$, n'est pas autre chose que l'*amortissement économique*, c'est-à-dire la mesure de la dépréciation. Quant à la forme bilinéaire :

$$G - p_{n+1} = F_0 - \sum_{i=1}^n p_i \cdot \overset{0}{X}_i - p_{n+1} = 0$$

elle exprime la *conservation de la valeur* à chaque instant.

Le coût immédiat F_0 entraîné par le changement d'état $\overset{0}{X}$ est en effet compensé par l'accroissement de la *valeur potentielle du système* :

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i \cdot \overset{0}{X}_i.$$

Cet accroissement de la valeur potentielle du système a une

double origine : accroissement autonome $\sum_{i=1}^n p_i \cdot \overset{0}{X}_i$ et accroissement non autonome dû à l'effet du paramètre « temps » : p_{n+1} .

Cette forme bilinéaire explique l'intérêt du « compte de capital » ⁽²⁾ c'est-à-dire d'un compte retraçant les *mouvements du « patrimoine »* au cours de la période $(t, t + dt)$.

Ce compte de capital reflète le compte d'exploitation : les dépenses d'investissements qui figurent au débit du compte d'exploitation sont portées au crédit du compte de capital ; cette double écriture exprime donc la conservation de la valeur. Par ailleurs, on comprend facilement que la valeur du patrimoine ne dépende que des services qu'il peut rendre, donc de la règle d'utilisation.

(1) Le prix d'usage d'un ouvrage de production a été défini par M. Boiteux comme la dépense supplémentaire qu'aurait à supporter l'exploitant pour poursuivre ultérieurement son activité comme il avait *prévu de le faire*, s'il devait être privé d'une unité marginale de cet ouvrage au moment considéré.

(2) Le « compte de capital » n'apparaît pas explicitement en comptabilité traditionnelle de l'entreprise. On peut cependant le retrouver en comparant le bilan en (t) après distribution des bénéfices et le bilan en $(t + 1)$ avant distribution des bénéfices.

Une troisième interprétation de la forme bilinéaire peut être donnée en termes de jeu. On peut en effet imaginer de décomposer l'entreprise en deux parties : un centre de commande qui s'intéresse à la *valeur du patrimoine* et qui a le choix des variables p , un centre de commande qui s'intéresse aux *décisions immédiates de gestion* et qui a le choix de $\overset{0}{X}$ par l'intermédiaire des décisions u . D'après la forme bilinéaire, il s'agit d'un jeu à somme nulle. Reste à savoir si l'on ne peut pas définir une stratégie optimale u^* ainsi que la stratégie duale correspondante p^* .

Le principe du Maximum nous indique les conditions caractéristiques de l'optimum u^* . Peut-on interpréter ces conditions ?

II-2. — Régulation optimale du système

II-2-1. — Identité de p et de ψ à l'optimum

CAS DE L'ÉTAT FINAL LIBRE

Si l'on s'intéresse à présent à la trajectoire optimale, c'est-à-dire à la règle de gestion optimale $u^*(X(\mathcal{C}), \mathcal{C})$ pour $\mathcal{C} \in (t_0, T)$ à partir d'un état initial $X_0 = X(t_0)$ donné, il existe un vecteur $p^*(\mathcal{C})$ de variables associées défini par le système d'équations différentielles :

$$\overset{0}{p}_i^*(\mathcal{C}) = \frac{\partial G^*}{\partial X_i} + \sum_{j=1}^r \frac{\partial G^*}{\partial u_j} \times \frac{\partial u_j}{\partial X_i}$$

D'autre part, le principe du Maximum nous apprend qu'à toute règle de commande optimale, on peut aussi associer un vecteur $\psi^*(\mathcal{C})$ qui vérifie le système différentiel suivant :

$$\overset{0}{\psi}_i^*(\mathcal{C}) = - \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial X_i}$$

Il est évident que l'on peut transformer ce système différentiel en le mettant sous la forme :

$$\overset{0}{\psi}_i^*(\mathcal{C}) = - \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial X_i} - \sum_{j=1}^r \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_j} \times \frac{\partial u_j}{\partial X_i}$$

En effet, à l'intérieur du domaine de commande la maximisation de l'hamiltonien s'écrit $\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_j} = 0$ et sur la frontière de ce même domaine $\frac{\partial u_j}{\partial X_i}$ est nul puisque les limites du domaine sont indépendantes des variables d'État.

Il faut à présent montrer que p et ψ sont identiques à l'optimum. On notera tout d'abord que les formes de \mathcal{H}^* et de G^* sont identiques. En effet, si l'on remplace p^* par ψ^* , on obtient :

$$\mathcal{H}(X^*, u^*, \psi^*, \mathcal{C}) = - G(X^*, u^*, \psi^*, \mathcal{C})$$

On en déduit que $\psi^*(\mathcal{C})$ et $p^*(\mathcal{C})$ sont solutions du même système différentiel. Il s'agit d'un système d'équations différentielles linéaires

qui admet une solution unique. Par conséquent, si on montre qu'à un instant quelconque on a l'égalité de ψ^* et de p^* , on aura montré l'identité de ψ^* et p^* à chaque instant.

On a déjà montré que, pour un état final libre, $p_i(T) = 0$ quel que soit $i = 1 \dots n$. D'autre part la condition de transversalité permet d'affirmer que $\psi_i^*(T) = 0$ quel que soit $i = 1 \dots n$. On a donc $p^*(T) = \psi^*(T)$, ce qui permet d'affirmer que pour $t \in (t_0, T)$,

$$p^*(t) = \psi^*(t).$$

CAS D'UNE CONDITION SUR L'ETAT FINAL

L'identification précédente n'est pas valable dans le cas d'une condition sur l'état final du type $\rho_k[X(T), T] = 0$, $k = 1 \dots m$. En effet dans ce cas $p(T)$ est nul tandis que $\psi(T)$ est généralement différent de zéro.

Ceci suggère de modifier la fonction d'évaluation sur laquelle est bâtie la définition de p en prenant comme nouvelle fonction :

$$\tilde{J}[X(t), t, \lambda, X(T), T] = \tilde{J}[X(t), t] + \sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \rho_k[X(T), T]$$

Lorsque les conditions sur l'état final sont vérifiées, il est clair que la valeur de \tilde{J}' est la même que celle de \tilde{J} . En procédant comme précédemment on pourrait définir un vecteur de variables associées

$$\tilde{p}'_i(t) = - \frac{\partial \tilde{J}'}{\partial X_i}$$

A l'instant T , ce vecteur est égal à :

$$\sum_{k=1}^m \lambda_k \cdot \frac{\partial \rho_k[X(T), T]}{\partial X_i(T)}$$

D'autre part, à l'optimum et lorsque les conditions sur l'état final sont satisfaites, on vérifie que $\psi^*(T)$ et $p^{*'}(T)$ sont solutions du même système d'équations différentielles linéaires. La condition de transversalité énoncée par Pontryagin permet d'affirmer qu'il existe un vecteur Γ tel que

$$\psi_i(T) = \sum_{k=1}^m \Gamma_k \frac{\partial \rho_k}{\partial X_i}$$

Or comme on dispose du choix des λ_k , on peut prendre en particulier $\lambda_k = \Gamma_k$, ce qui détermine complètement la nouvelle fonction d'évaluation. On a alors : $p_i^{*'}(T) = \psi_i^*(T)$ pour $i = 1 \dots n$, d'où :

$$p_i^{*'}(t) = \psi_i^*(t) \text{ pour } i = 1 \dots n$$

quel que soit t .

Dans le cas particulier d'un état final imposé, $X_i(T) = \alpha_i$ on obtient :

$$p_i^*(T) = \psi_i^*(T) = \lambda_i.$$

Nous venons donc d'identifier $p^*(t)$ et $\psi^*(t)$ sous réserve d'une modification de la fonction d'évaluation. Par la suite nous n'utiliserons plus que les notations p et J laissant au lecteur le soin de choisir la fonction d'évaluation adéquate.

PROBLEME PRIMAL

Lorsqu'on suit l'énoncé du principe du Maximum, on remarque que la recherche de la commande optimale $u^*(t)$ à la date t se ramène à la recherche du maximum de l'hamiltonien \mathcal{H} par rapport à u en supposant connu $\psi^*(t)$ que l'on considère dans ce cas *comme un paramètre*. Pontryagin écrit en effet :

$$\mathcal{H}^*(X^*, u^*, \psi^*, t) = \text{Max}_{u \in U} \mathcal{H}[X^*, u, \psi^*, t]$$

On sait maintenant que ceci peut encore s'écrire au moyen des fonctions G

$$G^*[X^*, u^*, p^*, t] = \text{Min}_{u \in U} G[X^*, u, p^*, t]$$

Choisir la commande optimale $u^*(t)$ à la date t , à partir de l'état $X^*(t)$, revient à choisir l'évolution du système $\overset{\circ}{X}^*(t)$ qui paraît la meilleure à cet instant.

Autrement dit, tout se passe comme si à tout instant t on cherchait, parmi *tous les mouvements possibles* $\overset{\circ}{X}(t)$, celui qui minimise la fonction $G[X^*, u, p^*, t]$ construite à partir d'un système $p^*(t)$ de *valorisations optimales*.

On reconnaît là l'énoncé d'un problème PRIMAL qu'on peut résumer dans l'inégalité :

$$\left[F_0^* - \sum_{i=1}^n p_i^* \cdot \overset{\circ}{X}_i^* \right] \leq \left[F_0 - \sum_{i=1}^n p_i^*, \overset{\circ}{X}_i \right] \quad (6)$$

c'est-à-dire :

$$G[p^*, \overset{\circ}{X}^*] \leq G[p^*, \overset{\circ}{X}]$$

Rien n'interdit d'ajouter aux deux membres de l'inégalité, la quantité p_{n+1}^* , soit avec les notations précédentes :

$$0 = G'(p^*, \overset{\circ}{X}^*) \leq G'(p^*, \overset{\circ}{X}) \quad (7)$$

Les variables sont ici $\overset{\circ}{X}$ et on raisonne en un point $X^*(t)$ de la trajectoire optimale.

PROBLEME DUAL

Au problème PRIMAL qui correspond à l'énoncé du principe du Maximum, on peut associer un problème DUAL qui *est équivalent*.

En effet, on a montré au paragraphe précédent qu'à une commande quelconque $\tilde{u}(\mathcal{T})$ définie sur la période $\mathcal{T} \in (t, T)$, à partir d'un état quelconque $X(t)$ on peut associer un système de valorisation $\tilde{p}(t)$ tel que

$$\tilde{F}_0 - \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{p}_i \cdot \tilde{X}_i = 0 \text{ (équation de conservation)}$$

Le principe du Maximum nous indique que pour une commande $\tilde{u}(\mathcal{T})$ définie sur la période $\mathcal{T} \in (t, T)$ à partir d'un état optimal $X^*(t)$ on peut écrire l'inégalité :

$$\tilde{F}_0 - \sum_{i=1}^{n+1} p_i^* \cdot \tilde{X}_i \geq F_0^* - \sum_{i=1}^{n+1} p_i^* \cdot X_i^* = 0$$

Cette inégalité jointe à l'équation de conservation nous permet d'écrire :

$$\sum_{i=1}^{n+1} p_i^* \cdot \tilde{X}_i - \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{p}_i \cdot \tilde{X}_i \leq 0$$

ou encore, en ajoutant F_0^* .

$$F_0^* - \sum_{i=1}^{n+1} p_i^* \cdot \tilde{X}_i \geq F_0^* - \sum_{i=1}^{n+1} \tilde{p}_i \cdot \tilde{X}_i \quad (8)$$

Supposons que nous nous intéressions, à partir d'un état optimal $X^*(t)$, aux commandes $\tilde{u}(\mathcal{T})$ qui se décomposent en :

- $u^*(t)$ pour la première période $(t, t + dt)$,
- $u(\mathcal{T})$ quelconque pour les époques ultérieures $\mathcal{T} \in (t + dt, T)$.

Dans ces conditions, quelle que soit la commande $u(\mathcal{T})$ pour $\mathcal{T} \in [t + dt, T]$ on a $\tilde{X}(t) = X^*(t)$, ce qui permet d'écrire l'équation (6) sous la forme :

$$F_0^* - \sum_{i=1}^{n+1} p_i^* \cdot X_i^* \geq F_0^* - \sum_{i=1}^{n+1} p_i \cdot X_i^* \quad (9)$$

On reconnaît dans cette équation les fonctions G' .

On obtient donc :

$$G'[p, \overset{0}{X}^*] \leq G'[p^*, \overset{0}{X}^*] = 0 \quad (10)$$

qui exprime un problème DUAL.

La forme bilinéaire $G'(\tilde{p}, \tilde{\overset{0}{X}}) = 0$ nous permet donc d'associer au problème PRIMAL, un nouveau problème que l'on appellera problème DUAL. Ce deuxième problème s'énonce de la manière suivante : « Trouver parmi tous les systèmes de valorisations possibles, le système de valorisation optimal c'est-à-dire celui qui Maximise la fonction $G'[p, \overset{0}{X}^*]$ construite en supposant que les décisions présentes $u^*(t)$ sont optimales ⁽¹⁾ ».

OPTIMUM ET EQUILIBRE D'UN JEU

Posé en ces termes, la recherche de l'optimum apparaît comme la recherche du col de la fonction G' .

On obtient en effet :

$$G'[p, \overset{0}{X}^*] \leq G'[p^*, \overset{0}{X}^*] \leq G'[p^*, \overset{0}{X}]$$

avec

$$G'(p^*, \overset{0}{X}^*) = 0$$

Ce résultat s'appuie évidemment sur le principe du Maximum, mais il le complète d'une certaine manière. En effet bien que Pontryagin introduise les fonctions duales $\psi_i(t)$ l'énoncé du principe du Maximum reste l'énoncé classique d'un problème PRIMAL. Mais il existe un problème DUAL et l'intérêt des formes bilinéaires G' est précisément de le faire émerger.

Il convient cependant, à ce propos de faire plusieurs remarques :

— La dualité ne porte ni sur l'état du système (on se place en un point $X^*(t)$ de la trajectoire optimale), ni sur la commande $u(t)$. Elle met en cause, comme on pouvait s'y attendre, l'évolution instantanée du système $\overset{0}{X}(t)$. Les variables duales $p(t)$ n'ont donc rien à voir avec les contraintes qui peuvent limiter le domaine U des commandes possibles. Elles sont simplement associées aux équations de mouvement et à ce titre elles expriment les « tensions » provoquées par l'évolution du système.

— Bien entendu, dans toute cette analyse on suppose qu'il existe une solution optimale. Sous cette hypothèse, le paragraphe II-2-1 nous apprend que cette solution optimale est un col de la fonction $G'(\overset{0}{X}, p)$ et que dès lors on pourra l'interpréter comme un point d'équilibre d'un jeu fictif à somme nulle entre deux centres de décision.

(1) Bien entendu, le domaine des vecteurs p parmi lesquels on doit choisir le vecteur p^* est borné.

II-2-2. — Interprétation économique

FONCTIONS AUXILIAIRES $\psi^*(t)$ DE PONTRYAGIN

Nous avons déjà donné une interprétation économique de $p(t)$ en nous basant sur la relation de définition $p_i = -\frac{\partial J}{\partial X_i}$. Nous venons de montrer qu'à l'optimum $p^*(t) = \psi^*(t)$. On va donc pouvoir utiliser l'identité $\psi^*(t) = -\frac{\partial J^*}{\partial X_i}$ pour interpréter d'une manière analogue $\psi^*(t)$

Cette interprétation est la suivante :

A tout point $X^*(t)$ d'une trajectoire optimale on peut associer un système de valorisation $\psi^*(t)$ pourvu qu'au-delà de la date t on gère le système d'une manière optimale. Chaque valeur $\psi_i^*(t)$ représente donc la variation (changée de signe) de la fonction d'évaluation future (entre t et T) entraînée par une variation marginale de l'état X_i au voisinage de $X_i^*(t)$ pourvu que l'on applique au système une règle de gestion optimale entre t et T .

Autrement dit, à l'état $X^(t)$ correspond un système de valorisation lié à l'usage optimal que l'on fera dans le futur des « potentialités » du système. En reprenant les exemples des paragraphes précédents, on peut dire que toute stratégie optimale d'investissement définit du même coup le prix d'usage des équipements ainsi que l'amortissement économique correspondant. De la même manière une gestion optimale des réserves hydrauliques révèle un prix d'usage du m³ d'eau, prix implicite qui caractérise la gestion du système.*

S'agissant de financement, toute politique optimale de financement engendre un *taux d'intérêt interne* c'est-à-dire un prix implicite de l'auto-financement. Il s'agit donc d'une interprétation en tout point identique à l'interprétation que nous avons faite au paragraphe II-1. Mais comme on se place ici dans une perspective de gestion optimale, à chaque état du système $X^*(t)$ correspond un seul vecteur de valorisation $\psi^*(t) = p^*(t)$.

Toute la politique de régulation de l'entreprise, comme nous le verrons sur l'exemple du paragraphe III repose sur la comparaison du vecteur de valorisation interne $\psi^*(t)$ et du vecteur prix sur le marché. Ainsi on construira des centrales nucléaires si la valeur d'usage $\psi_N^*(t)$ d'un équipement nucléaire est supérieure ou égale au coût d'investissement $I_N(t)$ du kW de puissance installée nucléaire. On turbinera l'eau en stock dans les réservoirs hydrauliques tant que le prix d'usage de l'eau $\psi^*(t)$ est supérieur ou égal au coût marginal d'exploitation du kWh fourni par le parc de production thermique. De même, on cherchera à dégager des ressources de financement interne si le prix d'usage de l'autofinancement (c'est-à-dire le taux d'actualisation interne) est supérieur ou égal au taux d'emprunt sur le marché.

S'agissant d'un problème possédant des conditions sur l'état final, on vient de voir que le prix d'usage, bâti sur la fonction d'évaluation

modifiée J' , n'est pas nul à l'horizon T . Comment interpréter ce résultat ? Se fixer des conditions sur l'état final c'est admettre qu'il existe un *système de valorisation supplémentaire* λ_k associé aux conditions ρ_k , c'est-à-dire qu'un relâchement marginal de ces conditions induirait une variation marginale du résultat obtenu $J'^* = J^*$. Ainsi si l'on se propose d'atteindre dans les divers réservoirs hydrauliques ($i = 1 \dots n$) un niveau de remplissage α_i fixé au 1^{er} septembre 1969 (date prise comme horizon T), tout se passe comme si l'on définissait du même coup un système de prix d'usage implicite $\lambda(T)$ du m³ d'eau marginal dans les différents réservoirs. Le prix $\lambda(T)$ représente l'économie de combustibles qu'on aurait pu réaliser dans les *meilleures conditions de gestion*, si l'on se fixait un niveau α_i un peu moins élevé. Le système de paramètres auxiliaires $\lambda(T)$ ferme le problème sur lui-même. Faute de pouvoir mesurer la valeur marginale des différents stocks d'eau au-delà de l'horizon T , on l'évalue au travers de l'économie de combustibles qu'on aurait pu réaliser dans le passé.

EQUILIBRE D'UN JEU

Puisque l'optimum peut être décrit sous forme d'un col, on peut interpréter le problème sous forme d'un jeu à somme nulle entre deux adversaires. L'équilibre du jeu correspond alors à la solution optimale. Les variables ($\overset{0}{X}$ et p) définissent la nature des joueurs en présence. Le premier (décisions $\overset{0}{X}$ par l'intermédiaire de u) apparaît comme l'exploitant du système. Le second (décisions p) joue le rôle du *propriétaire du système*.

La fonction $G' = F_0(X, u, t) - \sum_{i=1}^{n+1} p_i \overset{0}{X}_i$ représente la dépense immédiate du « locataire » F_0 , corrigée de la réduction (ou respectivement de l'augmentation) des charges qui résultent de l'amélioration (ou respectivement de la détérioration) de l'état du système.

Le « locataire » peut donc agir, par ses décisions sur l'état du système et on suppose qu'il connaît le prix p_i auquel le propriétaire pénalise ses dégradations ou au contraire évalue ses améliorations. Il est clair que si le propriétaire surestime la valeur des transformations (p_i trop élevé), le locataire cherchera à améliorer un peu plus ou à détériorer un peu moins ($\overset{0}{X}$ plus grand algébriquement). Si le propriétaire sous-estime le prix d'usage du système, le locataire aura tendance à détériorer un peu plus ou à apporter moins d'améliorations ($\overset{0}{X}$ plus petit algébriquement). Il est clair que les intérêts des deux joueurs sont opposés, mais qu'il peut exister une position d'équilibre.

Le jeu est en équilibre si :

$$\underset{\overset{0}{X}}{\text{Min}} \left[\underset{p}{\text{Max}} G'(\overset{0}{p}, \overset{0}{X}) \right] = \underset{p}{\text{Max}} \left[\underset{\overset{0}{X}}{\text{Min}} G'(\overset{0}{p}, \overset{0}{X}) \right]$$

Le terme de gauche représente le point de vue du « locataire ». Il

s'agit pour lui de chercher le changement $\overset{0}{X}$ qui minimise sa fonction dépense totale $G'(p, \overset{0}{X})$ en supposant que le propriétaire ne lui fait pas de cadeau lorsqu'il évalue les dégradations ou les améliorations. C'est le point de vue du problème PRIMAL qui coïncide avec l'énoncé classique de Pontryagin.

Le terme de droite illustre le point de vue du « propriétaire. Ce dernier cherche à définir le prix p^* qui maximise l'augmentation de valeur du système lorsque le locataire agit au mieux de ses intérêts. En effet, dans ce cas $\overset{0}{X}$ étant fixé, la dépense immédiate F_0 du « locataire » est connue et la maximisation porte uniquement sur le terme $-\sum_{i=1}^{n+1} p_i \cdot \overset{0}{X}_i^*$ c'est-à-dire sur la variation de valorisation du système. C'est ainsi qu'en matière d'investissement, on peut scinder l'entreprise en deux services : un service chargé des décisions d'équipement et de l'exploitation du parc des moyens de production. Pour assurer la production demandée, ce service dépensera à chaque instant $F_0(X, u, t)$. Mais on peut imaginer qu'un second service, le « service financier » par exemple, s'intéresse quant à lui à l'accroissement ou à la diminution de valeur du patrimoine. Si le patrimoine s'accroît, le service financier verse au service d'exploitation la valeur correspondante ; si le patrimoine décroît, il reçoit du service d'exploitation la valeur de la dépréciation. Dans ce cas, il est bien clair que toute surestimation par le service financier du prix d'usage du parc des moyens de production a pour effet de retarder les déclassements et d'encourager les investissements, au contraire toute sous-estimation se traduit par des déclassements plus importants et une stratégie d'investissement plus prudente.

Il en est de même dans la gestion d'un système mixte hydraulique-thermique. On peut décomposer le système en deux services distincts : un service qui gère le système au jour le jour, c'est-à-dire qui donne les ordres de turbinage aux centrales hydrauliques et de démarrage des groupes thermiques ; un service qui « possède » l'eau contenue dans les réservoirs hydrauliques et qui, de ce fait, s'intéresse aux services futurs de l'eau stockée. Si l'on suppose que la valeur de l'eau est nulle, le service d'exploitation, dans son souci de minimiser les charges d'exploitation, turbinera au maximum l'eau dans les réservoirs : il gèrera le système en *économie de combustible*. Si l'on suppose au contraire que le prix d'usage de l'eau stockée est *très grand* (par suite des services que cette eau peut rendre dans le futur), il fera fonctionner le parc thermique au maximum : on dit dans ce cas « qu'il gère le système en garantie ». Il est clair qu'il existe certainement entre ces deux solutions extrêmes, une solution meilleure qui réalise l'équilibre entre ces deux soucis contradictoires : économiser immédiatement du combustible (point de vue de l'« exploitant » au jour le jour), maintenir une valeur élevée du stock d'eau pour se prémunir contre les aléas liés au futur (point de vue du « propriétaire de l'eau »). En pratique, bien évidemment, c'est un seul et même service qui assure les deux fonctions, mais la décomposition fictive en termes de jeu a l'avantage de faire apparaître le *conflit permanent qu'il a à résoudre*.

En matière de financement enfin, « le gestionnaire du système » est le service financier, le « propriétaire du système » est représenté par l'assemblée des actionnaires c'est-à-dire toutes les personnes qui légalement possèdent les « capitaux propres » augmentés de la « réserve ». Le but du « service financier » est évidemment de minimiser durablement les charges financières (intérêts des emprunts et remboursement de ces emprunts). Pour ce faire, le « service financier » peut se proposer de minimiser à *chaque exercice* les charges financières à condition de tenir compte de l'accroissement ou de la réduction de la valeur du patrimoine que ces décisions entraînent. Si les actionnaires attachent une valeur trop élevée à l'autofinancement $\left(\text{mouvement } \frac{dX}{dt} \text{ des capitaux propres} \right)$,

le service financier sera réduit pour faire face aux besoins d'investissement de recourir à l'emprunt c'est-à-dire d'augmenter les charges financières. Si les actionnaires attachent une valeur peu élevée à l'autofinancement, l'entreprise évitera de faire appel au marché extérieur. On conçoit aisément qu'il puisse exister, là encore, une situation d'équilibre entre ces deux stratégies extrêmes.

II-3. — Liaison entre les équations de récurrence de la programmation dynamique et le principe du Maximum

Pour achever l'interprétation économique du principe du Maximum, il faut encore montrer pourquoi on peut remplacer l'optimisation intertemporelle par une optimisation instantanée en modifiant la fonction d'évaluation, c'est-à-dire en construisant l'hamiltonien. Nous savons déjà qu'il existe d'autres façons de décomposer l'optimisation et en particulier qu'on peut calculer de proche en proche la trajectoire optimale en utilisant les équations de récurrence de la programmation dynamique. Dès lors, on peut s'interroger sur le lien qui existe entre la programmation dynamique et le principe du Maximum.

A PROPOS DU PRINCIPE D'OPTIMALITE

Pour expliquer cette liaison, nous partirons du principe d'optimalité. On sait que c'est sur ce principe de caractère empirique que R. Bellman a fondé la programmation dynamique (1).

Peut-on admettre le principe d'optimalité « a priori » comme le fait R. Bellman ? Plusieurs auteurs se sont penchés sur cette question et il semble (2) qu'on puisse justifier mathématiquement ce principe dans les conditions suivantes :

- Système continu, transitif.
- Structure d'évaluation numérique additive.
- Classe **U** des commandes possibles fermées vis-à-vis des opérations de translation et de juxtaposition de plusieurs commandes.

(1) Pontryagin, pour sa part, rejette le principe d'optimalité, comme hypothèse de travail.

(2) Cf. A. STRAUSS, Introduction to optimal control theory », *Mathematical Systems Theory and Economics* (Summer School Varenna, 1967).

Cette troisième hypothèse est essentielle : elle signifie que si $u_1(\mathcal{G})$ et $u_2(\mathcal{G})$ sur l'intervalle (t_1, t_2) appartiennent à la classe \mathbf{U} , $u_2(\mathcal{G})$ sur l'intervalle (t_3, t_4) appartient aussi à la classe \mathbf{U} ; de même la suite $u_1(\mathcal{G})$ sur l'intervalle (t_1, t_2) puis $u_2(\mathcal{G})$ sur l'intervalle (t_2, t_3) appartient aussi à la classe \mathbf{U} .

S'il en est ainsi, on peut démontrer par l'absurde que toute portion d'une trajectoire optimale est elle-même optimale.

On en déduit immédiatement une équation de récurrence :

$$\int_{t_0}^{t_1} F_0[X^*, u^*, \mathcal{G}] d\mathcal{G} + \int_{t_1}^T F_0[X^*, u^*, \mathcal{G}] d\mathcal{G} = \int_{t_0}^T F_0[X^*, u^*, \mathcal{G}] d\mathcal{G}$$

c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} \text{Min}_{\substack{u(\mathcal{G}) \in \mathbf{U} \\ \mathcal{G} \in [t_0, t_1]}} \int_{t_0}^{t_1} F_0[X, u, \mathcal{G}] d\mathcal{G} + \text{Min}_{\substack{u(\mathcal{G}) \in \mathbf{U} \\ \mathcal{G} \in [t_1, T]}} \int_{t_1}^T F_0[X, u, \mathcal{G}] d\mathcal{G} \\ = \text{Min}_{\substack{u(\mathcal{G}) \in \mathbf{U} \\ \mathcal{G} \in [t_0, T]}} \int_{t_0}^T F_0[X, u, \mathcal{G}] d\mathcal{G} \end{aligned}$$

APPLICATION DU PRINCIPE D'OPTIMALITE ET CHOIX D'INDICATEURS DE COUPURE DANS LE TEMPS

Que l'on admette la démonstration de A. Strauss sous les conditions énoncées ci-dessus, ou que l'on accepte le principe d'optimalité comme une donnée intuitive, il reste que l'on peut décomposer l'optimisation et écrire :

$$J^*[X(t), t] = \text{Min}_{\substack{u(\mathcal{G}) \in \mathbf{U} \\ \mathcal{G} \in [t, t+dt]}} \left[F_0(X, u, t) dt + J^*[X(t+dt), t+dt] \right]$$

en posant :

$$t_0 = t ; t_1 = t + dt$$

$$\text{et } J^*[X(t), t] = \text{Min}_{\substack{u(\mathcal{G}) \in \mathbf{U} \\ \mathcal{G} \in [t, T]}} \int_t^T F_0(X, u, \mathcal{G}) d\mathcal{G}$$

$$J^*[X(t+dt), t+dt] = \text{Min}_{\substack{u(\mathcal{G}) \in \mathbf{U} \\ \mathcal{G} \in [t+dt, T]}} \int_{t+dt}^T F_0(X, u, \mathcal{G}) d\mathcal{G}$$

En remarquant à présent que $J^*[X(t), t]$ ne dépend pas de $u(t)$ et en divisant par dt , on trouve :

$$\text{Min}_{\substack{u(\mathcal{G}) \in \mathbf{U} \\ \mathcal{G} \in [t, t+dt]}} \left[F_0(X, u, t) + \frac{dJ^*}{dt} [X(t), t] \right] = 0$$

En passant à la limite, lorsque $dt \rightarrow 0$, on obtient l'équation :

$$\boxed{\text{Min}_{u(t) \in \mathbf{U}} \left[F_0(X, u, t) + \sum_{i=1}^n \frac{\partial J^*[X(t), t]}{\partial X_i} \cdot \overset{\circ}{X}_i \right] + \frac{\partial J^*}{\partial t} = 0}$$

On pose :

$$\begin{cases} p_i &= -\frac{\partial J^*}{\partial X_i} [X(t), t] \\ p_{n+1} &= -\frac{\partial J^*}{\partial t} [X(t), t] \end{cases}$$

Si l'on introduit la fonction suivante appelée hamiltonien :

$$\mathcal{H}[X, u, p, t] = -F_0[X, u, t] + \sum_{i=1}^n p_i F_i[X, u, t]$$

l'équation ci-dessus s'écrit alors :

$$\text{Max}_{u(t) \in \mathbf{U}} \left[\mathcal{H}[X, u, p, t] \right] + p_{n+1} = 0$$

Elle signifie que, d'une façon générale, u^* est une fonction de X, p, t .

Si l'on pose à présent :

$$\mathcal{H}^*[X, p, t] = \text{Max}_{u(t) \in \mathbf{U}} [\mathcal{H}(X, u, p, t)]$$

on obtient l'équation :

$$\mathcal{H}^* + p_{n+1} = 0$$

qu'on appelle équation de *Hamilton-Jacobi*.

Cette équation signifie clairement que la commande optimale $u^(t)$ à chaque instant t s'obtient en recherchant le maximum par rapport à $u(t)$ d'une nouvelle fonction d'évaluation instantanée \mathcal{H} , appelée hamiltonien. Autrement dit, il existe un système d'indicateurs de coupure dans le temps qui permettent de décomposer le problème de la recherche de l'optimum dynamique en une suite d'optimisations instantanées.*

DETERMINATION DU SYSTEME D'INDICATEURS DE COUPURE DANS LE TEMPS

Si l'on résout l'équation de Hamilton-Jacobi par la méthode précédemment employée, on obtient le système d'équations :

$$\begin{cases} \dot{X}_i = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial p_i} + \sum_{j=1}^r \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_j^*} \times \frac{\partial u_j^*}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial X_i} - \sum_{j=1}^r \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_j^*} \times \frac{\partial u_j^*}{\partial X_i} \end{cases}$$

(u vecteur de commande à r composantes)

à condition de poser, comme aux paragraphes précédents : $X_{n+1} = t$.

On remarque que $\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_j^*} \times \frac{\partial u_j^*}{\partial p_i} = 0$.

En effet, pour une commande u , intérieure au domaine de commande, la dérivée $\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_j^*}$ est nulle. Pour une commande u située sur la frontière du domaine de commande, on sait que $\frac{\partial u_j^*}{\partial p_i} = 0$ car u_j^* ne dépend plus dans ce cas des variables auxiliaires p_i .

De même, $\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_j^*} \times \frac{\partial u_j^*}{\partial X_i} = 0$. En effet, pour une commande u intérieure au domaine de commande, la dérivée $\frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial u_j^*}$ est nulle, si la commande u est située sur la frontière, elle ne dépend plus des variables d'état X_i .

En définitive, on obtient :

$$\boxed{\overset{0}{X}_i = \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial p_i}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overset{0}{p}_i = - \frac{\partial \mathcal{H}^*}{\partial X_i}}$$

Si l'on identifie p_i et ψ_i , on reconnaît les $2n$ équations de Pontryagin.

INTERPRETATION ECONOMIQUE

Ce calcul extrêmement simple n'a pas la prétention de démontrer le principe du Maximum, mais simplement de *montrer le lien qui existe entre les équations de récurrence de la programmation dynamique et les résultats de Pontryagin*. Ce lien nous permet en effet de comprendre le sens précis du principe du Maximum : décomposer l'optimisation globale en optimisations instantanées au moyen d'un *système d'indicateurs convenables*.

Dans cette perspective, les fonctions auxiliaires $\psi_i(t)$ sont en effet *les indicateurs de décomposition qui assurent la cohérence temporelle entre les régulations instantanées et la régulation dynamique sur l'ensemble de la période d'étude*. Certes, l'esprit de l'homme n'a pas attendu les analyses mathématiques de Pontryagin pour imaginer les concepts nécessaires à une décomposition temporelle, mais le mérite de Pontryagin et de son équipe a été de leur donner une existence mathématique au travers d'une formalisation rigoureuse.

III. MODELE DE CHOIX D'INVESTISSEMENTS : ARBITRAGE DYNAMIQUE THERMIQUE — NUCLEAIRE

Pour montrer l'intérêt des méthodes d'optimisation dynamique basées sur le Principe du Maximum et pour illustrer l'interprétation économique des variables associées aux équations d'état du système, on va développer ici un exemple d'arbitrage dynamique entre deux techniques concurrentes dans la production d'électricité : le thermique et le nucléaire. Il s'agit d'ailleurs d'un modèle très simplifié, mais les hypothèses retenues ne sont pas trop éloignées de la réalité.

L'exemple que l'on va développer ici dans le cas de la production d'électricité fait d'ailleurs partie d'un problème assez général : celui de la substitution d'une technique nouvelle à une technique ancienne dans un processus de production.

Pour déterminer le rythme d'engagement optimal du nucléaire, on minimise le coût global actualisé des dépenses d'investissement (en thermique et en nucléaire) et des dépenses d'exploitation de l'ensemble du parc de centrales thermiques et nucléaires sur la période de temps $(0, \infty)$, de telle façon que l'on puisse satisfaire à chaque instant la demande d'électricité.

III-1. — Evolution de la demande d'Electricité

L'année t , la consommation d'électricité est caractérisée par la fonction $P(h, t)$ qui indique le nombre d'heures h pendant lesquelles est appelée la puissance $P(h, t)$. Cette fonction s'appelle la monotone des puissances classées.

On connaît la monotone $p(h)$ des puissances classées à l'instant initial 0. On pose $p(0) = P_0$.

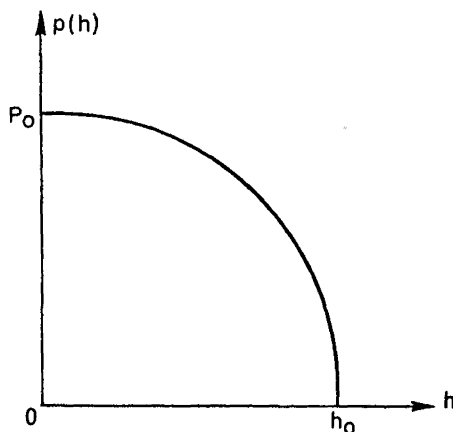


Figure 1

On suppose une croissance continue de la demande au taux θ , d'où :

$$P(h, t) = p(h) e^{\theta t}.$$

A la date t , si l'on veut satisfaire la demande d'électricité, on devra disposer d'un parc de centrales correspondant à une puissance installée $P_0 e^{\theta t}$. De même l'année t , on devra mettre en service un flux d'investissements en thermique et en nucléaire, correspondant à une puissance installée $\theta P_0 e^{\theta t}$.

Autrement dit, si on appelle $X(t)$ et $Y(t)$ respectivement les puissances installées à la date t en nucléaire et en thermique on aura :

$$X(t) + Y(t) = P_0 e^{\theta t}.$$

Si on appelle $x(t)$ et $y(t)$ les flux d'investissements en nucléaire et en thermique, c'est-à-dire $x(t) = \frac{dX(t)}{dt}$ et $y(t) = \frac{dY(t)}{dt}$ on aura :

$$x(t) + y(t) = \theta P_0 e^{\theta t}.$$

III-2. — Expression de la politique de gestion

Pour éviter d'avoir à tenir compte du parc hydraulique (et également des turbines à gaz) on est conduit à faire l'hypothèse suivante : on supposera que la durée h_1 d'utilisation de la centrale hydraulique (ou de la turbine à gaz) la mieux placée ne varie pas au cours du temps.

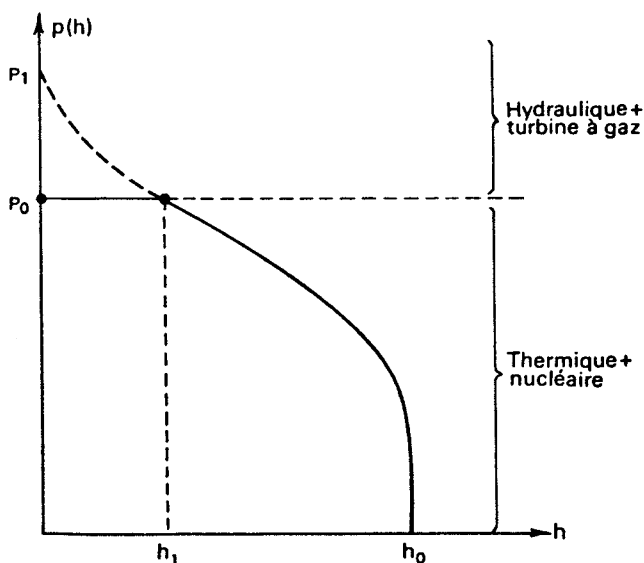


Figure 2

On supposera également d'une part que le coût d'exploitation du nucléaire est toujours inférieur au coût d'exploitation du thermique, et d'autre part que le coût d'investissement du nucléaire est toujours supérieur au coût d'investissement du thermique ; et cela quelle que soit la date de naissance de l'équipement considéré. On connaît alors l'ordre de mise en marche des centrales lorsque la puissance appelée augmente :

— On exploitera d'abord les centrales nucléaires en partant de la plus récente jusqu'à la plus ancienne, car on suppose également que les coûts d'exploitation du nucléaire augmentent avec l'âge des équipements nucléaires.

— On exploitera ensuite les centrales thermiques en partant de la plus récente jusqu'à la plus ancienne, car on fait une hypothèse analogue pour le thermique.

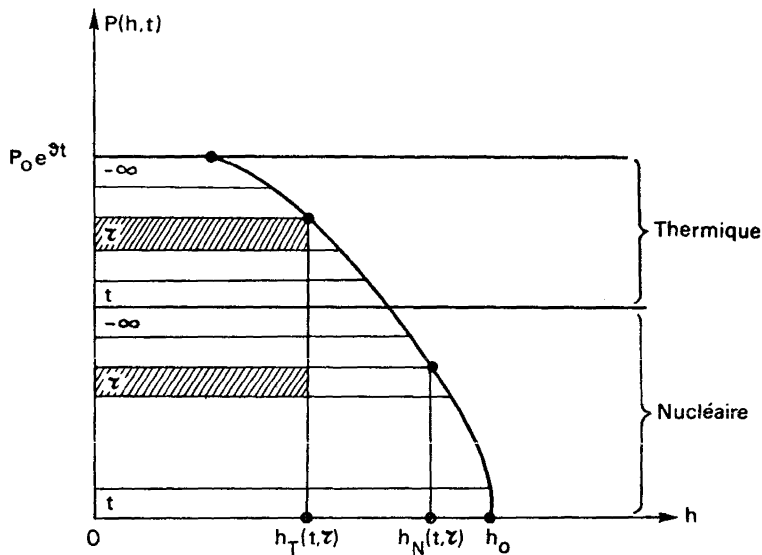


Figure 3

Enfin, on supposera qu'il n'y a pas de déclassement des centrales par usure ou par obsolescence. Cette hypothèse se justifie d'une part par la forte croissance de la demande d'électricité et d'autre part par la durée de vie élevée des équipements, ce qui a pour effet de diminuer grandement dans le parc l'influence des centrales susceptibles d'être déclassées.

En tenant compte des hypothèses précédentes, on obtient pour le nucléaire :

$$P[h_N(t, \mathcal{G}), t] = \int_{\mathcal{G}}^t x(u) du = X(t) - X(\mathcal{G})$$

$$p[h_N(t, \mathcal{G})] = [X(t) - X(\mathcal{G})] e^{-\theta t}$$

d'où

$$h_N(t, \mathcal{T}) = p^{-1}[(X(t) - X(\mathcal{T})) e^{-\theta t}]$$

Pour le thermique, on a de même :

$$P[h_T(t, \mathcal{T}), t] = \int_{-\infty}^t x(u) du + \int_{\mathcal{T}}^t y(v) dv = X(t) + Y(t) - Y(\mathcal{T})$$

$$p[h_T(t, \mathcal{T})] = [P_0 e^{\theta t} - Y(\mathcal{T})] e^{-\theta t}$$

d'où :

$$h_T(t, \mathcal{T}) = p^{-1}[P_0 - Y(\mathcal{T}) \cdot e^{-\theta t}]$$

III-3. — Expression du coût global actualisé

Pour que le système, muni de sa fonction d'évaluation, soit transitif, on doit faire l'hypothèse suivante : on admettra que le coût d'exploitation à la date t d'une centrale thermique ou nucléaire née en \mathcal{T} ne dépend que de la date t et de la taille $X(\mathcal{T})$ ou $Y(\mathcal{T})$ du parc thermique ou nucléaire à la date \mathcal{T} , mais pas de la date \mathcal{T} elle-même. Cela signifie que le progrès technique provient entièrement de la croissance du parc. Si on n'acceptait pas de faire cette hypothèse (et comme on ne sait pas optimiser des systèmes héréditaires), on serait conduit à une nouvelle identification du système avec un découpage suffisamment fin du parc, tel que dans chaque partie on puisse faire l'hypothèse précédente.

Pour le nucléaire, on pose :

$I_N(t)$ = coût Investissements + charges fixes actualisées pour une tranche de 1 kW à la date t .

$C_N[X(\mathcal{T}), t]$ = Coût d'exploitation à la date t d'une tranche de 1 kW née à la date \mathcal{T} .

Pour le thermique, on pose de même :

$I_T(t)$ = Coût investissements + charges fixes actualisées pour une tranche de 1 kW à la date t .

$C_T[Y(\mathcal{T}), t]$ = coût d'exploitation à la date t d'une tranche de 1 kW née à la date \mathcal{T} .

Avec les notations précédentes, le coût global actualisé prend la forme suivante :

$$\begin{aligned} \pi = & \int_0^{\infty} [I_N(t) \cdot x(t) + I_T(t) \cdot y(t)] e^{-it} dt \\ & + \int_0^{\infty} \left[\int_{X(-\infty)=0}^{X(t)} C_N[X(\mathcal{T}), t] \cdot p^{-1}[(X(t) - X(\mathcal{T})) e^{-\theta t}] dX(\mathcal{T}) \right] e^{-it} dt \\ & + \int_0^{\infty} \left[\int_{Y(-\infty)=0}^{Y(t)} C_T[Y(\mathcal{T}), t] \cdot p^{-1}[P_0 - Y(\mathcal{T}) e^{-\theta t}] dY(\mathcal{T}) \right] e^{-it} dt \end{aligned}$$

On pose :

$$F_N[X(t), t] = \int_0^{X(t)} C_N(U, t) \cdot p^{-1}[(X(t) - U) e^{-\theta t}] dU$$

$$F_T[Y(t), t] = \int_0^{Y(t)} C_T(U, t) \cdot p^{-1}[P_0 - U e^{-\theta t}] dU$$

On obtient alors le coût global actualisé

$$\pi = \int_0^\infty [I_N(t) \cdot x(t) + F_N[X(t), t] + I_T(t) \cdot y(t) + F_T[Y(t), t]] e^{-it} dt$$

où les quantités $I_N(t)$, $I_T(t)$, $F_N[X(t), t]$ et $F_T[Y(t), t]$ sont connues.

III-4. — Détermination de la commande optimale. Interprétation

Parmi toutes les commandes $x(t)$ et $y(t)$, sur l'intervalle de temps $(0, \infty)$, appartenant au domaine de commande admissible défini par

$$\begin{cases} x(t) \geq 0 \\ y(t) \geq 0 \\ x(t) + y(t) = \theta p_0 e^{\theta t}. \end{cases}$$

on cherche à déterminer la commande optimale $x^*(t)$ et $y^*(t)$ qui minimise le coût global actualisé π pour un système évoluant selon les équations d'état.

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = x(t) \\ \frac{dY(t)}{dt} = y(t) \end{cases}$$

On applique le principe du Maximum et pour cela on forme l'hamiltonien :

$$\mathcal{H} = -[I_N(t) \cdot x + F_N[X, t] + I_T(t) \cdot y + F_T[Y, t]] e^{-it} + \psi_1 \cdot x + \psi_2 \cdot y$$

Les variables ψ_1 et ψ_2 associées au système étant définies par les deux équations de Pontryagin.

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= - \frac{\partial \mathcal{H}[X, Y, x, y, t]}{\partial X} \\ \dot{\psi}_2 &= - \frac{\partial \mathcal{H}[X, Y, x, y, t]}{\partial Y} \end{aligned}$$

soit encore :

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \frac{\partial F_N[X, t]}{\partial X} e^{-it} \\ \dot{\psi}_2 &= \frac{\partial F_T[Y, t]}{\partial Y} e^{-it} \end{aligned}$$

Si l'on fait intervenir la fonction de coût global entre t et l'infini, pour une politique d'investissement donnée :

$$J[X, Y, t] = \int_t^\infty [I_N(\mathfrak{C}) \cdot x + F_N(X, \mathfrak{C}) + I_T(\mathfrak{C}) \cdot y + F_T(Y, \mathfrak{C})] e^{-i\mathfrak{C}} d\mathfrak{C}$$

on peut affirmer que ψ_1 et ψ_2 vérifient :

$$\left| \begin{array}{l} \psi_1 = - \frac{\partial J[X, Y, t]}{\partial X} \\ \psi_2 = - \frac{\partial J[X, Y, t]}{\partial Y} \end{array} \right.$$

ψ_1 représente la diminution marginale du coût d'exploitation et d'investissement résultant d'une augmentation marginale du parc nucléaire.

De même ψ_2 représente la diminution marginale du coût d'exploitation et d'investissement résultant d'une augmentation marginale du parc thermique.

On retrouve bien ici l'interprétation économique de ψ_1^* et ψ_2^* : ce sont les prix d'usage des équipements nucléaires et thermiques, c'est-à-dire la somme des valeurs actualisées des services qu'ils peuvent rendre, dans la perspective d'une politique d'investissement optimale. Le prix d'usage est, à l'optimum et à chaque instant, le prix auquel on accepterait d'acheter ou de vendre ces équipements s'il existait un marché correspondant. L'amortissement étant la différence de valeurs d'usage à deux instants différents, ψ_1^* et ψ_2^* représentent l'amortissement annuel des équipements nucléaires et thermiques l'année t .

La commande optimale est obtenue en écrivant que \mathcal{H} est maximum à chaque instant. Trois cas peuvent se présenter selon les différences relatives entre le prix d'usage et le coût d'investissement des deux techniques en présence.

1er cas

$$\psi_1 - I_N(t) e^{-it} > \psi_2 - I_T(t) e^{-it}$$

Dans ce cas l'hamiltonien est maximum pour :

$$x^*(t) = \theta P_0 e^{\theta t} \quad \text{et} \quad y^*(t) = 0.$$

C'est le régime bloqué nucléaire.

L'interprétation économique est immédiate. Si à l'instant t , la différence entre le prix d'usage ψ_1 et le coût d'investissement $I_N(t) e^{-it}$ est plus grande pour le nucléaire que pour le thermique classique, on doit installer le plus possible de centrales nucléaires. Le programme total de la période $(t, t + dt)$ devant être égal à $\theta P_0 e^{\theta t}$, ce programme sera exclusivement formé de centrales nucléaires.

2^e cas

$$\psi_1 - I_N(t) e^{-it} < \psi_2 - I_T(t) e^{-it}$$

La maximisation de l'hamiltonien conduit alors à choisir $x^*(t) = 0$ et $y^*(t) = \theta P_0 e^{\theta t}$. C'est le régime bloqué « thermique classique » et l'interprétation est symétrique du régime bloqué nucléaire.

3^e cas

$$\psi_1 - I_N(t) e^{-it} = \psi_2 - I_T(t) e^{-it}$$

Il existe un programme mixte nucléaire-thermique classique. On appelle ce régime *régime équilibré*. Pour définir les quantités $x^*(t)$ et $y^*(t)$, il faut alors différencier, par rapport au temps, l'équation précédente, ce qui s'écrit :

$$\left[\frac{\partial F_N(X, t)}{\partial X} - \overset{0}{I}_N(t) + iI_N(t) \right] = \left[\frac{\partial F_T(Y, t)}{\partial Y} - \overset{0}{I}_T(t) + iI_T(t) \right]$$

Cette équation signifie qu'à l'*optimum équilibré* il doit être indifférent à l'instant t de faire un kW supplémentaire de nucléaire au lieu d'un kW de thermique classique, à condition de réaliser l'opération inverse en $(t + dt)$ pour que toutes choses restent égales par la suite.

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial F_N}{\partial X} \text{ représente le coût marginal d'exploitation du parc nucléaire.} \\ iI_N(t) \text{ les charges financières supplémentaires dues à l'opération « anticipation de la mise en service d'un kW nucléaire ».} \\ [-\overset{0}{I}_N(t)] \text{ la baisse de prix dont on se prive en décidant d'anticiper la mise en service.} \end{array} \right.$

Le terme de droite représente donc le supplément de charges relatives au parc nucléaire, occasionnées par la décision d'anticipation ; le terme de gauche la réduction de charges relatives au parc thermique classique, occasionnées par la décision de retarder légèrement la mise en service d'1 kW thermique classique.

L'équation ci-dessus nous apprend qu'à l'*optimum* le bilan complet de cette double opération est nul.

Le raccordement des différents arcs de régimes bloqués et de régimes équilibrés est obtenu en écrivant qu'aux instants de commutation, il existe une *continuité* de la trajectoire (X, Y) et du vecteur associé (ψ_1, ψ_2) ⁽¹⁾.

(1) Mais évidemment il n'y a pas continuité sur les dérivées $x, y, \dot{\psi}_1, \dot{\psi}_2$.

III-5. — Interprétation en termes de jeu

Nous avons déjà signalé qu'on pouvait décomposer fictivement l'entreprise en deux parties :

— *Un service d'exploitation qui se préoccupe de la gestion instantanée* (en entendant par là, une gestion du parc d'équipement existant et l'élaboration de la politique d'investissement entre t et $t + dt$). Ce service détient le choix de $\overset{0}{X}$ et de $\overset{0}{Y}$, c'est-à-dire le choix de la politique instantanée d'investissement x et y . Ce service supporte les dépenses F_0 correspondantes, mais en même temps il modifie l'état du système.

— *Un service financier qui se préoccupe de la gestion future*. Pour ce faire, il définit un système de prix p , qui lui permet de déterminer l'accroissement de valeur du système en tenant compte de la gestion future de celui-ci.

A chaque instant le service d'exploitation et le service financier vont échanger entre eux des flux de valeur. Le service financier en cas d'amélioration du système versera au service d'exploitation une somme correspondant à cette amélioration ; en cas de détérioration, le service d'exploitation versera au service financier la valeur correspondant à cette détérioration. Le solde algébrique de ces échanges en faveur du service d'exploitation est donné par l'expression $\sum_{i=1}^{n+1} p_i \cdot \overset{0}{X}_i$.

Si l'on suppose donc que le service financier adopte les prix $p_1^*(t)$, $p_2^*(t)$, le problème du service d'exploitation consistera à choisir parmi les investissements possibles (x, y) celui qui minimise ses dépenses F_0 compte tenu des échanges avec le service financier.

On peut l'écrire $\underset{(x,y)}{\text{Min}} [G'[x, y, p_1^*, p_2^*]]$

C'est le problème PRIMAL.

Si l'on suppose que le service d'exploitation adopte la politique (x^*, y^*) , le problème du service financier est de déterminer parmi tous les vecteurs prix possibles $p(t)$ celui qui minimise les transferts en faveur du service d'exploitation. F_0^* étant dans ce cas une constante, tout se passe comme si le service financier avait pour but de trouver le vecteur $p(t)$ qui maximise

$$G'[x^*, y^*, p_1, p_2].$$

C'est le point de vue DUAL.

Dans ce jeu entre « service d'exploitation » et « service financier », le premier peut toujours opposer aux décisions p du second, une stratégie d'investissement qui rende G' nul, voire même qui dégage un solde en sa faveur ($G' < 0$). Mais dans ce cas, le service financier modifiera ses prix p pour rétablir l'équilibre. Le même raisonnement s'applique en sens inverse. Il existe donc une position d'équilibre qui assure l'optimum de chacune des parties dans des conditions acceptables par l'autre.

Évidemment dans cette position d'équilibre $G^* = 0$, ce qui signifie qu'en considérant l'ensemble du système, il y a conservation de la valeur à tout instant.

* *

Pour conclure cet article, nous reviendrons à notre point de départ.

Jusqu'à présent, les outils bien connus de la programmation mathématique nous ont fourni un type de variables duales : les coûts marginaux associés aux contraintes ou aux liaisons du système. On sait le rôle considérable que peuvent jouer ces variables duales comme indicateur de régulation interne dans la gestion et l'organisation des entreprises.

En dynamique, ces variables duales constituent une réponse partielle ; il faut y ajouter les fonctions duales $\psi(t)$ associées aux équations d'évolution du système.

En économie, ce deuxième type de variables s'interprète comme l'ensemble des valeurs du patrimoine, c'est-à-dire les prix d'usage du système et il semble qu'aucune organisation économique soucieuse d'une bonne régulation de l'avenir ne peut se passer de ces concepts.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- PONTRYAGIN, BOLTYANSKII, GAMKRELIDZE et MISHCHENKO, « The Mathematical Theory of Optimal Processes » *Interscience Publisher*, 1962.
- STRAUSS, Introduction to Optimal Control Theory, Mathematical systems, *Theory and Economics* (Summer School, Varenna, 1967).
- M. ALBOUY et M^{lle} NACHTIGAL, *Extension de la Notion du Coût Marginal en Économie Dynamique*, Congrès Européen d'Économétrie (Amsterdam, sept. 1968).
- M. ALBOUY, *Réflexions sur la Régulation Économique des Entreprises de production et de distribution d'Énergie Électrique*, Congrès IFORS-HELORS (Athènes, nov. 1968).
- M. ALBOUY, *La Régulation Économique de l'Entreprise*, à paraître chez Dunod (1969).