REVUE FRANÇAISE D'INFORMATIQUE ET DE RECHERCHE OPÉRATIONNELLE [SÉRIE VERTE]

Problèmes plaisans et délectables

Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle [Série verte], tome 2, nº V1 (1968), p. 114-116

<http://www.numdam.org/item?id=RO_1968__2_1_114_0>

Problèmes plaisans et délectables

Problème n° 42
LES DAMES NOIRES ET LES DAMES BLANCHES (*bis*).

Sur un échiquier de $n \times n$, on se propose de placer p dames blanches et q dames noires de façon qu'aucune dame blanche ne prenne une dame noire (avec la règle habituelle du jeu d'échecs).

Pour p donné, dénotons $h_r(n)$ la valeur maximum de q.

Que peut-on dire de $h_p(n)$? Dans un numéro déjà ancien, nous avions vu que $h_5(5) = 3$, et nous nous proposons de primer la meilleure information pour n quelconque.

Solution du problème n° 39 (Le Jeu du Solitaire).

En ce qui concerne les problèmes du Solitaire, nous renvoyons le lecteur au livre de J. Bens (Guide des Jeux d'esprit, Albin Michel 1967).

En ce qui concerne la théorie de l'impossibilité, il existe plusieurs méthodes, qui toutes donnent une condition nécessaire pour qu'une position soit gagnante ; nous avons reçu celle de M. Justin ; la plus élégante est peut-être celle de G. Kowaleski (Alte und Neue Math. Spiele, Teubner 1930, das Solitârspiel, pp. 126-145). Voire aussi B. M. Stewart, (*Solitaire on a checkerboard*, Am. J. Math. Monthly, 1941, *48*, pp. 228-233).

Une méthode qui donne une classification des positions légèrement plus fine, et qui donne une condition nécessaire et *suffisante* de gain pour un jeu de Solitaire généralisé, est la suivante :

Considérons les différentes cases A, B, C,... du Solitaire, et posons $a = +1$ s'il y a une bille en A, et $a = 0$ sinon.

(1) Appelons *solitaire généralisé* le jeu où les trous remplissent tout le plan et où l'on a le droit de remplacer (1, 1, 0) par (0, 0, 1) (règle ordinaire), aussi bien que (0, 0, 1) par (1, 1, 0) (règle de Leibnitz), (1, 1, 1) par (0, 0, 0) ou vice versa, (1, 0, 1) par (0, 1, 0) ou vice versa.

Nous allons caractériser les positions non solubles dans le jeu du solitaire généralisé ; ces positions seront a fortiori non solubles dans le jeu de solitaire normal.

(2) Avec la règle de solitaire généralisé, on peut s'arranger pour que tous les 1 du tableau soient compris dans un carré de 2×2 cases, fixé à l'avance.

En effet, un coup revient à échanger, dans trois cases contigües les valeurs (a, b, c) par les valeurs $(a + 1, b + 1, c + 1)$; la somme est ici prise modulo 2, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} 0 + 0 &= 0 \\ 0 + 1 &= 1 + 0 = 1 \\ 1 + 1 &= 0 \end{aligned}$$

Considérons une case de valeur $a_0 = 1$ et qui ne soit pas dans le carré de 2×2 ; supposons que le carré que l'on se soit fixé se trouve en y_k, y_{k+1}, z_k, z_{k+1}, comme sur la figure suivante :

$$\begin{array}{llllll} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \ldots & & a_k, a_{k+1} \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \ldots & & b_k, b_{k+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_0 & y_1 & & & \ldots & \boxed{\begin{array}{l} y_k, y_{k+1} \\ z_k, z_{k+1} \end{array}} \\ z_0 & z_1 & & & \ldots & \end{array}$$

Je peux changer a_0 en $a_0 + 1$ *sans modifier d'autres valeurs que* y_k, y_{k+1}, z_k, z_{k+1} ; en effet, on fera successivement les changements :

$$\begin{array}{ccccccc}
a_0 + 1 & a_1 + 1 & a_2 + 1 & & & & \\
 & a_1 & a_2 & a_3 + 1 & & & \\
 & & & a_3 & a_4 + 1 & a_5 + 1 & \\
 & & & & a_4 & a_5 & a_6 + 1 \\
 & & & & \cdots & \cdots & \cdots
\end{array}$$

et finalement :

$$\text{ou} \left\{ \begin{array}{lll}
a_{k-1} & a_k + 1 & a_{k+1} + 1 \\
a_{k-2} & a_{k-1} & a_k + 1 \\
a_{k-1} & a_k & a_{k+1} + 1
\end{array} \right.$$

La partie n'ayant changé qu'au-dessus du carré, on opérera ensuite verticalement de la même façon, de façon à ce que les seules cases où la valeur soit éventuellement changée sont les cases du carré.

(3) En opérant ainsi avec toutes les cases a_0 de valeur $+ 1$, il y aura des 0 partout, excepté, peut-être, dans le carré fixé; le carré fixé aura alors l'une des formes suivantes :

Première classe :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Deuxième classe :

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Troisième classe :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

(4) On voit facilement que si le carré fixé a l'une de ces formes, aucune transformation ne lui donnera une autre forme, et si deux positions aboutissent à la même forme, on pourra toujours passer de la première position à la seconde par une série de transformations autorisées.

En outre, si l'on change la position du carré fixé, sa classe ne changera pas.

Ainsi, la *condition nécessaire et suffisante pour qu'une position du solitaire généralisé soit soluble est que la forme finale du carré fixé appartienne à la deuxième classe.*

Dans les problèmes de solitaire mentionnés dans notre rubrique, on a la configuration suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & a & b & c & & \\
 & & d & e & f & & \\
g & h & i & j & k & l & m \\
n & o & p & q & r & s & t \\
u & v & w & x & y & z & A \\
 & & B & C & D & & \\
 & & E & F & G & &
\end{array}$$

1° Si l'on retire les billes en n b t, la position est soluble au moyen des transformations suivantes :

nbt	*pon*	*dip*	*ghi*	*ung*	*jih*	*ghi*	*pid*	*lhj*	*cfh*
jhl	*mlh*	*adi*	*rqp*	*pid*	*def*	*fhr*	*srq*	*Dyr*	*Azy*
ryD	*GDy*	*BCD*	*EFG*	*xyz*	*GDy*	*zyx*	*qxC*	*vwx*	*Cxq*

2° Si l'on retire les billes en *n, b, t, F,* la position n'est pas soluble, car la forme du carré réduit appartient à la 1re classe.

3° Si l'on retire les billes en *n, b, t, z* la position n'est pas soluble car la forme du carré réduit appartient à la 3e classe.

La clé dans le problème pour joueurs moyens est : *kfc* (ou : *hij*). Dans le problème pour joueurs forts, c'est : *jki, dip, pwB...*

Remarque. Avec le raisonnement ci-dessus, il est évident que si dans le jeu du solitaire normal, avec une seule case vide (x, y), les cases possibles pour une bille terminale unique sont de la forme $(x \pm 3\,p, y \pm 3\,q)$.

Solution du Problème n° 40 (Les reines noires et les reines blanches).

Le problème n° 40 n'admet qu'une solution (à des rotations et des symétries près) :

B	*B*			
			N	*N*
				N
B				
		N	*N*	

Par contre, ainsi que l'a remarqué M. Y. Tabourier (SACS), le problème 40 *bis* admet les 3 solutions suivantes :

B				*B*
		N		
	N		*N*	
		N		
B				*B*

	B		*B*	
		B		
N				*N*
		B		
N				*N*

B		*B*		
				N
B		*B*		
				N
	N		*N*	

Nous renvoyons à la prochaine rubrique la solution du problème n° 41.

Le directeur de la Publication : Georges Dunod. — *Imprimé en France.*
Dépôt légal : 3e trimestre 1968. N° 5740.
Imprimerie Nouvelle, Orléans. N° 5758.