

AUTOUR D'UN MÉMOIRE INÉDIT :
LA CONTRIBUTION D'HERMITE AU DÉVELOPPEMENT
DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

Bruno BELHOSTE (*)

RÉSUMÉ. — Dans cet article, nous présentons et publions en annexe un important mémoire inédit de Charles Hermite sur les fonctions elliptiques daté de 1849. Replaçant ce travail dans l'œuvre du mathématicien, nous analysons sa contribution au développement de la théorie élémentaire des fonctions elliptiques. Avec Liouville, Hermite jette les bases d'une théorie générale des fonctions méromorphes doublement périodiques dans les années 1840, introduisant à cette occasion les méthodes de Cauchy dans l'étude des fonctions elliptiques. Dans les cours qu'il donne après 1868 à l'École polytechnique et à la Faculté des sciences de Paris, il enseigne la théorie selon le point de vue de Jacobi, en partant des fonctions thêta. Ces leçons constituent sans doute la meilleure présentation de la théorie avant que ne s'impose le point de vue de Weierstrass.

ABSTRACT. — ON AN UNPUBLISHED PAPER : HERMITE'S CONTRIBUTION TO THE DEVELOPMENT OF THE THEORY OF ELLIPTIC FUNCTIONS. This paper presents a major unpublished memoir written by Charles Hermite on elliptic functions, and dating from 1849: the text is appended. Looking at this contribution in the overall context of that mathematician's work, its import for the development of the elementary theory of elliptic functions is examined. Along with Liouville, in the 1840's Hermite laid the foundations of a general theory of doubly periodic meromorphic functions, bringing to bear in this context the general approach propounded by Cauchy for the theory of complex variable functions. In his lectures from 1868 on at the École polytechnique, and equally at the Paris science faculty, he approached this theory along the lines set by Jacobi, with theta functions as a starting point. These lectures probably provide the best presentation of that theory, prior to the widespread acceptance of the Weierstrass approach.

INTRODUCTION

La théorie des fonctions elliptiques occupe une place de choix dans

(*) Texte reçu le 24 octobre 1995, révisé le 19 janvier 1996.

Bruno BELHOSTE, Institut national de recherche pédagogique (Service d'histoire de l'éducation), 29 rue d'Ulm, 75005 Paris (France).

Courrier électronique : belhoste@inrp.fr.

l'œuvre de Charles Hermite. Lui-même, dans une lettre à Stieltjes, écrivait en 1892 : «*Je ne puis sortir du domaine elliptique ; là où la chèvre est attachée, dit le proverbe, il faut qu'elle broute*» [Baillaud et Bourguet 1905, t. 2, p. 270]. La théorie des fonctions elliptiques a été en effet pour Hermite une source intarissable d'inspiration et la plupart de ses travaux ont quelque rapport avec elle, qu'il s'agisse de théorie des nombres, d'algèbre, d'analyse ou de mécanique. «*Aucune théorie n'a présenté une succession de points de vue différents et de méthodes variées, qui donne l'idée de la richesse en analyse, comme la théorie des fonctions elliptiques*» [Hermite 1897, p. 464]¹.

Il ne peut être question dans cet article de rendre compte de toutes ces recherches. Je n'examinerai donc ni l'extension donnée par Hermite à certaines méthodes de la théorie des fonctions elliptiques aux fonctions abéliennes, extension qui est d'ailleurs à l'origine de son intérêt pour les fonctions elliptiques, ni les nombreuses applications qu'il a pu en faire à tous les domaines des mathématiques. Plus modestement, je voudrais étudier ici comment Hermite présentait la théorie des fonctions elliptiques. Il avait à cœur d'en faciliter l'exposition, car il voulait l'introduire dans l'enseignement, à l'exemple de Jacobi lui-même qui dès 1832 prévoyait pour elle un bel avenir à l'École polytechnique [Jacobi *GW*, t. 1, p. 459]. La préoccupation pédagogique, sensible chez Hermite dès son premier cours sur les fonctions elliptiques au Collège de France en 1849, s'affirma, comme on verra, à partir des années 1860, quand il donna un enseignement régulier, d'abord à l'École normale supérieure, puis à l'École polytechnique, enfin à la Faculté des sciences de Paris.

Je focaliserai mon attention dans cet article sur trois moments particulièrement importants pour notre sujet. Je m'intéresserai d'abord aux premières recherches d'Hermite sur les fonctions elliptiques, entreprises dès 1844 sous l'influence de Jacobi et en liaison avec ses recherches sur les intégrales abéliennes, et j'examinerai plus particulièrement leurs rapports avec les recherches menées par Liouville à la même époque sur les fonctions méromorphes doublement périodiques². Je consacrerai ensuite une étude spécifique à un mémoire inédit de 1849, reproduit en annexe, dans lequel

¹ La pagination donnée dans les références est toujours celle des *Œuvres* du mathématicien cité, quand elles existent.

² Dans cet article, nous appellerons fonctions elliptiques les fonctions $sn x$, $cn x$ et $dn x$ obtenues à partir de l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce, comme l'a

Hermite appliquait pour la première fois les méthodes de Cauchy à la théorie des fonctions elliptiques. Enfin, dans la dernière partie de l'article, j'analyserai les leçons sur la théorie des fonctions elliptiques données par Hermite à l'École polytechnique et à la Faculté des sciences de Paris. Mais il convient d'abord d'examiner succinctement quel était l'état de développement de la théorie à l'époque où le mathématicien commençait sa carrière³, c'est-à-dire au début des années 1840.

LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES AVANT HERMITE

C'est seulement dans les années 1820, grâce à Abel et à Jacobi, que les fonctions elliptiques ont été introduites dans l'analyse, comme fonctions inverses des intégrales elliptiques. Les mathématiciens avaient rencontré des intégrales elliptiques dès les débuts du calcul infinitésimal, en particulier dans des problèmes de rectification de courbes, par exemple pour rectifier un arc d'ellipse, d'où leur nom, ou un arc de lemniscate. À la suite de Fagnano, Euler avait étudié certaines propriétés caractéristiques de ces intégrales, principalement le théorème d'addition, sur le cas particulier de l'intégrale lemniscatique $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}}$. Lagrange définissait en 1784 les intégrales elliptiques les plus générales comme des intégrales de la forme $\int R(x, y) dx$ avec $y = \sqrt{P(x)}$, où R est une fonction rationnelle et P un polynôme de degré 3 ou 4 ayant des racines toutes distinctes.

Les intégrales elliptiques ne peuvent être intégrées en termes finis. Au cours des années suivantes, Legendre réussit cependant à ramener leur calcul à celui des trois types fondamentaux suivants d'intégrales elliptiques, dites de première, de deuxième et de troisième espèces (sous la forme de Legendre)

toujours fait Hermite à la suite de Jacobi. Depuis le dernier quart du XIX^e siècle, le terme de fonctions elliptiques désigne plutôt les fonctions méromorphes doublement périodiques. On sait d'ailleurs, d'après le théorème de réduction de Liouville, que toute fonction elliptique au sens moderne s'exprime rationnellement au moyen d'une fonction de Jacobi de mêmes périodes et de sa dérivée.

³ Sur l'histoire de la théorie des fonctions elliptiques, on pourra se reporter en particulier à [Fricke 1913] et à [Houzel 1978]. Pour un exposé moderne de la théorie, nous renvoyons à [Whittaker et Watson 1902/1927, p. 429–535] et à [Chandrasekharan 1985].

$$(1) \quad \begin{cases} F(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}, & E(\varphi) = \int_0^\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta} \, d\theta, \\ \Pi(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\theta}{(1 + n \sin^2 \theta) \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \theta}}. \end{cases}$$

L'amplitude φ , le module k et le paramètre n sont réels, et $0 < k < 1$.

C'est Abel qui réalisa le progrès décisif dans l'étude des intégrales elliptiques. Dès 1823, il entrevit le rôle que doivent jouer leurs fonctions inverses. Il développa ses idées dans plusieurs mémoires et articles publiés entre 1827 et sa mort prématurée, en 1829, principalement dans ses « Recherches sur les fonctions elliptiques » et dans son « Précis d'une théorie des fonctions elliptiques ». Il y montrait que la fonction inverse φ de l'intégrale elliptique de première espèce, étendue aux valeurs complexes de l'argument, est doublement périodique. Abel résolut complètement le problème de la multiplication des fonctions elliptiques (détermination de $\varphi(n\alpha)$ connaissant $\varphi(\alpha)$) et surtout le problème inverse de leur division (détermination de $\varphi(\alpha/n)$ connaissant $\varphi(\alpha)$), correspondant pour les intégrales elliptiques à celui de la division des arcs que Gauss avait déjà traité dans le cas particulier de la lemniscate.

Jacobi développa à la même époque des idées très semblables, qu'il exposa d'abord dans plusieurs articles puis dans un ouvrage fondamental, les *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, publiées⁴ en 1829. La méthode de Jacobi était identique à celle d'Abel — inverser les intégrales elliptiques —, mais ses notations étaient différentes (voir [1828b] et [1829b]). Jacobi notait $\operatorname{am} u = \varphi$ la fonction inverse de l'intégrale de première espèce $u = F(\varphi)$, ce qui donnait, après le changement de variable $t = \sin \theta$, la fonction $x = \sin \operatorname{am} u$ comme fonction inverse de l'intégrale

$$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}.$$

Il introduisait ensuite les deux fonctions $\operatorname{cos am} u = \sqrt{1 - \sin^2 \operatorname{am} u}$ et $\Delta \operatorname{am} u = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \operatorname{am} u}$. La notation simplifiée adoptée en 1838 par Guderman pour écrire les trois fonctions elliptiques de Jacobi — $\operatorname{sn} u$ pour $\sin \operatorname{am} u$, $\operatorname{cn} u$ pour $\operatorname{cos am} u$ et $\operatorname{dn} u$ pour $\Delta \operatorname{am} u$ —, s'est progressivement

⁴ On pourra consulter également [Cayley 1876] où se trouve exposée en anglais la théorie des *Fundamenta nova*.

imposée et Hermite lui-même, pourtant très conservateur en matière de notations, l'a finalement adoptée.

Après avoir étendu aux valeurs complexes le domaine de définition de ses trois fonctions elliptiques en utilisant la substitution imaginaire $\sin \varphi = i \operatorname{tg} \psi$ et le théorème d'addition, Jacobi démontrait aussitôt leur double périodicité (*principium duplicis periodi*). Les fonctions $\operatorname{sn} u$, $\operatorname{cn} u$ et $\operatorname{dn} u$ admettent respectivement comme périodes les couples $(4K, 2iK')$, $(4K, 2(K+iK'))$, et $(2K, 4iK')$, où K et K' sont les valeurs des « intégrales complètes » $F(\frac{\pi}{2})$ correspondant respectivement au module k et au module complémentaire $k' = \sqrt{1 - k^2}$.

Le sujet principal des recherches de Jacobi portait en réalité sur la théorie de la transformation, étudiée également par Abel [1827–1828]. Le problème consiste à déterminer à quelles conditions l'intégrale générale d'une équation différentielle $R(z, \sqrt{P(z)}) dz = R'(z', \sqrt{P'(z')}) dz'$, dont les deux membres sont des différentielles elliptiques de même espèce, peut s'exprimer sous la forme d'une relation algébrique entre z et z' . Abel a montré [1828] que ce problème peut en fait toujours se ramener au cas d'une transformation rationnelle, c'est-à-dire à celui où z' est une fonction rationnelle $U(z)/V(z)$ avec des polynômes U et V premiers entre eux.

Plusieurs transformations rationnelles avaient été découvertes avant Abel et Jacobi : celles d'ordre 2 de Landen et de Gauss, qui multiplient le rapport des périodes par 2; celle d'ordre 3 de Legendre, qui multiplie le rapport des périodes par 3. Dans des recherches restées inédites, Gauss avait même étudié des transformations d'ordre 5 et 7. C'est en voulant généraliser la transformation de Legendre que Jacobi fut amené à développer sa théorie au cours de l'année 1827 [Jacobi 1828_{a,b}]. Il considérait des transformations rationnelles d'ordre n quelconque (c'est-à-dire telles que $\sup(\deg U, \deg V) = n$). Après avoir déterminé les conditions algébriques pour que l'on ait l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{1}{M} \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2 x^2)}},$$

avec des constantes λ et M convenables, il traitait le cas des transformations d'ordre impair pour lesquelles $y = xF(x^2)/G(x^2)$ avec $\deg F = \deg G$.

Il obtenait pour ce type de transformations des conditions algébriques spécifiques grâce auxquelles il parvenait à exprimer analytiquement y , λ

et M au moyen de ses fonctions elliptiques [1828b]. La méthode consistait à passer aux fonctions inverses, en remarquant que le problème de la transformation rationnelle équivaut, connaissant $x = \operatorname{sn} u$, à déterminer $y = U(x)/V(x)$, λ et M de telle sorte que $y = \operatorname{sn}(u/M, \lambda)$. Pour un même ordre n premier, Jacobi obtenait ainsi $n + 1$ transformations distinctes. Il montrait en particulier que la multiplication par n se ramène à la succession des deux «transformations réelles» supplémentaires d'ordre n qui transforment un module réel k en un module réel λ .

Les fonctions thêta

La première partie des *Fundamenta nova* était consacrée toute entière à la théorie de la transformation. Dans la deuxième partie du traité, Jacobi étudiait la représentation de ses fonctions elliptiques par des développements en produits et séries infinies. Ce n'est qu'après avoir obtenu ces développements que Jacobi introduisait ses fameuses fonctions thêta, qui constituent peut-être sa principale contribution à la théorie des fonctions elliptiques. Son point de départ, au moins dans les *Fundamenta nova*, était l'étude des intégrales de deuxième et troisième espèces $E(\varphi)$ et $\Pi(\varphi)$. Il définissait la fonction $\Theta(u)$ de manière indirecte au moyen de sa dérivée logarithmique $Z(u)$ et en déduisait aussitôt une représentation par des produits infinies. Jacobi utilisait sa nouvelle fonction pour exprimer les intégrales de deuxième et troisième espèces. Ce n'est qu'ensuite qu'il introduisait sa deuxième fonction $H(u)$, représentée par un produit infini du même type que pour $\Theta(u)$.

En comparant les expressions obtenues pour ses fonctions thêta à celles de ses fonctions elliptiques obtenues précédemment, Jacobi obtenait les représentations fondamentales suivantes de ses fonctions elliptiques

$$(2) \quad \operatorname{sn} u = \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{H(u)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{cn} u = \frac{\sqrt{k'}}{\sqrt{k}} \frac{H(u+K)}{\Theta(u)}, \quad \operatorname{dn} u = \sqrt{k'} \frac{\Theta(u+K)}{\Theta(u)}.$$

Jacobi étudiait les propriétés de ses fonctions thêta, puis donnait leur développement en séries de Fourier sous la forme

$$(3) \quad \begin{cases} \Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 1 + 2 \sum_{n \geq 1} (-1)^n q^{n^2} \cos 2nx, \\ H\left(\frac{2Kx}{\pi}\right) = 2 \sum_{n \geq 0} (-1)^n q^{(2n+1)^2/4} \sin(2n+1)x, \end{cases}$$

en posant $q = e^{-\pi K'/K}$. Il terminait ses *Fundamenta nova* en appliquant ces développements à la démonstration de plusieurs formules utilisées en théorie des nombres.

Cette rapide esquisse de la théorie exposée par Jacobi dans son traité — très incomplète au demeurant, puisqu'elle laisse entièrement de côté des résultats aussi importants que ceux obtenus pour les équations modulaires ou pour les intégrales de troisième espèce — fait apparaître le rôle clé joué par le problème de la transformation. Comme l'a écrit Dirichlet [1853], les recherches contemporaines et concurrentes d'Abel et de Jacobi se sont orientées dans deux directions différentes. Alors que le premier s'est principalement intéressé au problème de la multiplication et de la division des intégrales elliptiques en liaison avec ses travaux sur les équations algébriques, Jacobi a porté tous ses efforts sur l'étude des transformations rationnelles, dont il voulait faire le fondement de la théorie des fonctions elliptiques. Les *Fundamenta nova*, dont le développement est entièrement commandé par la théorie de la transformation, marquèrent la réalisation complète de ce programme.

Si l'unité systématique des *Fundamenta nova* est impressionnante, le parti adopté par Jacobi pour sa rédaction avait cependant l'inconvénient de masquer quelques-unes de ses idées les plus fécondes. C'était le cas en particulier pour les fonctions Θ et H , introduites de manière assez artificielle vers la fin du traité où elles ne jouaient qu'un rôle limité. Conscient de cette faiblesse, Jacobi renversa entièrement l'ordre d'exposition dans ses leçons sur les fonctions elliptiques données en 1835–1836 à l'Université de Königsberg, dans lesquelles il parlait de quatre fonctions thêta définies *a priori* par des séries de Fourier. Ces leçons restèrent inédites jusqu'à la publication en 1881 d'une rédaction faite par les soins de Borchardt [Jacobi 1881, p. 495–538], mais ce dernier, lors de son passage à Paris en 1847, en fit connaître à Hermite les idées directrices⁵.

En partant dans ses leçons des fonctions thêta, Jacobi ne faisait en réalité qu'accorder le mode d'exposition de la théorie aux méthodes de

⁵ Jacobi mentionnait ses leçons dans sa lettre à Hermite du 6 août 1845 [Jacobi *GW* 2, p. 115]. Dans sa réponse, en 1847, Hermite indiquait : «*M. Borchardt a eu la bonté de me mettre un peu sur la voie pour déduire les propriétés des fonctions Θ de la multiplication des quatre séries $\sum e^{-(ax+ib)^2}$, mais je ne sais si je pourrai marcher bien loin*» [Hermite 1850, p. 120].

découverte qu'il utilisait depuis 1828. Il a donné lui-même quelques indications à ce sujet dans une lettre à Crelle datée de juillet 1828 [1828c]. Il y introduisait *a priori* et sous forme de séries de Fourier les fonctions $\Theta(x, q)$ et $H(x, q)$, grâce auxquelles il exprimait aussitôt ses fonctions elliptiques et qu'il utilisait pour étudier le problème de la transformation⁶. Surtout, il parvint à résoudre par leur moyen le problème de la transformation inverse, c'est-à-dire à exprimer $x = \operatorname{sn} u$ connaissant $y = \operatorname{sn}(u/M, \lambda)$. Mais il ne publia pas la démonstration, se contentant de donner dans le *Journal* de Crelle [1829a, § IV] l'énoncé de son théorème, qu'il considérait comme «*un des plus importants trouvés jusqu'ici dans la théorie des fonctions elliptiques*» [*Ibid.*, p. 272] et dont la découverte, écrivait-il à Legendre en 1829, lui avait «*coûté beaucoup de peine*» [Jacobi *GW*, t. 1, p. 431]. Grâce à la formule de la transformation inverse, il parvenait en effet à retrouver les expressions algébriques des racines de l'équation de la division des fonctions elliptiques découvertes par Abel en 1827.

Jacobi, après Abel, était donc parvenu à la fin des années 1820 à développer une théorie complète des fonctions elliptiques et à fonder cette théorie sur les propriétés des fonctions thêta. Au cours des années 1830, il entreprit d'étendre les méthodes utilisées pour le cas elliptique au cas hyperelliptique [Jacobi 1835], en cherchant à inverser les intégrales abéliennes au moyen du théorème d'Abel (voir [Houzel 1978, p. 72–83])⁷. C'est dans le cadre de ce programme de recherche que se situent les premiers travaux d'Hermite, commencés en 1843.

⁶ Les fonctions Θ et H telles qu'elles sont définies dans cette lettre se distinguent néanmoins des fonctions Θ et H des *Fundamenta nova* par le choix de leur argument ; pour passer des premières aux secondes il suffit de changer l'argument x en l'argument $2Kx/\pi$.

⁷ Les intégrales abéliennes sont des intégrales de la forme $\int R(x, y) dx$, où R est une fonction rationnelle et y une quantité dépendant algébriquement de x . Dans le cas elliptique, y^2 est, comme on l'a vu, un polynôme en x de degré 3 ou 4, dans le cas hyperelliptique de degré supérieur à 4. (Dans les deux cas, les racines sont supposées distinctes.) Le théorème d'Abel généralise en un certain sens aux intégrales abéliennes le théorème d'addition énoncé par Euler pour les intégrales elliptiques.

**LES PREMIÈRES RECHERCHES D'HERMITE SUR LES FONCTIONS
ELLIPTIQUES (1843–1844) : DE LA THÉORIE DES FONCTIONS THÊTA
À CELLE DES FONCTIONS DOUBLEMENT PÉRIODIQUES**

Fils d'un ingénieur civil devenu négociant en drap à Dieuze en Lorraine, Charles Hermite (1821–1901) avait choisi d'entrer comme son frère aîné à l'École polytechnique⁸. Il commença sa préparation à la rentrée de 1840, en montant à Paris pour y suivre au collège Louis-le-Grand la classe de mathématiques spéciales de Louis Richard, qui avait été le professeur de Galois. Dès 1841, il révéla sa «*furie mathématique*» en lisant Euler, Lagrange et Gauss à la bibliothèque Sainte-Geneviève au lieu de se préparer à l'examen d'admission. Comme il le racontera plus tard dans une lettre à Stieltjes [Baillaud et Bourguet 1905, t. 1, p. 129], s'il obtint un deuxième accessit au concours général, il paya ses «*fantaisies d'écolier savant*» par un «*humiliant échec*» à l'École polytechnique. Après une deuxième année de préparation, au cours de laquelle il fréquenta comme élève libre l'institution Mayer, il fut reçu à l'École au concours de 1842. De ces années de préparation datent ses premières publications dans les *Annales de mathématiques*.

À l'École polytechnique, son professeur d'analyse était Charles Sturm, mais c'est de l'autre professeur d'analyse, Joseph Liouville, qu'il était proche. Liouville, devenu son protecteur, encouragea ses premières recherches sur la théorie des fonctions abéliennes, et l'engagea à les communiquer à Jacobi. Dans sa première lettre [1846, p. 10–17], envoyée en janvier 1843 alors qu'il était encore élève à l'École, Hermite, démontrant des conjectures énoncées par Jacobi en 1834, étendait aux intégrales hyperelliptiques le théorème d'Abel sur la division des intégrales elliptiques. Ce travail [1848a], présenté à l'Académie des sciences, fit l'objet d'un rapport extrêmement élogieux de Liouville en août 1843 [Liouville 1843].

Une infirmité au pied droit lui ayant fermé la carrière d'ingénieur, Hermite démissionna de l'École polytechnique à la fin de l'année 1843. Son père, sur les conseils de Liouville, accepta alors qu'il se livre tout entier à ses travaux mathématiques. Hermite poursuivit intensément ses recherches sur les intégrales abéliennes, principalement hyperelliptiques.

⁸ Sur la vie et la carrière de Charles Hermite, on pourra consulter [Brezinski 1990].

Comme il l'annonçait dans une lettre à Liouville du 17 juin 1844, il commença à cette époque à étudier le problème de l'inversion des intégrales abéliennes posé par Jacobi en cherchant à généraliser des méthodes applicables au cas elliptique, mais sans parvenir à des résultats significatifs [Hermite 1844, p. 49–56]. Il entreprit également l'étude du problème de la transformation, sans plus de succès. Mais cette recherche le conduisit, comme il l'expliquait dans la même lettre à Liouville, à une nouvelle démonstration des théorèmes de Jacobi relatifs aux transformations des fonctions elliptiques de première et de troisième espèces, fondée sur la considération directe des propriétés de la fonction doublement périodique $z = \sum_{p=0}^{p=n-1} \varphi(u + 2p\omega/n)$, où φ (notation d'Abel) représente la fonction sn et n un nombre impair quelconque [*Ibid.*, p. 56–62].

Dans les semaines qui suivirent, il découvrit pour étudier les fonctions elliptiques une nouvelle méthode fondée sur les fonctions thêta, dont l'application à quelques problèmes de la théorie, en particulier à celui de la transformation inverse, fit l'objet de sa seconde lettre à Jacobi, écrite en août 1844 [Hermite 1846, p. 18–37]⁹.

La seconde lettre d'Hermite à Jacobi

La méthode d'Hermite était basée sur trois idées puisées directement dans les travaux de Jacobi. La première consistait à fonder l'étude des fonctions elliptiques sur celle des fonctions thêta. Comme on l'a vu, Jacobi l'avait depuis longtemps faite sienne dans ses leçons universitaires. Eisenstein et Cayley adoptèrent un point de vue identique dans des travaux publiés à la même époque (voir [Eisenstein 1844, 1847] et [Cayley 1845a,b]). La deuxième idée était plus originale : Hermite introduisait certaines fonctions périodiques définies par des équations de condition établies sur le modèle des équations satisfaites par les fonctions Θ et H . Il considérait ainsi dans sa lettre à Jacobi trois types de relations fonctionnelles. Les premières du type

$$(4) \quad \Phi(x + 2iK') = -e^{-i\pi(x+iK')/K} \Phi(x) \quad \text{et} \quad \Phi(x + 4K) = \Phi(x),$$

⁹ La lettre d'août 1844 contient également l'exposition d'une autre méthode pour étudier les propriétés élémentaires des fonctions elliptiques, fondée sur la considération de l'intégrale de troisième espèce. Sur cette méthode, voir également [Hermite 1845].

qui comprennent les relations satisfaites par Θ et H ; les deuxièmes du type

$$(5) \quad \Psi(x + 2iK') = -e^{-ni\pi(x+iK')/K} \Psi(x) \quad \text{et} \quad \Psi\left(x + \frac{4K}{n}\right) = \Psi(x);$$

les troisièmes, enfin, du type

$$(6) \quad \Pi(x + 2iK') = (-1)^n e^{-ni\pi(x+iK')/K} \Pi(x) \quad \text{et} \quad \Pi(x + 4K) = \Pi(x).$$

La troisième idée fondamentale d'Hermité consistait, pour étudier ces fonctions périodiques, à les représenter par des séries de Fourier, par exemple $\Phi(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m e^{mi\pi x/2K}$. La méthode était entièrement nouvelle, même si Hermite s'inspirait sans doute de la définition de la fonction Θ par une série de Fourier (en sinus) donnée par Jacobi en 1828 [Jacobi 1828c].

Avant d'examiner plus avant l'application qu'en faisait Hermite, il convient de remarquer que ces développements étaient introduits par lui sans aucune justification. Hermite supposait implicitement que les fonctions Φ sont des fonctions périodiques entières, donc développables en séries de Fourier dans tout le plan. Plus généralement, on sait en effet qu'une fonction F holomorphe de période a dans une bande du plan complexe y est développable en série de Fourier. Pour le démontrer, il suffit d'appliquer la bande sur une couronne centrée en 0 par la transformation périodique $h(z) = e^{2i\pi z/a}$ et d'y développer en série de Laurent la fonction holomorphe f telle que $\Phi(z) = f(h(z))$. Hermite aurait pu disposer de cette démonstration, puisque Cauchy avait fait connaître le théorème de Laurent en 1843 [Cauchy 1843], mais rien ne vient confirmer cette supposition. Bouquet et Briot sont les premiers, à notre connaissance, à avoir démontré de cette manière qu'une fonction holomorphe périodique dans une bande y est développable en une série de Fourier [Briot et Bouquet 1859, p. 67; 1875, p. 161–182].

En reportant le développement $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} a_m e^{mi\pi x/2K}$ dans l'équation (4), Hermite obtenait par un calcul facile l'expression

$$\Phi(x) = AH(x, \tau) + B\Theta(x, \tau),$$

où A et B sont des constantes quelconques. Nous écrivons $H(x, \tau)$ et $\Theta(x, \tau)$ (ce que ne faisait pas Hermite) pour indiquer que H et Θ dépendent

dans cette formule du rapport $\tau = K'/K$. En utilisant la transformation $\tau_1 = n\tau$, où $\tau_1 = K'_1/K_1$, il en tirait l'expression

$$\Psi(x) = AH\left(\frac{nK_1}{K}x, \tau_1\right) + B\Theta\left(\frac{nK_1}{K}x, \tau_1\right),$$

comme solution de l'équation (5). Enfin, il montrait que l'expression

$$(7) \quad \begin{aligned} \Pi(x) = & AH^n(x) + BH^{n-1}(x)\Theta(x) + \cdots + LH(x)\Theta^{n-1}(x) + I\Theta^n(x) \\ & + [H'(x)\Theta(x) - H(x)\Theta'(x)] \\ & \times [A'H^{n-2}(x) + B'H^{n-3}(x)\Theta(x) + \cdots + I'\Theta^{n-2}(x)], \end{aligned}$$

est la solution la plus générale de l'équation (6) parce qu'elle renferme $2n$ constantes arbitraires. Ces formules permettaient à Hermite de démontrer une foule de résultats sur les fonctions elliptiques.

Par exemple, la solution $\Psi(x)$ de l'équation (5) lui donnait, pour n premier et pour p entier tel que $0 \leq p \leq n-1$, l'égalité

$$\begin{aligned} & \sum_{r=0}^{r=n-1} \alpha^{-4r} \operatorname{sn}\left(x + \frac{4rK}{n}\right) \\ & = C \operatorname{sn}\left(\frac{x}{M} + \frac{4piK'_1}{n}\right) \frac{e^{2pi\pi x/K} \Theta(x/M + 4piK'_1/n, \tau_1)}{\Theta(x/M, \tau_1)}, \end{aligned}$$

où α est la racine n -ième primitive de l'unité $e^{2i\pi p/n}$, C une constante à déterminer et $1/M$ le rapport nK_1/K . Après avoir transformé $\Theta(x/M, \tau_1)$ en $\Theta(x/M, -1/\tau_1)$, Hermite tirait de cette égalité la formule de la transformation inverse donnée sans démonstration par Jacobi [1829a]. Notons que la même solution $\Psi(x)$ de l'équation (5), appliquée au produit $\prod_{p=0}^{p=n-1} \frac{H(x + 4pK/n)}{\Theta(x + 4pK/n)}$, conduit aussi, comme l'indiquait Hermite, à la solution du problème de la transformation directe.

À Hermite qui demandait à Jacobi s'il n'avait pas en fait «rencontré les mêmes principes», ce dernier confirmait dans sa réponse : «Les principes dont vous partez pour parvenir aux formules de la transformation inverse [...] sont précisément les mêmes qui d'abord m'ont conduit à ces formules» [Jacobi GW 2, p. 115]. Jacobi mentionnait ses leçons universitaires où il partait des fonctions thêta et terminait sa lettre du 6 août 1845 par ces mots fameux : «Ne soyez pas fâché, monsieur, si quelques-unes

de vos découvertes se sont rencontrées avec mes anciennes recherches. Comme vous dûtes commencer par où je finis, il y a nécessairement une petite sphère de contact. Dans la suite, si vous m'honorez de vos communications, je n'aurai qu'à apprendre» [*Ibid.*, p. 120].

Hermite utilisait aussi l'expression (7) de $\Pi(x)$ pour retrouver la formule d'addition, dite théorème d'Abel, donnant pour tout n l'expression de $\operatorname{sn}(a_1 + a_2 + \dots + a_n)$, «*idée ingénieuse et très originale*» qui ne lui était jamais venue à l'esprit, déclarait Jacobi. Le numérateur de

$$\operatorname{sn}(x)F[\operatorname{sn}^2(x)] - \frac{d\operatorname{sn}(x)}{dx}f[\operatorname{sn}^2(x)],$$

où F et f sont des polynômes respectivement de degrés m et $(m-1)$, est de la forme de l'expression (7), avec $n = 2m + 1$, et satisfait ainsi à l'équation (6), avec la condition supplémentaire $\Pi(x+2K) = -\Pi(x)$. D'un autre côté, l'expression $H(x+a_1)H(x+a_2)\cdots H(x+a_{2m})H(x+a_{2m+1})$ satisfait les mêmes conditions, si l'on pose $a_1 + a_2 + \dots + a_{2m} + a_{2m+1} = 2jK$, où j est un entier quelconque. Hermite en déduisait l'égalité

$$\begin{aligned} \operatorname{sn}(x)F[\operatorname{sn}^2(x)] - \frac{d\operatorname{sn}(x)}{dx}f[\operatorname{sn}^2(x)] \\ = C \frac{H(x+a_1)H(x+a_2)\cdots H(x+a_{2m})H(x+a_{2m+1})}{\Theta^{2m+1}(x)} \end{aligned}$$

qui conduit au théorème général d'addition et, dans le cas où $m = 1$ et $j = 0$, à la théorie de Jacobi des intégrales de troisième espèce (voir aussi [1862, p. 181–187, p. 196–198]).

La découverte de cette solution générale $\Pi(x)$ montre qu'Hermite disposait dès cette époque, même s'il ne l'énonçait pas explicitement dans sa lettre, d'une proposition importante connue plus tard sous le nom de principe d'Hermite. D'après ce principe, la solution générale satisfaisant les deux équations fonctionnelles

$$(8) \quad \Phi(x+a) = \Phi(x) \quad \text{et} \quad \Phi(x+b) = e^{-i\pi k(2x+b)/a}\Phi(x)$$

doit être de la forme $\sum_{m=0}^{m=k-1} A_m \Phi_m(x)$, les éléments $\Phi_m(x)$ s'exprimant au moyen des fonctions thêta. Autrement dit, ces fonctions Φ , dites parfois fonctions thêta d'ordre k , forment, en langage moderne, un espace vectoriel de dimension finie k sur \mathbb{C} , et les k fonctions $\Phi_m(x)$ constituent une

base de cet espace. Hermite s'est servi systématiquement de ce principe pour exposer la théorie des fonctions elliptiques dans ses cours à l'École polytechnique et à la Faculté des sciences.

Même si la lettre à Jacobi d'août 1844 contient de précieuses informations sur les premiers résultats obtenus par Hermite, elle ne nous donne qu'une vision partielle de ses recherches dans le domaine des fonctions elliptiques. Il est malheureusement impossible, faute de sources (les papiers du mathématicien ont été détruits dans un incendie), d'en reconstituer avec certitude le cadre d'ensemble. Cette lacune est d'autant plus dommageable que l'année 1844 ouvre une nouvelle période dans l'histoire de la théorie des fonctions elliptiques, marquée par les travaux de Liouville sur les fonctions doublement périodiques. Ceux-ci ont fait l'objet d'une analyse approfondie de la part de Jeanne Peiffer [1978, 1983], puis de Jesper Lützen [1990], et nous renvoyons à leurs études, nous limitant pour notre part à ce qui intéresse directement la contribution d'Hermite au développement de la théorie.

Hermite, Liouville et les fonctions doublement périodiques

Le point de vue de Liouville consistait à étudier les propriétés générales des fonctions méromorphes doublement périodiques. Il partait pour cela d'un théorème fondamental, qu'il appelait son *principium*, énonçant qu'une telle fonction, lorsqu'elle «*n'est jamais infinie*», se réduit à une simple constante. Ce *principium*, communiqué à l'Académie des sciences en décembre 1844 [Liouville 1844], est un cas particulier du fameux théorème sur les fonctions entières bornées appelé aujourd'hui théorème de Liouville, comme le montra aussitôt Cauchy [1844]. Or les carnets de Liouville révèlent que la découverte de son *principium* au cours de l'été 1844 a été directement inspirée par les recherches d'Hermite sur les fonctions elliptiques.

Le point de départ des recherches de Liouville est en effet une note du 1^{er} août, commençant par ces mots : «*M. Hermite voudrait, dit-il, tirer du développement d'une fonction $f(x)$ en série de sinus et de cosinus la preuve de l'impossibilité de l'existence de deux périodes réelles et incommensurables entre elles d'une fonction $f(x)$ d'une variable. Rien ne me semble plus simple*» (cité dans [Peiffer 1983, p. 241]). En développant la fonction entière doublement périodique $f(x)$, supposée réelle, en série de Fourier par rapport à la première période a , et en notant b la deuxième

période, comme le faisait couramment Hermite, on obtient immédiatement l'égalité

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_n e^{2n\pi i x/a} = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_n e^{2n\pi i(x+b)/a},$$

d'où l'on tire l'égalité $A_n = A_n q^{2n}$ où $q = e^{i\pi b/a}$ en considérant les coefficients de Fourier. Puisque a et b sont réels incommensurables, on a $q^{2n} \neq 1$, soit $A_n = 0$, pour $n \neq 0$, c'est-à-dire que la fonction $f(x)$ se réduit à une constante. Ce raisonnement s'applique aussi bien au cas où la fonction doublement périodique est complexe. Il montre que la partie imaginaire du rapport b/a est nécessairement non nulle (sinon la fonction est simplement périodique) et fournit alors aussitôt le *principium* de Liouville. Bien que la démonstration fût pour Hermite un jeu d'enfant, il passa à côté de cette découverte, dont le mérite revient entièrement à Liouville¹⁰.

La mention d'Hermite dans les carnets de Liouville fournit cependant une indication importante sur les préoccupations du jeune mathématicien à l'époque où il envoyait sa deuxième lettre à Jacobi. Il ressort en effet de la note de Liouville du 1^{er} août qu'Hermite recherchait alors une nouvelle démonstration de la proposition donnée par Jacobi en 1835, selon laquelle les deux périodes fondamentales d'une fonction méromorphe doublement périodique non triviale sont linéairement indépendantes sur \mathbb{R} [Jacobi 1835]. Cette indication nous amène naturellement à conjecturer que dès les premiers mois de l'année 1844, c'est-à-dire avant même Liouville, Hermite plaçait le principe de la double périodicité au centre de ses recherches sur les fonctions elliptiques.

Or, en 1848, soit quatre ans après l'époque qui nous intéresse ici, Hermite fit connaître par un article au *Cambridge and Dublin Mathematical Journal* un mode de représentation des fonctions méromorphes doublement périodiques par des quotients de fonctions entières périodiques [1848b]. Il y considérait deux fonctions entières simplement périodiques, de

même période a , représentées par les séries de Fourier
$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m e^{2m\pi i x/a}$$

¹⁰ Sur les différentes tentatives de démonstration de son *principium* par Liouville, voir les études citées de J. Peiffer et J. Lützen. Hermite lui-même a reproduit en 1862 la démonstration ici esquissée de «*la proposition de M. Liouville*» [Hermite 1862, p. 138].

et $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} B_m e^{2m\pi i x/a}$ et il recherchait à quelles conditions leur quotient admet une deuxième période b .

En procédant comme pour l'étude des fonctions $\Phi(x)$ dans sa lettre à Jacobi, il obtenait, pour toute valeur entière de μ , l'égalité

$$\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m B_{\mu-m} q^{2(\mu-m)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} A_n B_{\mu-n} q^{2n} \quad \text{avec } q = e^{i\pi b/a}.$$

Il considérait le cas particulier où les deux séries sont identiques, c'est-à-dire où le m -ième terme de la série de gauche est égal au $(m+k)$ -ième terme de la série de droite. On a alors l'égalité

$$\frac{A_m}{A_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \frac{B_{\mu-m-k}}{B_{\mu-m}} q^{-2(\mu-m)}.$$

Le nombre μ étant quelconque, les coefficients A_m et B_m doivent satisfaire la même équation aux différences finies $\frac{z_m}{z_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \text{Const}^e$, dont la solution générale est $z_m = \Pi(m) q^{-\frac{m^2}{k} - \alpha m}$, avec $\Pi(m+k) = \Pi(m)$.

Hermite en induisait qu'une fonction méromorphe doublement périodique peut être représentée par un quotient de deux fonctions entières périodiques de la forme

$$\sum \Phi(m) q^{-\frac{m^2}{k} - \alpha m} e^{\frac{2m i \pi x}{a}}$$

avec $\Phi(m+k) = \Phi(m)$, où, pour des raisons de convergence, k et $\text{Im } b/a$ doivent être de signes contraires. Les deux fonctions au numérateur et au dénominateur du quotient sont ainsi des fonctions thêta d'ordre k , entièrement déterminées par des équations semblables à (8), d'où la possibilité, grâce au principe d'Hermite, de réduire les fonctions doublement périodiques les plus générales à des fonctions rationnelles de fonctions elliptiques.

C'est un mémoire de Cayley sur les fonctions elliptiques [1847] qui avait suscité cette publication, mais il est clair à la lecture de l'article qu'Hermite disposait de sa méthode depuis un certain temps¹¹. Depuis

¹¹ Présentant sa méthode, il écrit en effet dans son article après avoir rappelé le travail de Cayley : « *J'avais découvert de mon côté le point de vue suivant, plus voisin peut-être encore de l'idée fondamentale de la double périodicité dans les fonctions analytiques.* »

quand? Il est impossible de le dire avec certitude, d'autant que nous connaissons fort mal ses activités entre l'été 1844, date de sa deuxième lettre à Jacobi, et l'été 1847, date approximative de sa troisième lettre au même. Installé d'abord à Paris, puis, semble-t-il, à Nancy, il vivait alors grâce au soutien de sa famille et peut-être aussi en donnant des cours privés. En apparence, il produisait peu : aucun mémoire présenté à l'Académie des sciences, aucun article important dans la presse mathématique, quelques indices montrant qu'il s'intéressait alors à l'œuvre de Galois (voir [Lützen 1990, p. 126] et [Belhoste 1991, p. 207]). Dans sa troisième lettre à Jacobi, consacrée à l'arithmétique, Hermite lui-même avouait qu'il avait été «*depuis longtemps éloigné du travail*» [1850]. À cette époque, dominée par ses travaux algébriques sur les formes quadratiques, il envisageait de reprendre ses recherches sur la théorie des fonctions elliptiques et il est donc possible qu'il ait découvert sa représentation par quotients des fonctions doublement périodiques au cours des mois suivants. Mais, pour des raisons qui apparaîtront dans la suite, cette découverte, antérieure dans tous les cas à la publication de Cayley, nous paraît remonter plus probablement à l'année 1844. Elle serait alors contemporaine de sa deuxième lettre à Jacobi et des premières recherches de Liouville sur les fonctions doublement périodiques.

Une fois admis cette supposition, il nous reste à déterminer si Hermite disposait déjà de sa représentation des fonctions doublement périodiques par des quotients de fonctions périodiques en août 1844, c'est-à-dire avant même le début des investigations de Liouville. Certes, Hermite ne revendiqua jamais pour lui-même la priorité dans l'étude des fonctions doublement périodiques. Il reconnaissait à Jacobi le mérite d'avoir le premier envisagé la théorie des fonctions elliptiques sous ce point de vue nouveau et à Liouville celui de l'avoir complètement développé. «*Liouville après lui [Jacobi], écrivait-il en 1862, embrassant dans toute sa généralité la théorie des fonctions doublement périodiques, fit voir qu'elles se réduisaient aux seules fonctions elliptiques, et mit hors de doute la prévision de Jacobi que ces fonctions résumaient en elles tout ce que pouvait présenter l'analyse à l'égard de la périodicité envisagée dans son sens le plus étendu*» [Hermite 1862, p. 129]¹². Mais si Hermite ne fit jamais mention de ses propres

¹² En 1890, il écrit encore : «*Liouville a abordé le premier la théorie des fonctions uniformes doublement périodiques et établi cette importante proposition que, dans le*

recherches, il ne faudrait pas en conclure qu'il ne travailla pas lui-même très tôt dans cette direction. Il convient en effet de prendre en compte l'extrême délicatesse dont il faisait toujours preuve dans les questions de priorité et son souci constant de rendre à ses maîtres, Liouville comme Jacobi ou Cauchy, tout ce qui leur revenait, et parfois même au-delà.

La lecture de la lettre d'août 1844 suggère en fait qu'Hermite disposait dès ce moment de sa représentation par quotients des fonctions méromorphes doublement périodiques. L'analogie entre les techniques utilisées dans cette lettre et celles utilisées dans l'article de 1848 est évidente. Dans les deux cas, Hermite combinait l'emploi de séries de Fourier avec celui de relations fonctionnelles. Mais il y a plus. Représenter une fonction elliptique par un quotient de séries de Fourier était, comme on l'a vu, l'une des idées de base de la lettre à Jacobi. Hermite y indiquait explicitement que sa méthode «*est fondée principalement sur ce caractère, digne de toute notre attention, de la fonction $\sin \operatorname{am}(x)$, d'être exprimable par le quotient de deux fonctions développables en séries toujours convergentes, et qui restent les mêmes, ou ne font qu'acquérir un facteur commun, en augmentant l'argument de certaines constantes. Tel est le lien si simple par lequel se trouve rattaché, aux notions analytiques élémentaires, l'ensemble des propriétés caractéristiques de la nouvelle transcendante, qui ont leur source dans le principe de la double période*». Au regard de cette remarque, la méthode publiée par Hermite en 1848 apparaît comme une généralisation naturelle du point de vue adopté dans la lettre de 1844, point de vue tiré lui-même directement de la lecture de Jacobi.

Par ailleurs, Hermite indiquait en passant, dans sa lettre de 1844, comment l'expression (7) de $\Pi(x)$ conduit au développement en série de toute fonction rationnelle de $\operatorname{sn} x$ et de sa dérivée. Cette remarque montre qu'il considérait des fonctions doublement périodiques représentées par des quotients de fonctions du type $\Pi(x)$ et qu'il savait les réduire aux fonctions elliptiques de Jacobi. Elle suggère ainsi que dès cette époque,

cas où elles n'ont qu'un nombre fini de pôles à l'intérieur du parallélogramme des périodes, elles s'expriment par une fonction rationnelle du sinus d'amplitude et de sa dérivée» [Hermite 1890, p. 300]. Dans le même ordre d'idée, Briot et Bouquet indiquaient déjà en 1859 : «*Les fonctions doublement périodiques, monodromes et monogènes, jouissent de propriétés communes qui résultent de l'idée même de la double périodicité. C'est M. Liouville qui, le premier, a envisagé les fonctions doublement périodiques sous ce point de vue très-élevé; il a jeté ainsi un grand jour sur cette matière auparavant si obscure*» [1859, p. 79-80].

Hermite n'était pas loin de posséder la proposition fondamentale de Liouville selon laquelle les fonctions doublement périodiques les plus générales se réduisent à des fonctions rationnelles de $\operatorname{sn} x$ et de sa dérivée. Dans son mémoire du 19 novembre 1849, il indiqua effectivement, sans en donner la démonstration, que la considération des solutions de l'équation (8) permet facilement d'obtenir cette réduction, mais il paraît peu vraisemblable, comme semblait le croire M. Noether [1902, p. 345–346], qu'il possédait déjà cette proposition en août 1844, c'est-à-dire avant Liouville.

Il est donc tout à fait possible que ce soit Hermite qui ait entrepris le premier de ramener l'étude des fonctions elliptiques à celle des fonctions doublement périodiques, représentées par des quotients de fonctions entières périodiques, et qu'il ait mis ainsi Liouville sur la voie d'une théorie générale des fonctions doublement périodiques. Cette étude aurait été, dans son esprit, un travail préparatoire à celle des fonctions hyperelliptiques, à quatre périodes simultanées. On pourra cependant préférer l'hypothèse inverse et supposer qu'Hermite, influencé par les travaux de Liouville, ne développa sa méthode qu'après coup. Les deux mathématiciens se communiquaient en effet régulièrement leurs découvertes et Hermite prit connaissance dès 1844 des résultats obtenus par Liouville concernant les fonctions doublement périodiques (voir [Cauchy 1851]). Le *principium* de Liouville, en montrant qu'une fonction doublement périodique non triviale ne peut être représentée par une série de Fourier, conduisait d'ailleurs naturellement à l'idée d'une représentation par des quotients de séries de Fourier, généralisant la représentation des fonctions elliptiques de Jacobi par des quotients de fonctions, comme Hermite l'indiquait lui-même plus tard en exposant sa méthode [1862, p. 143].

Au terme de cette discussion, il faut se résigner à ne pas trancher cette question de priorité. Dans tous les cas, c'est Liouville et lui seul qui sut tirer de cette idée initiale une théorie complète, fondée sur l'application systématique de son *principium*. Quant à Hermite, ses préoccupations étaient différentes. L'adoption d'un tel point de vue pour étudier les fonctions elliptiques et leurs transformations ne l'intéressait que dans la mesure où il pouvait être étendu aux intégrales hyperelliptiques et aux intégrales abéliennes en général. Ses tentatives en ce sens aboutirent d'ailleurs à un échec au cours des années 1840. C'est seulement en 1855

qu'il parvint à construire une théorie des fonctions thêta à deux variables sur le modèle de sa théorie des fonctions thêta à une variable, et à fonder sur elle une théorie de la transformation des fonctions hyper-elliptiques [1855].

Il convient d'ajouter que la théorie d'Hermite reposait sur des bases extrêmement fragiles. Ce n'est que par une sorte d'induction qu'il concluait en effet à la possibilité de représenter une fonction doublement périodique par un quotient de fonctions entières périodiques. Pour le démontrer véritablement, il lui manquait d'abord le théorème de Weierstrass établissant, comme il le supposait implicitement, que toute fonction méromorphe peut être représentée par un quotient de fonctions entières. Une fois admis cette proposition, il lui aurait fallu démontrer en outre que toute fonction doublement périodique se réduit effectivement à un quotient de fonctions thêta d'ordre k , ce qu'il ne faisait pas. Ces faiblesses, qu'Hermite ne parvint à surmonter qu'une fois assimilés les travaux de Weierstrass, c'est-à-dire après 1880, ont pu l'inciter à rechercher une nouvelle méthode pour exposer la théorie des fonctions elliptiques.

LE MÉMOIRE INÉDIT DE 1849 ET L'INTRODUCTION DES MÉTHODES DE CAUCHY DANS LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES

L'historiographie attribue traditionnellement à Liouville le mérite d'avoir fondé la théorie des fonctions elliptiques sur la théorie des fonctions de variable complexe en y introduisant les méthodes de Cauchy¹³. C. Houzel [1978, p. 22], puis J. Peiffer et J. Lützen, dans les travaux déjà cités, ont fait justice de cette affirmation inexacte. En fait, c'est Hermite et non Liouville qui a construit le premier une théorie des fonctions méromorphes doublement périodiques en partant de la théorie des résidus. Ce travail a fait l'objet d'une *Note sur les fonctions elliptiques* présentée à l'Académie des sciences le 19 novembre 1849 et restée depuis inédite. Elle est reproduite ici en annexe¹⁴.

¹³ Voir, par exemple, [Fricke 1913, p. 232], [Whittaker et Watson 1902/1927, p. 462] et [Chandrasekharan 1985, p. 25].

¹⁴ En présentant ce mémoire à l'Académie, Hermite écrivait : « *La théorie des fonctions elliptiques que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie repose principalement sur quelques propositions que M. Cauchy a déduites de la considération des intégrales prises entre des limites imaginaires. [...]* Les recherches présentes montreront une

Avant d'en analyser le contenu, il convient d'examiner comment Hermite a été conduit à élaborer ce travail. Nous avons vu qu'après une assez longue période de silence, il s'était remis très activement aux mathématiques au début de l'année 1847. Décidé à se trouver une situation, peut-être dans la perspective d'un mariage — il épousa l'année suivante Louise Bertrand, la sœur du mathématicien Joseph Bertrand avec qui il était très lié —, il commença alors à passer ses grades universitaires. Mais c'est seulement l'année suivante, profitant indirectement des bouleversements provoqués par la Révolution de 1848, qu'il put trouver une position dans l'enseignement. Il obtint ainsi en juillet 1848 sa nomination comme examinateur d'admission à l'École polytechnique — à laquelle s'ajouta à la fin de l'année une place de répétiteur d'analyse à la même école —, et une suppléance à la chaire de mathématiques du Collège de France que venait d'abandonner Libri (sur cette affaire voir [Belhoste et Lützen 1984, p. 276]).

Depuis 1847, Hermite s'intéressait principalement à des questions d'arithmétique, comme l'attestent plusieurs lettres adressées à Jacobi [1850]. Ses leçons données au Collège de France au cours de l'année universitaire 1848-1849 portèrent précisément sur la théorie des nombres. Confirmé comme suppléant en novembre 1849, il présenta au premier semestre de l'année universitaire 1849-1850 un cours intitulé *Théorie des fonctions elliptiques et Théorie des nombres*, dont les premières leçons reprirent la matière du mémoire qu'il venait de présenter à l'Académie [Darboux 1905, p. 146].

Hermite commençait par esquisser dans ce mémoire sa théorie des fonctions méromorphes doublement périodiques représentées par des quotients de fonctions entières périodiques, théorie qu'il avait fait connaître en 1848 et dont nous avons donné plus haut l'analyse (voir [1848_b] ainsi que [1862, p. 143-148]). Dans la deuxième partie, de loin la plus développée (§§ IV-XIII), il présentait une théorie entièrement nouvelle des fonctions méromorphes doublement périodiques, fondée sur l'application des méthodes de Cauchy. Pour traiter la question sous ce point de vue inédit, il commençait par se donner une représentation géométrique du domaine

nouvelle application de ces principes, et il ne sera peut-être pas sans intérêt de rapprocher les méthodes dues aux illustres fondateurs de la théorie des fonctions elliptiques, de celles dont j'ai trouvé l'origine dans les travaux de M. Cauchy» [Hermite 1849].

d'application des fonctions à double période (§ IV). Il traçait ainsi dans le plan complexe le réseau des périodes correspondant aux «indices de périodicité» a et b de la fonction doublement périodique $F(z)$, supposés linéairement indépendants sur \mathbb{R} , et, notant A et B les points d'affixes a et b , considérait en particulier le parallélogramme des périodes $OABC$. Cette représentation, illustrée par un dessin, constitue, à notre connaissance, le premier exemple de construction explicite d'un réseau périodique dans le plan complexe. Hermite se donnait ensuite dans $OABC$ les pôles de $F(z)$, supposés en nombre fini, et examinait la forme prise par la fonction dans une bande parallèle à OA et ne contenant aucun de ses pôles. Il obtenait ainsi le long d'une droite quelconque contenue dans cette bande, d'équation $z = p + at$ (le point d'affixe p étant sur OB et t étant un paramètre réel), une représentation de $F(z)$ par une série de Fourier dont il entreprenait de déterminer les coefficients A_m .

Procédant à cet effet, selon une méthode devenue classique (voir l'équation (H₁)¹⁵ du § V), à l'intégration de la fonction $F(z)e^{-2mi\pi(z-p)/a}$ le long du parallélogramme $pqrs$ translaté du parallélogramme $OABC$, il appliquait le théorème des résidus. Les intégrales le long de pr et de sq se détruisent et, puisque b est une période de $F(z)$, il reste l'égalité $aA_m(1-q^{-2m}) = 2i\pi\Delta$, où Δ est la somme des résidus (ou résidu intégral) de $F(z)e^{-2mi\pi(z-p)/a}$ à l'intérieur de $pqrs$. Dans le cas correspondant à $m = 0$, où la fonction à intégrer est $F(z)$ elle-même, les intégrales le long de pq et de rs se détruisent également et le résidu intégral Δ s'annule. Ce théorème important, parfois attribué à tort à Liouville, est énoncé par Hermite dans le § VII de son mémoire. Nous l'appellerons dans la suite le théorème d'Hermite.

Pour calculer Δ dans le cas général (§ V), Hermite recherchait la valeur du résidu de la fonction pour chaque pôle z contenu dans $pqrs$. Il obtenait ainsi une expression de la forme $\frac{1}{k!}\varphi_k(m)e^{-2mi\pi(z-p)/a}$, où φ_k est un certain polynôme de degré k . La sommation de ces expressions étendue à tous les pôles contenus dans $pqrs$ donne évidemment Δ . En outre, si l'on note avec Hermite Δ_m , pour $m \neq 0$, le résidu intégral de $F(z)e^{-2mi\pi z/a}$ relatif à $pqrs$, $F(z)$ peut s'écrire $A_0 + \frac{2i\pi}{a} \sum' \frac{\Delta_m}{1-q^{-2m}} e^{2mi\pi z/a}$ dans la bande considérée, le symbole \sum' de Weierstrass désignant la sommation

¹⁵ Le symbole (H _{n}) désignera le numéro (n) donné par Hermite dans son mémoire.

depuis $m = -\infty$ jusqu'à $m = +\infty$ à l'exclusion de $m = 0$.

Nous avons considéré jusqu'à présent une bande quelconque parallèle à OA et dans laquelle $F(z)$ est entière. Hermite étudiait comment se transforme l'expression de $F(z)$ quand on passe d'une bande à une autre (§ VI). Pour cela, il ordonnait les pôles de $F(z)$ contenus dans $OABC$, notés z_1, z_2, \dots, z_n , selon la distance à O de leurs projections sur OB parallèlement à OA et obtenait alors n expressions distinctes de $F(z)$ dans $OABC$, chacune définie dans une bande comprise entre deux pôles consécutifs z_μ et $z_{\mu+1}$. En ordonnant de même les pôles de $F(z)$ contenus dans $OABC$, notés z'_1, z'_2, \dots, z'_n , selon la distance à O de leurs projections parallèlement à OB sur OA , il obtenait n nouvelles expressions distinctes de $F(z)$ dans $OABC$, définie chacune dans une bande comprise entre deux pôles consécutifs z'_μ et $z'_{\mu+1}$. Dans le parallélogramme formé par l'intersection de deux bandes parallèles respectivement à OA et OB , la fonction $F(z)$ prend alors deux formes entièrement distinctes selon la bande que l'on considère.

Parvenu à ce stade de son étude, Hermite introduisait (§ VII) la nouvelle fonction $\theta(z)$, de période a , définie par la série $\sum' \frac{1}{1 - q^{-2m}} e^{2mi\pi(z-b)/a}$ (on prendra garde que cette fonction, en dépit de la notation, n'est pas une fonction thêta), dont il démontrait la convergence (uniforme) à l'intérieur de la bande comprise entre OA et BC (§ VIII). Δ_m peut s'exprimer au moyen de $\theta(z)$ et de ses dérivées successives, ce qui fournit pour $F(z)$, en supposant tous les pôles simples et en notant ses résidus r_k , une expression de la forme

$$A_0 + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_1 \theta(z - z_1) + r_2 \theta(z - z_2) + \dots + r_\mu \theta(z - z_\mu) \right. \\ \left. + r_{\mu+1} \theta(z + b - z_{\mu+1}) + \dots + r_n \theta(z + b - z_n) \right\}$$

dans la bande parallèle à OA et comprise entre deux pôles consécutifs z_μ et $z_{\mu+1}$. On a en outre $r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0$ conformément au théorème d'Hermite.

Hermite examinait ce que devient l'expression analytique obtenue pour $F(z)$ quand z passe de la bande comprise entre z_μ et $z_{\mu+1}$ à la bande contiguë comprise entre $z_{\mu+1}$ et $z_{\mu+2}$. Il montrait que la différence entre les deux constantes A_0 et A'_0 entrant dans les expressions correspondantes est égale à $\frac{2i\pi}{a} r_{\mu+1}$, où $r_{\mu+1}$ est le résidu de F en $z_{\mu+1}$, si bien qu'il suffit

pour obtenir l'expression de $F(z)$ dans la nouvelle bande de substituer $\theta(z - z_{\mu+1}) - 1$ à $\theta(z + b - z_{\mu+1})$ dans l'expression de la fonction donnée dans la bande initiale. Remarquant en outre que $\theta(z + b - z_{\mu+1})$ n'est pas définie lorsque z est dans la nouvelle bande (car l'argument $z + b - z_{\mu+1}$ sort alors de la bande comprise entre OA et BC), il prolongeait θ en posant *a priori* l'égalité $\theta(z + b) = \theta(z) - 1$, de manière que l'expression de $F(z)$ ait une forme identique dans les deux bandes contiguës et, plus généralement, dans toutes les bandes parallèles à OA et comprises entre deux pôles consécutifs. Hermite obtenait ainsi pour la fonction doublement périodique $F(z)$ la formule de décomposition

$$A_0 + \frac{2i\pi}{a} \{r_1\theta(z - z_1) + r_2\theta(z - z_2) + \cdots + r_n\theta(z - z_n)\},$$

dans le cas où les pôles sont simples (formule (H₂)). Cette formule, qu'il généralisait aussitôt au cas de pôles multiples (formule (H₃)), est l'analogue de la formule de décomposition en éléments simples d'une fraction rationnelle (§ X). Elle met en évidence la double périodicité de F : la première période est en effet égale à la période a de θ , et la deuxième période b se déduit immédiatement de l'équation caractéristique $\theta(z + b) = \theta(z) - 1$ en utilisant le théorème d'Hermite.

La définition de la fonction θ restait cependant incomplète, dans la mesure où elle laissait sa valeur indéterminée sur toutes les droites passant par un point du réseau et parallèles à OA . En procédant exactement comme il l'avait fait dans le § VI pour la fonction F , Hermite parvenait à une nouvelle expression de θ , partout définie à l'exception cette fois des droites passant par un point du réseau et parallèles à OB (§ XI). Prenant en compte le fait que les deux développements représentant θ deviennent infinis en 0 et en b , il lui attribuait enfin une valeur infinie aux points du réseau. La fonction ainsi construite est une fonction méromorphe dans tout le plan, et ses pôles sont les points du réseau.

Arrivé à ce point, Hermite reprenait le chemin parcouru en sens inverse. Il montrait qu'une fonction méromorphe θ dont les pôles sont aux points d'un réseau de base (a, b) et qui satisfait les deux équations $\theta(z + a) = \theta(z)$ et $\theta(z + b) = \theta(z) - 1$, est déterminée à une constante près et qu'elle peut être représentée sous la forme des deux développements étudiés précédemment. En posant la condition supplémentaire $\theta\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$, ce qui revient à annuler la constante, Hermite obtenait ainsi pour la

fonction θ une définition fondée sur ses propriétés les plus générales. Les formes prises par les développements de θ dépendent cependant du choix de la base (a, b) du réseau. Cette circonstance amenait Hermite à rechercher «*les formes en nombre infini dont l'expression de la transcendante est susceptible*», c'est-à-dire à étudier comment se transforment ces développements lorsque change la base du réseau (transformations unimodulaires, qui substituent à la base (a, b) des bases $(ma + nb, pa + qb)$, où m, n, p et q sont des entiers tels que $mq - np = \pm 1$).

Sa méthode consistait à associer à chaque transformation unimodulaire une transformation de la fonction θ d'origine en une autre fonction θ relative à la nouvelle base. Hermite appliquait d'abord la méthode au cas particulier où la transformation permute a et b , afin de déduire directement la deuxième forme du développement de θ de sa première forme (§ XI), puis il traitait le cas général d'une transformation unimodulaire et étudiait comment se transforme la bande dans laquelle le développement reste convergent, donnant en particulier un minimum pour la plus grande largeur possible de la bande transformée (§ XII). Il annonçait en passant son intention d'étendre cette étude des transformées de θ à des transformations quelconques d'ordre n (voir à ce propos [Hermite 1858]), et de donner à cette occasion la démonstration, déjà annoncée en 1847 dans une lettre à Jacobi, du théorème de Galois relatif à l'abaissement du degré des équations modulaires au degré immédiatement inférieur pour les transformations d'ordre 5, 7 et 11 (voir [1850, p. 135] et [1859]).

Hermite terminait son mémoire en étudiant les propriétés de la dérivée de $\theta(z)$, qu'il notait $\varphi(z)$. Il déduisait immédiatement de la formule (H₃) que cette fonction est une fonction doublement périodique ayant des pôles doubles aux points du réseau. Comme il le remarquait, c'est même la plus simple des fonctions doublement périodiques, une telle fonction ne pouvant avoir un unique pôle simple dans un parallélogramme des périodes à cause du théorème d'Hermite. (Liouville avait déjà démontré cette proposition par une autre voie.) Elle satisfait d'ailleurs l'équation différentielle

$$\varphi'^2(z) = \frac{8i\pi}{a} \left(\varphi\left(\frac{a}{2}\right) - \varphi(z) \right) \left(\varphi\left(\frac{b}{2}\right) - \varphi(z) \right) \left(\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varphi(z) \right).$$

La fonction φ est, à une constante près, proportionnelle à la fonction \wp

de Weierstrass¹⁶. En 1854, dans le contexte de recherches algébriques sur les formes quartiques, Hermite obtint la réduction de l'intégrale elliptique de première espèce à la forme normale de Weierstrass [1854, p. 359–360], dont la fonction inverse est proportionnelle à \wp . Néanmoins, fidèle aux fonctions elliptiques de Jacobi, il ne chercha jamais, comme le fit Weierstrass, à tirer directement de la fonction φ (ou \wp) une théorie des fonctions elliptiques.

La réception des idées d'Hermite

Le mémoire d'Hermite fut soumis à l'examen d'une commission de l'Académie composée de Sturm et de Cauchy, celui-ci rapporteur. Cauchy tarda comme à son habitude à rendre son rapport. Lui-même ne s'était guère intéressé auparavant aux fonctions elliptiques (voir [Gray 1992]). Sa principale contribution dans ce domaine portait en fait sur les intégrales elliptiques dont il avait cherché à élucider le caractère multiforme au moyen de sa théorie de l'intégrale complexe [Cauchy 1846]. Dans le cadre de ses recherches sur les fonctions algébriques publiées au dernier trimestre de 1850 et présentées¹⁷ à l'Académie le 13 janvier 1851, Puiseux avait développé le point de vue adopté par Cauchy. Il y montrait en particulier comment la valeur de l'intégrale elliptique dépend du chemin d'intégration et il retrouvait ainsi les périodes de la fonction inverse [Puiseux 1850, p. 452–461]. Cauchy rendit un rapport très élogieux sur ce travail le 25 février 1851. Probablement sollicité par Hermite pour l'examen de son mémoire, dont la présentation était bien antérieure à celle du mémoire de Puiseux, il rendit enfin son rapport, évidemment favorable, le 31 mars 1851 [Cauchy 1851].

Cauchy y donnait un excellent résumé du mémoire d'Hermite, n'hésitant pas, selon une méthode qui lui était d'ailleurs coutumière, à en traduire les principaux résultats dans son propre système de notations, beaucoup plus synthétique. Il mettait ainsi en évidence le théorème d'Hermite,

¹⁶ On vérifie en effet facilement l'égalité $\zeta(z) = \frac{2i\pi}{a}\theta(z) + \frac{2\eta z}{a} - \frac{2i\pi}{a}$, avec $\eta = \zeta(\frac{a}{2})$, la constante $-2i\pi/a$ étant déterminée par la condition $\theta(\frac{a+b}{2}) = 0$. On en déduit l'égalité $\wp(z) = -\frac{2i\pi}{a}\varphi(z) - \frac{2\eta}{a}$.

¹⁷ La première partie de ces recherches avait été présentée à l'Académie dès le 18 février 1850 sous le titre « Sur les racines des équations considérées comme fonctions d'un paramètre variable ».

qu'il écrivait $\mathfrak{E}[F(\zeta)] = 0$, ($\mathfrak{E}[F(\zeta)]$ désignant le résidu intégral relatif à un parallélogramme des périodes), et il représentait les formules de décomposition en éléments simples (H_2) et (H_3) du mémoire sous la forme plus concise

$$F(z) = A_0 + \frac{2i\pi}{a} \mathfrak{E} \theta(z + b - \zeta) [F(\zeta)],$$

($\mathfrak{E} \theta(z + b - \zeta) [F(\zeta)]$ désignant, pour z donné, la somme des résidus de $\theta(z + b - \zeta) F(\zeta)$ aux pôles de $F(\zeta)$ dans le parallélogramme des périodes $OABC$). Il mentionnait enfin que la formule de décomposition fournit un moyen¹⁸ de réduire toute fonction doublement périodique à une fonction rationnelle des fonctions elliptiques $\varphi(z)$ et $\varphi'(z)$. Curieusement, ce résultat fondamental n'est pas dans le manuscrit conservé du mémoire.

Le rapport de Cauchy fut l'occasion d'une réclamation de Liouville qui rappela l'antériorité de ses propres recherches et déposa avant la fin de la séance une copie du manuscrit de ses leçons rédigées par Borchardt en 1847. Une note ajoutée pour l'impression du rapport aux *Comptes rendus*, précisait que «*déjà en 1844, M. Liouville a obtenu, par une méthode très différente de celle qu'a suivie M. Hermite, et avait énoncé, en présence de ce dernier, la réduction ici indiquée*», c'est-à-dire la réduction des fonctions doublement périodiques à des fonctions rationnelles de fonctions elliptiques. Cette réclamation provoqua en outre une querelle de priorité entre Liouville et Cauchy sur la découverte du *principium* et du théorème de Liouville, pour laquelle nous renvoyons à l'analyse donnée par J. Lützen [1990, p. 172–173].

Cauchy avait demandé dans son rapport la publication du mémoire dans le recueil des *Mémoires des savants étrangers*, mais la réclamation de Liouville mettait Hermite dans une position délicate : pouvait-il donner son mémoire à l'impression avant que Liouville ait publié ses propres recherches ? Une indication dans le manuscrit du mémoire révèle qu'Hermite en prépara effectivement l'impression. On peut supposer qu'il supprima à cette occasion la démonstration de la réduction des fonc-

¹⁸ La démonstration utilisait probablement la formule d'addition pour $\theta(z)$, qui peut se déduire elle-même de la formule de décomposition en éléments simples, ainsi que le théorème d'Hermite. En revanche, elle n'exige pas de connaître le *principium* de Liouville. Voir par exemple [Tannery et Molk 1893–1902, t. 2, p. 79–80].

tions doublement périodiques aux fonctions elliptiques dont la mention par Cauchy avait suscité la réclamation de Liouville. En fin de compte, Hermite renonça à publier son mémoire ; quant à Liouville, il abandonna pour une raison inconnue l'impression du manuscrit de Borchardt (voir [Peiffer 1983] et [Lützen 1990, p. 557]), si bien que les résultats fondamentaux obtenus par les deux mathématiciens restèrent inédits jusqu'à la parution du traité de Briot et Bouquet en 1859.

L'ouvrage didactique de Briot et Bouquet [1859] constitue une synthèse originale des travaux de Cauchy, de Liouville et d'Hermite, complétée par leurs propres recherches. Selon un parti inauguré par Hermite, l'étude des fonctions doublement périodiques y était replacée dans le cadre « naturel » de la théorie des fonctions d'une variable complexe, à laquelle était consacrée la première partie de l'ouvrage. Les propriétés générales des fonctions doublement périodiques faisaient l'objet d'un chapitre spécifique dans lequel étaient réunis des théorèmes découverts par Liouville et par Hermite. Le premier était le théorème d'Hermite sur le résidu intégral relatif au parallélogramme des périodes. « *Ce théorème remarquable, duquel on déduit avec une grande facilité les plus importantes propriétés des fonctions doublement périodiques, a été aperçu pour la première fois par M. Hermite* », indiquaient les auteurs [1859, p. 81]. Le huitième et avant-dernier théorème donnait la réduction des fonctions doublement périodiques aux fonctions elliptiques, les auteurs précisant que « *cette proposition très importante est due à M. Liouville* » [1859, p. 93]. Le traité de Briot et Bouquet contenait une foule de résultats, mais il ne donnait ni la représentation d'une fonction méromorphe doublement périodique par un quotient de fonctions entières périodiques, ni la formule de décomposition en éléments simples, qui avaient servi de base aux travaux d'Hermite.

LES EXPOSÉS GLOBAUX DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES ET L'ENSEIGNEMENT (1862–1891)

Comme on l'a vu, Hermite avait donné dès 1849–1850 un cours au Collège de France sur les fonctions elliptiques, dans lequel il développait une méthode d'exposition de la théorie entièrement nouvelle. Mais

l'élection de Liouville à la chaire de mathématiques en novembre 1850 interrompit son enseignement. Ayant renoncé également à son poste de répétiteur d'analyse à l'École polytechnique en novembre 1853, il dut se contenter au cours des années suivantes, très fructueuses sur le plan mathématique, de la modeste place d'examineur d'admission à l'École polytechnique. Hermite, devenu un mathématicien reconnu, membre de l'Académie des sciences depuis 1856, aurait désiré une chaire pour y exposer ses travaux [Darboux 1905, p. 146]. Il n'obtint qu'un poste de maître de conférences à l'École normale supérieure, créé pour lui en 1862 à l'initiative de Pasteur et qu'il occupa jusqu'en 1869. La même année, il devenait examinateur des élèves à l'École polytechnique.

La «Note sur la théorie des fonctions elliptiques» de 1862

C'est peut-être pour justifier sa nomination à l'École normale qu'il donna en 1862 une «Note sur la théorie des fonctions elliptiques» en annexe à la sixième édition du *Traité élémentaire du calcul différentiel et intégral* de Lacroix [Hermite 1862]. Il manquait à cette présentation, publiée trois ans après le traité de Briot et Bouquet, l'allure à la fois progressive et systématique qui doit caractériser un ouvrage d'enseignement. En revanche, considérant la théorie sous plusieurs points de vue différents, Hermite y faisait connaître des méthodes et des principes originaux, pour la plupart déjà présents dans ses travaux des années 1840, mais qui étaient restés depuis presque entièrement inédits. La note offrait ainsi une remarquable introduction aux mémoires spéciaux d'Hermite sur la théorie de la transformation et les fonctions modulaires.

L'étude s'ouvrait par des considérations générales sur la place des fonctions doublement périodiques et des fonctions elliptiques dans la classification des fonctions rencontrées en analyse. Hermite rapprochait les fonctions elliptiques d'abord des fractions rationnelles, puis des fonctions exponentielle et circulaires avec lesquelles elles partagent la propriété d'avoir un théorème d'addition algébrique. En outre, comme les fonctions circulaires, les fonctions elliptiques se caractérisent par l'existence de périodes. Après avoir démontré par la méthode de Jacobi l'impossibilité d'une fonction à plus de deux périodes linéairement indépendantes sur \mathbb{R} , Hermite comparait les fonctions circulaires, simplement périodiques, et les fonctions doublement périodiques en utilisant des développements

en produits infinis. Le *principium* de Liouville lui permettait de rendre compte des différences qui apparaissent alors entre le cas périodique (fonctions analytiques entières) et le cas doublement périodique (fonctions méromorphes) et le conduisait à représenter les fonctions doublement périodiques par des quotients de fonctions entières périodiques, et particulièrement les fonctions elliptiques de Jacobi par des quotients de fonctions thêta. Il utilisait à cette occasion non seulement les deux fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ données dans les *Fundamenta nova*, mais aussi les fonctions $\Theta_1(x) = \Theta(x + K)$ et $H_1(x) = H(x + K)$, introduites par Jacobi en 1849 (voir [Jacobi 1849, p. 293]).

«Rien n'est plus important ni plus digne d'intérêt que l'étude attentive des procédés par lesquels, en partant des notions antérieurement acquises, on parvient à la connaissance d'une fonction nouvelle qui devient l'origine d'un nouvel ordre de notions analytiques, et un traité complet sur le sujet qui nous occupe ne devrait omettre aucune des méthodes découvertes et suivies à l'égard des fonctions $\Theta(x)$ et $H(x)$ » écrivait à ce propos Hermite [1862, p. 139]. Mais, dans les faits, il se limitait à deux méthodes, la première consistant à représenter $\Theta(x)$ sous la forme d'un produit infini, et la deuxième, beaucoup plus générale, reproduisant l'analyse donnée en 1848 et en 1849 sur la représentation d'une fonction doublement périodique par un quotient de deux fonctions thêta de même ordre.

Hermite retrouvait les différentes formes que peuvent prendre les fonctions Θ , H , Θ_1 et H_1 , et étudiait leurs propriétés, ainsi que celles des fonctions $\operatorname{sn} x$, $\operatorname{cn} x$ et $\operatorname{dn} x$ (définies par leur intermédiaire), à l'aide de son principe de décomposition des fonctions thêta d'ordre quelconque, déjà utilisé dans sa lettre de 1844 (voir *supra*) mais énoncé ici explicitement pour la première fois (au moins dans le cas des fonctions d'ordre 2 et 4). Il obtenait par ce moyen quelques-unes des propriétés des modules k et k' considérés comme fonctions de q , l'exposé servant d'introduction à l'étude de ses travaux sur les fonctions modulaires (voir [1858] et [1859]), ainsi que les équations différentielles satisfaites par les fonctions elliptiques de Jacobi, ce qui lui permettait de traiter le problème de l'inversion¹⁹

¹⁹ Le problème de l'inversion est traité de manière plus complète par Hermite dans la réédition de sa note, publiée en 1894 en annexe au cours de Serret [Hermite 1862/1894, p. 798–803].

pour l'intégrale de première espèce dans le cas d'un module réel compris entre 0 et 1. Il donnait également la démonstration du théorème d'addition d'Abel, déjà esquissée dans la lettre à Jacobi de 1844. Hermite étudiait ensuite les fonctions de seconde et de troisième espèces $Z(x)$ et $\Pi(x, a)$ introduites par Jacobi et donnait leur expression à l'aide des fonctions thêta.

La note s'achevait par la démonstration de la formule de décomposition en éléments simples d'une fonction méromorphe doublement périodique. La méthode était celle même utilisée en 1849, mais Hermite tirait parti de l'égalité $\frac{2i\pi}{a} \theta\left(z - \frac{b}{2}\right) = \frac{\Theta'(z)}{\Theta(z)}$, obtenue en posant $a = 2K$ et $b = 2iK'$, pour se ramener aux fonctions thêta et en déduire, sans avoir à supposer *a priori* l'égalité $\theta(z + b) = \theta(z) - 1$ (il invoquait plutôt les propriétés de quasi-périodicité de $Z(x)$), une formule applicable à toutes les valeurs de l'argument. Il obtenait par exemple, dans le cas de n pôles simples z_i dans le parallélogramme des périodes, la formule

$$F(z) = A_0 + r_1 \frac{H'(z - z_1)}{H(z - z_1)} + r_2 \frac{H'(z - z_2)}{H(z - z_2)} + \dots + r_n \frac{H'(z - z_n)}{H(z - z_n)}.$$

En appliquant la formule de décomposition à la dérivée logarithmique, il montrait enfin que la somme des zéros de $F(z)$ est égale dans le parallélogramme des périodes à celle de ses pôles *modulo* une période, théorème important déjà donné par Liouville.

Les leçons à l'École polytechnique et à la Sorbonne

Hermite ne retrouva un enseignement magistral qu'en 1869. Il succéda cette année-là à Duhamel à la fois dans la chaire d'analyse de l'École polytechnique et dans celle d'algèbre supérieure de la Faculté des sciences de Paris (comme suppléant puis comme titulaire l'année suivante). Dans ces deux cours, il accorda aussitôt une grande importance à l'exposition de la théorie des fonctions elliptiques, qu'il affectionnait tant. L'étude de cette théorie n'était pas comprise dans les programmes officiels d'analyse de l'École polytechnique, et c'est donc de sa propre autorité qu'Hermite l'introduisit dans son cours de deuxième année, imité aussitôt par son collègue et beau-frère Joseph Bertrand. Elle y occupa une place grandissante, passant de quatre leçons en 1868–1869 à neuf leçons en 1874–1875. Le Conseil de perfectionnement de l'École ayant entériné l'initiative d'Hermite, l'étude des fonctions elliptiques et

de leurs applications à la mécanique s'imposa dans le cours d'analyse de deuxième année jusqu'en 1909 (voir [Gispert 1994]). De son enseignement à l'École polytechnique, Hermite n'a publié que le cours de première année [1873]. Il existe cependant sous forme de feuilles lithographiées deux rédactions par des élèves de son cours de deuxième année, malheureusement entachées de nombreuses coquilles et inexactitudes ([1868–1869] et [1874–1875]).

À la Sorbonne, Hermite n'était contraint par aucun programme et il consacra d'abord toutes ses leçons à des questions d'algèbre supérieure ainsi qu'à la théorie des fonctions elliptiques [Dugac 1984, p. 169]²⁰. À partir de 1872, il s'associa avec Bouquet, qui était titulaire de la chaire de calcul différentiel et intégral, pour donner un cours complet d'analyse. Accaparé par cette tâche, il démissionna en 1876 de sa chaire de Polytechnique, où il fut remplacé par Jordan. Hermite entreprit en 1882 de publier sous forme lithographiée ses leçons à la Sorbonne que la majorité des auditeurs ne parvenait pas à suivre, en s'inspirant de l'exemple de l'École polytechnique [1882]. La rédaction fut assurée par H. Andoyer, chef de section de l'École normale supérieure, et sa publication confiée à un jeune libraire, Hermann²¹. Quatre éditions de ce cours, corrigées et augmentées, se succédèrent entre 1882 et 1891.

S'il existe des différences dans la manière de traiter les fonctions elliptiques entre les deux rédactions du cours de l'École polytechnique et celles, plus tardives, du cours de la Sorbonne, une structure commune se dégage de leur comparaison²². Dans les deux cas, les leçons sur les fonctions elliptiques s'intégraient dans un exposé plus général de la théorie des fonctions d'une variable complexe, uniformes et non uniformes. Hermite étudiait d'abord les intégrales elliptiques et leurs déterminations dans le cadre des fonctions non uniformes, sans dépasser d'ailleurs le point de vue de

²⁰ Il existe à l'Institut Mittag-Leffler de Djursholm près de Stockholm, une rédaction par G. Mittag-Leffler d'un cours d'Hermite sur les fonctions elliptiques, donné vraisemblablement à la Sorbonne en 1873, que nous n'avons pu consulter (d'après Dugac [1984, p. 234]).

²¹ Sur les conditions de publication de ce cours, voir [Dugac 1984, p. 153–154].

²² Hermite faisait évoluer son cours en permanence (voir [Dugac 1985, lettres du 6 octobre 1884, p. 95, et du 17 mars 1891, p. 196]). Mais dans sa lettre du 23 mai 1891, un peu désabusé, il avouait à Mittag-Leffler : « *comme il y a vingt ans, quand vous étiez encore étudiant, je fais mes leçons, toujours à peu près les mêmes, recueillant de ça de là de minimes détails* » [Dugac 1985, p. 198].

Cauchy et Puiseux et en ignorant celui de Riemann, puis il introduisait les fonctions elliptiques par l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce. Fidèle aux conceptions de Jacobi, dont il conservait la plupart des notations, Hermite faisait reposer la théorie des fonctions elliptiques sur celle des fonctions thêta, tout en adoptant les méthodes de Cauchy comme outils de démonstration. L'exposé en était cependant organisé de manière originale autour de deux résultats fondamentaux connus d'Hermite depuis les années 1840 : la représentation d'une fonction thêta d'ordre quelconque par une combinaison linéaire de fonctions thêta élémentaires (principe d'Hermite) et la décomposition d'une fonction doublement périodique en éléments simples.

Par rapport à ce schéma général, les leçons données en 1868–1869 restent encore assez sommaires. Hermite y étudiait d'abord les propriétés des fonctions Θ , H , Θ_1 et H_1 , représentées par des séries trigonométriques en sinus et cosinus, puis il construisait les trois fonctions

$$u(x) = \frac{\Theta_1(0)}{H(K)} \frac{H(x)}{\Theta(x)}, \quad v(x) = \frac{\Theta(0)}{H(K)} \frac{H_1(x)}{\Theta(x)} \quad \text{et} \quad w(x) = \frac{\Theta(0)}{\Theta_1(0)} \frac{\Theta_1(x)}{\Theta(x)},$$

qu'il utilisait comme éléments simples pour décomposer des fonctions doublement périodiques. Par exemple, pour une fonction $F(x)$ de périodes $2K$ et $2iK'$ ayant des pôles simples α_i dans un parallélogramme des périodes, il obtenait en égalant à 0 le résidu intégral de $F(z) \frac{u(x-z)}{u(z)}$ relatif au parallélogramme des périodes (théorème d'Hermite), une expression de la forme

$$F(x - iK') = F(0) + \sum_i A_i \frac{u(x - \alpha_i)}{u(x)u(\alpha_i)}.$$

En appliquant ces formules de décomposition à vw , uw et uv et en posant $\sqrt{k} = \frac{H(K)}{\Theta_1(0)}$, il parvenait aux équations $v^2 = 1 - u^2$, $w^2 = 1 - k^2u^2$, $u' = vw$, qui montrent que u , v et w s'identifient aux fonctions elliptiques sn , cn et dn définies, pour cette valeur du module, par l'inversion de l'intégrale de première espèce.

Dans les leçons données à l'École polytechnique en 1874–1875 comme dans le cours de la Faculté des sciences de Paris, le point de départ d'Hermite était l'étude des fonctions thêta d'ordre k

$$\Pi(x) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} A_m Q^{m^2/k} e^{2mi\pi x/a},$$

où $A_{m+k} = A_m$, $Q = e^{i\pi b/a}$ et $\text{Im}(b/a) > 0$, et de leurs quotients, qui

sont des fonctions doublement périodiques. On retrouve ainsi le point de vue adopté par Hermite dès les années 1840, mais, alors que dans ses premiers travaux, la représentation des fonctions méromorphes doublement périodiques par de tels quotients résultait d'une simple induction, dans ses leçons données à la Sorbonne il en donnait de véritables démonstrations.

Laissant pour l'instant de côté celle qu'il exposait dans la rédaction de 1882, voyons le principe de la démonstration adoptée à partir de l'édition de 1887. Il commençait par se donner une fonction thêta $\Pi(x)$ d'ordre k s'annulant aux pôles d'une fonction doublement périodique $F(x)$ donnée d'ordre $k - 1$ (les zéros de $\Pi(x)$ et les pôles correspondants de $F(x)$ ayant même multiplicité), ce qui est toujours possible en choisissant convenablement les coefficients A_m . Il montrait alors que la fonction $\Pi(x)F(x)$ est une fonction thêta de même ordre que $\Pi(x)$ et que, par conséquent, $F(x)$ peut être représentée par un quotient de deux fonctions thêta d'ordre k . Hermite considérait plus particulièrement la fonction thêta du premier ordre $\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} Q^{m^2} e^{2mi\pi x/a}$, qu'il notait $X(x)$ dans son cours de la Sorbonne.

Cette fonction, qui se réduit à $\Theta_1(x)$ dans le cas où $a = 2K$ et $b = 2iK'$, lui servait d'élément fondamental pour l'expression des fonctions doublement périodiques. Considérant pour cela une fonction méromorphe $f(x)$ de périodes (a, b) , de zéros α_j (d'ordre m_j) et de pôles β_i (d'ordre n_i) dans le parallélogramme des périodes et posant $Z(x) = \frac{X'(x+c)}{X(x+c)}$ où $c = \frac{a+b}{2}$, il intégrait par la méthode des résidus la fonction $f(z)Z(x-z)$ le long du parallélogramme des périodes. Il obtenait ainsi la formule de décomposition en éléments simples $f(x) = C + \sum_i \sum_{j=1}^{j=n_i} A_{ij} Z^{(j)}(x - \beta_i)$, semblable à celle donnée en 1849, la fonction $Z(x)$ s'identifiant à $\frac{2i\pi}{a}\theta(x)$.

L'application de cette formule à la dérivée logarithmique de $f(x)$ lui donnait une nouvelle expression de la forme

$$f(x - c) = \mu \frac{X(x - \alpha_1)X(x - \alpha_2) \cdots X(x - \alpha_r)X(x - \Sigma\alpha_j)}{X(x - \beta_1)X(x - \beta_2) \cdots X(x - \beta_s)X(x - \Sigma\beta_i)},$$

chaque zéro et chaque pôle se trouvant ici reproduit autant de fois que son ordre²³. C'est au moyen de cette formule qu'Hermite démontrait dans

²³ Cette expression révèle l'analogie existant entre la fonction X d'Hermite et la fonction σ de Weierstrass. Le théorème de Mittag-Leffler appliqué à $Z(x)$ permet-

la première édition de son cours à la Sorbonne la représentation par quotient d'une fonction doublement périodique quelconque. Il obtenait par des méthodes identiques une formule de décomposition pour les fonctions doublement périodiques de seconde espèce, c'est-à-dire les fonctions méromorphes satisfaisant les relations fonctionnelles $f(z+a) = \mu f(z)$ et $f(z+b) = \mu' f(z)$, où μ et μ' sont des facteurs constants²⁴.

Hermite considérait ensuite la fonction thêta du deuxième ordre qui se réduit, en posant $a = 4K$, $b = 2iK'$ et $Q = q^{1/2}$, à $A_0\Theta_1(x) + A_1H_1(x)$, d'où il tirait également la définition des fonctions Θ et H , puis celle des fonctions elliptiques de Jacobi, pour toutes les valeurs complexes de K et de K' . En appliquant la formule de décomposition des fonctions doublement périodiques de seconde espèce aux fonctions $\operatorname{cn} x \operatorname{dn} x$, $\operatorname{sn} x \operatorname{dn} x$ et $\operatorname{sn} x \operatorname{cn} x$ (dont les facteurs μ et μ' sont respectivement -1 et $+1$, -1 et -1 , $+1$ et -1), il montrait que $\operatorname{sn} x$ est solution de l'équation différentielle²⁵

$$z' = \omega \sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}$$

où $\omega = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sn} x}{x}$ et $\sqrt{k} = \frac{H_1(0)}{\Theta_1(0)}$, ce qui lui donnait ensuite facilement la solution du problème de l'inversion pour k réel compris entre 0 et 1. Le mode de définition adopté par Hermite pour K et K' explique la présence du facteur²⁶ ω . Par des procédés identiques, Hermite déduisait le théorème d'addition pour les fonctions elliptiques de Jacobi et pour la fonction $Z(x)$. Hermite terminait ses leçons à la Sorbonne en traitant le problème de l'inversion pour une valeur quelconque du module k . La méthode que nous ne détaillerons pas ici, était fondée sur la considération du sous-groupe

tait à Hermite de décomposer $X(x)$ en facteurs primaires. Il obtenait ainsi l'expression $X(x-c) = Ae^{\alpha x^2 + \beta} + x \prod' [(1-x/p)e^{x/p+x^2/2p^2}]$ où α et β sont des constantes et où p représente les points du réseau $ma + nb$ (le symbole de Weierstrass \prod' désigne un produit infini portant sur p à l'exclusion de l'origine). Remarquons que cette expression ne diffère de $\sigma(x)$ que de $Ae^{\alpha x^2 + \beta}$.

²⁴ Hermite avait introduit les fonctions doublement périodiques de seconde espèce dans un important mémoire sur les applications des fonctions elliptiques à la mécanique [1877-1882].

²⁵ Dans ses leçons données à l'École polytechnique en 1874-1875, Hermite parvenait au même résultat en utilisant simplement la formule de décomposition pour les fonctions doublement périodiques (de première espèce).

²⁶ Dans la notation de Weierstrass, ω est égal à $\sqrt{e_1 - e_3}$. Pour passer de la définition des fonctions de Jacobi selon Hermite à celle selon Weierstrass, il suffit de substituer à l'argument x l'argument $\sqrt{e_1 - e_3} x$.

unimodulaire des transformations «*de type principal*» engendré par $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Bien que le cours d'Hermite à la Sorbonne, largement diffusé, exerçât une grande influence, sa présentation de la théorie des fonctions elliptiques retint assez peu l'attention, à quelques exceptions près (voir par exemple [Tannery et Molk, 1893–1902] et [Hancock, 1910]). Cet oubli, y compris de la part des auteurs français, s'explique évidemment par le succès contemporain de la théorie de Weierstrass. En France, c'est G. Halphen qui introduisit le premier le point de vue de Weierstrass [1886–1888]. Hermite lui-même paraît en avoir pris connaissance à cette occasion. Malgré sa grande admiration pour Weierstrass, il pensait que l'introduction de la fonction elliptique \wp comme élément fondamental était une innovation inutile et il resta fidèle au point de vue et aux notations de Jacobi, la fonction holomorphe $X(x)$ jouant, comme on l'a vu, le rôle d'élément fondamental. Pourtant, même en France, Hermite ne fut pas suivi. Les fameuses *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen* de Schwarz [1885] furent publiées à Paris dès 1894 dans une traduction de H. Padé, avec une dédicace à Hermite. Au cours des années suivantes, toutes les présentations de la théorie des fonctions elliptiques publiées en France, de Tannery et Molk [1893–1902], de Jordan [1883/1894] (le deuxième volume, publié en 1894, est à comparer au volume correspondant de la première édition) et d'Appell et Lacour [1897], adoptèrent la théorie de Weierstrass. Avant même la mort d'Hermite, en 1901, celle-ci s'était imposée comme la théorie standard des fonctions elliptiques.

CONCLUSION

L'œuvre d'Hermite est une contribution majeure au développement de la théorie des fonctions elliptiques. Majeure à un double point de vue. D'une part, Hermite a joué un rôle essentiel dans le tournant des années 1840, en inaugurant avec Liouville l'étude des fonctions méromorphes doublement périodiques et en appliquant le premier à cette étude les méthodes de Cauchy. À cet égard, le mémoire inédit de 1849 que nous publions en annexe fait date dans l'histoire de la théorie. D'autre part, Hermite a contribué de manière sans doute décisive, parallèlement à Weierstrass, au processus d'«*élémentarisation*» de la théorie des fonctions elliptiques. C'est lui qui, le premier, a imposé son étude dans les grands établissements

d'enseignement supérieur français et il a donné, il est vrai après Briot et Bouquet, un des premiers exposés didactiques de la théorie, pour laquelle il fournissait, avec son principe et sa formule de décomposition, des outils d'analyse simples et puissants.

Il nous reste à comprendre pourquoi ce rôle majeur a été largement occulté. Il existe des explications circonstanciées qu'on ne saurait négliger : la concurrence avec Liouville lui interdit longtemps de faire connaître ses recherches ; une certaine marginalisation le tint en outre à l'écart de l'enseignement pendant des années. Par-delà ces explications, l'oubli dans lequel est tombée presque aussitôt la contribution d'Hermite à la théorie des fonctions elliptiques tient au caractère même de son travail. Hermite concevait essentiellement l'analyse comme un outil de calcul. Il restait par là un mathématicien dans la lignée de Jacobi. La confiance absolue dont il fit toujours preuve à l'égard des procédés de l'analyse, fondée sur un solide réalisme mathématique et un sens algébrique exceptionnel, lui rendait assez indifférentes les questions de rigueur et de fondement qui préoccupaient de plus en plus les mathématiciens.

Les fonctions elliptiques l'intéressaient dans la mesure où elles fournissaient des moyens analytiques nouveaux pour traiter de nombreux problèmes, spécialement en arithmétique. Mais s'il améliora très sensiblement l'exposition de la théorie, en mobilisant les méthodes de Cauchy, puis, à la fin de sa vie, celles de Weierstrass, il le fit sans jamais concevoir l'idée de la refonder, car l'œuvre d'Abel et de Jacobi lui paraissait sur ce point indépassable. Par là, il se distinguait radicalement de Briot et Bouquet d'abord, de Riemann et Weierstrass surtout, qui, chacun pour leur part, repensèrent entièrement la théorie des fonctions elliptiques afin de l'intégrer dans une théorie élargie des fonctions de variable complexe. Dès le tournant du siècle, la manière d'Hermite apparaissait dépassée. Mais si la supériorité du point de vue de Weierstrass est incontestable, les méthodes d'exposition adoptées par Hermite se distinguent encore par leur rare élégance.

BIBLIOGRAPHIE

ABEL (N.-H.)

[OC] *Œuvres complètes*, 2 vol., nouvelle édition publiée par L. Sylow et S. Lie, Christiania, 1881.

[1827–1828] Recherches sur les fonctions elliptiques, *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 2 (1827), p. 101–181, et, *Ibid.*, 3 (1828), p. 160–190; OC 1, p. 263–388.

[1828] Solution d'un problème général concernant la transformation des fonctions elliptiques, *Astronomische Nachrichten*, 6 (1828), col. 365–388; OC 1, p. 403–428.

[1829] Précis d'une théorie des fonctions elliptiques, *J. reine angew. Math.*, 4 (1829), p. 236–277, et, *Ibid.*, p. 307–348; OC 1, p. 518–617.

APPELL (P.) et LACOUR (E.)

[1897] *Principes de la théorie des fonctions elliptiques et applications*, Paris : Gauthier-Villars, 1897; 2^e éd., revue par R. Garnier, 1922.

BAILLAUD (B.) et BOURGET (H.) (éd.)

[1905] *Correspondance d'Hermite et de Stieltjes*, 2 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1905.

BELHOSTE (B.)

[1991] *Augustin-Louis Cauchy. A biography*, New York : Springer, 1991.

BELHOSTE (B.) et LÜTZEN (J.)

[1984] Joseph Liouville et le Collège de France, *Revue d'histoire des sciences*, 37 (1984), p. 255–304.

BREZINSKI (C.)

[1990] *Charles Hermite, père de l'analyse mathématique moderne*, Paris : SFHST (Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, n^o 32), 1990.

BRIOT (C.) et BOUQUET (J.-C.)

[1859] *Théorie des fonctions doublement périodiques et, en particulier, des fonctions elliptiques*, Paris, 1859; 2^e éd., *Théorie des fonctions elliptiques*, Paris, 1875.

CAUCHY (A.-L.)

[OC] *Œuvres complètes*, 27 vol. en deux séries, Paris : Gauthier-Villars, 1882–1974.

[1843] Rapport sur un mémoire de M. Laurent qui a pour titre : “Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendantes de la variable x ”, et, Note sur le développement des fonctions en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières des variables, *Comptes rendus des séances hebdomadaires de l'Académie des sciences*, 17 (1843), p. 938–942; OC (I) 8, p. 115–117.

[1844] Mémoire sur quelques propositions fondamentales du calcul des résidus, et sur la théorie des intégrales singulières, *C. R. Acad. sci. Paris*, 19 (1844), p. 1337–1344; OC (I) 8, p. 366–374.

[1846] Considérations nouvelles sur les intégrales définies qui s'étendent à tous les points d'une courbe fermée, et sur celles qui sont prises entre des limites imaginaires, *C. R. Acad. sci. Paris*, 23 (1846), p. 689–702; OC (I) 10, p. 153–168.

- [1851] Rapport sur un mémoire présenté à l'Académie par M. Hermite et relatif aux fonctions à double période, *C. R. Acad. sci. Paris*, 32 (1851), p. 442–454; *OC* (I) 11, p. 363–372; Hermite *Œuvres* 1, p. 75–83.
- CAYLEY (A.)
- [CMP] *The collected mathematical papers of Arthur Cayley*, 13 vol. + index, Cambridge : Cambridge University Press, 1889–1898.
- [1845a] On the inverse elliptic functions, *Cambridge Mathematical Journal*, 4 (1845), p. 257–277; *CMP* 1, p. 136–155.
- [1845b] Mémoire sur les fonctions doublement périodiques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (I) 10 (1845), p. 385–420; *CMP* 1, p. 156–182.
- [1847] On the theory of elliptic functions, *Cambridge and Dublin Mathematical Journal*, 2 (1847), p. 256–266; *CMP* 1, p. 290–300.
- [1876] *An elementary treatise on elliptic functions*, London, 1876; 2^e éd., 1895.
- CHANDRASEKHARAN (K.)
- [1985] *Elliptic functions*, Berlin : Springer, 1985.
- DARBOUX (G.)
- [1905] *Notice historique sur Charles Hermite lue dans la séance publique annuelle du lundi 18 décembre 1905*, Paris : Gauthier-Villars, 1905; reproduite dans *Éloges académiques et discours*, Paris : Hermann, 1912, p. 116–172.
- DIRICHLET (G. P. LEJEUNE)
- [1853] Gedächtnissrede auf Carl Gustav Jacob Jacobi, *Archiv der Mathematik und Physik*, 22 (1853), p.158–182; Jacobi *GW* 1, p. 1–28.
- DUGAC (P.) (éd.)
- [1984] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1874–1883), *Cahier du séminaire d'histoire des mathématiques*, 5 (1984), p. 49–285.
- [1985] Lettres de Charles Hermite à Gösta Mittag-Leffler (1884–1891), *Ibid.*, 6 (1985), p. 79–257.
- EISENSTEIN (G.)
- [MW] *Mathematische Werke*, 2 vol., New York : Chelsea, 1975.
- [1844] Bemerkungen zu den elliptischen und abelschen Transcendenten, *J. reine angew. Math.*, 27 (1844), p. 185–191; *MW* 1, p. 28–34. Trad. fr. (partielle) dans *J. math. pures appl.*, (I) 10 (1845), p. 28–34.
- [1847] Genaue Untersuchungen der unendlichen Producte, aus welchen die elliptische Funktionen als Quotienten zusammengesetzt sind, *J. reine angew. Math.*, 35 (1847), p. 153–274; *MW* 1, p. 357–478.
- FREUDENTHAL (H.)
- [1972] Hermite, Charles, dans *Dictionary of scientific biography* (C. Gillispie éd.), t. 6, 1972, p. 306–308.
- FRICKE (R.)
- [1913] Elliptische Funktionen, *Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, II B3, Leipzig : Teubner, 1913, p. 177–345.
- GISPERT (H.)
- [1994] De Bertrand à Hadamard, quel enseignement d'analyse pour les polytechniciens ?, dans B. Belhoste, A. Dahan Dalmedico et A. Picon (éd.), *La Formation polytechnicienne, 1794–1994*, Paris : Dunod, 1994, p. 181–196.
- GRAY (J.)
- [1992] Cauchy, elliptic and abelian integrals, *Rev. hist. sci.*, 1992, 45 (1992), p. 69–81.

HALPHEN (G.)

[1886–1888] *Traité des fonctions elliptiques et de leurs applications*, 2 vol., Paris, 1886–1888.

HANCOCK (H.)

[1910] *Lectures on the theory of elliptic functions*, vol. 1 (“Analysis”), New York : Wiley, 1910; rééd. New York : Dover, 1958.

HERMITE (C.)

[Œuvres] *Œuvres de Charles Hermite*, 4 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1905–1917.

[1844] Sur la théorie des transcendentes à différentielles algébriques, *C. R. Acad. sci. Paris*, 18 (1844), p. 1133–1148; *J. math. pures appl.*, (I) 9 (1844), p. 353–368; *Œuvres* 1, p. 49–63.

[1845] Principaux théorèmes de l’analyse des fonctions elliptiques, *Mémoires de la Société royale des sciences, lettres et arts de Nancy*, (1845), p. 201–211; *Œuvres* 1, p. 64–70.

[1846] Extraits de deux lettres de M. Charles Hermite à M. Jacobi, *J. reine angew. Math.*, 32 (1846), p. 277–299; Jacobi *GW* 2, p. 87–114; Hermite *Œuvres* 1, p. 10–37.

[1848a] Sur la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques, *Mémoires présentés par divers savants étrangers à l’Académie des sciences*, 10 (1848), p. 563–572; *Œuvres* 1, p. 38–63.

[1848b] Note sur la théorie des fonctions elliptiques, *Camb. and Dublin Math. J.*, 3 (1848), p. 54–56; *Œuvres* 1, p. 71–73.

[1849] Sur la théorie des fonctions elliptiques, *C. R. Acad. sci. Paris*, 29 (1849), p. 594; *Œuvres* 1, p. 74.

[1850] Lettres de M. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres, *J. reine angew. Math.*, 40 (1850), p. 261–315; *Œuvres* 1, p. 100–163.

[1854] Sur la théorie des fonctions homogènes à deux indéterminées, *Camb. and Dublin Math. J.*, 9 (1854), p. 172–217; *J. reine angew. Math.*, 52 (1854), p. 1–38; *Œuvres* 1, p. 351–371.

[1855] Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes, *C. R. Acad. sci. Paris*, 40 (1855), p. 249–254, 304–309, 365–369, 427–431, 485–489, 536–541, 704–707, 784–787; *Œuvres* 1, p. 444–486.

[1858] Sur quelques formules relatives à la transformation des fonctions elliptiques, *J. math. pures appl.*, (II) 3 (1858), p. 26–36; *Œuvres* 1, p. 487–496.

[1859] Sur la théorie des équations modulaires, *C. R. Acad. sci. Paris*, 48 (1859), p. 940–947, 1079–1084, 1095–1102; *Ibid.*, 49 (1859), p. 16–24, 110–118, 141–144; *Œuvres* 2, p. 38–82.

[1862] Note sur la théorie des fonctions elliptiques, dans S.F. Lacroix, *Traité élémentaire du calcul différentiel et du calcul intégral*, 6^e éd., Paris, 1862; *Œuvres* 2, p. 125–238. Rééd. revue et corrigée dans J.A. Serret, *Cours de calcul différentiel et intégral*, 4^e éd., 1894, p. 737–904 [pas dans les *Œuvres* d’Hermite].

[1868–1869] *Résumé du cours d’analyse par M. Hermite, 1^{re} division*, lithographié, rédigé par des élèves de l’École polytechnique, Paris, 1868–1869.

[1873] *Cours d’analyse de l’École polytechnique*, première partie, Paris, 1873.

[1874–1875] *Cours d’analyse, 1^{re} division*, 1874–1875, lithographié, rédigé par des élèves de l’École polytechnique, Paris, 1874–1875.

[1877–1882] Sur quelques applications des fonctions elliptiques, *C. R. Acad. sci. Paris*, 85 (1877), p. 689–695, 728–732, 821–826, 870–875, 984–990, 1085–1091, 1185–1191; *Ibid.*, 86 (1878), p. 271–277, 422–427, 622–628, 777–780,

850–854; *Ibid.*, 89 (1879), p. 1001–1005, 1092–1097; *Ibid.*, 90 (1880), p. 106–112, 201–208, 478–483, 643–649, 761–766; *Ibid.*, 93 (1881), p. 920–925, 1098–1103; *Ibid.*, 95 (1882), p. 186–192, 372–377, 477–482, 594–600, 753–759; *Œuvres* 3, p. 266–418.

- [1882] *Cours de M. Hermite rédigé en 1882 par M. Andoyer*, lithographié, Paris, 1882; 2^e tirage, revu, 1883; 3^e éd., revue, 1887; 4^e éd., revue, 1891.
- [1890] Discours prononcé à l'inauguration de la nouvelle Sorbonne le 5 août 1890, *Bulletin des sciences mathématiques*, (II) 14 (1890), p. 6–36; *Œuvres* 4, p. 283–313.
- [1897] Notice sur Monsieur Weierstrass, *C. R. Acad. sci. Paris*, 124 (1897), p. 430–433; *Œuvres* 4, p. 463–466.

HOUZEL (C.)

- [1978] Fonctions elliptiques et intégrales abéliennes, dans *Abrégé d'histoire des mathématiques 1700–1900* (J. Dieudonné dir.), Paris : Hermann, 1978, t. 2, p. 1–113.

JACOBI (C. G.)

- [GW] *Gesammelte Werke*, 8 vol., Berlin, 1881–1891.
- [1828a] Extraits de deux lettres de M. Jacobi de l'Université de Königsberg à M. Schumacher, *Astr. Nachr.*, 6 (1828), col. 33–38; *GW* 1, p. 29–36.
- [1828b] Demonstratio theorematis ad theoriam functionum ellipticarum spectantis, *Ibid.*, 6 (1828), col. 133–142; *GW* 1, p. 37–48.
- [1828c] Suite des notices sur les fonctions elliptiques (extrait d'une lettre à M. Crelle), *J. reine angew. Math.*, 3 (1828), p. 303–310; *GW* 1, p. 255–263.
- [1829a] Suite des notices sur les fonctions elliptiques, *J. reine angew. Math.*, 4 (1829), p. 185–193; *GW* 1, p. 266–275.
- [1829b] *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, Königsberg, 1829; *GW* 1, p. 49–239.
- [1829c] De functionibus ellipticis commentatio prima, *J. reine angew. Math.*, 4 (1829), p. 371–390; *GW* 1, p. 297–318.
- [1835] De functionibus duarum variabilium quadrupliciter periodicis quibus theoria transcendentium abelianarum innitur, *J. reine angew. Math.*, 13 (1835), p. 55–78; *GW* 2, p. 23–50.
- [1849] Sur la rotation d'un corps, *C. R. Acad. sci. Paris*, 29 (1849), p. 97–103 (extrait), et, *J. reine angew. Math.*, 39 (1850), p. 293–350; *GW* 2, p. 289–351.
- [1881] Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen abgeleitet [manuscrit de 1838 publié par C.W. Borchardt]; *GW* 1, p. 497–538.

JORDAN (C.)

- [1883] *Cours d'analyse de l'École polytechnique*, t. 2, Paris, 1883; 2^e éd., Paris, 1894.

LILOUVILLE (J.)

- [1843] Rapport sur un mémoire de M. Hermite relatif à la division des fonctions abéliennes ou ultra-elliptiques, *C. R. Acad. sci. Paris*, 17 (1843), p. 292–295.
- [1844] Remarques de M. Liouville sur “Construction géométrique des amplitudes dans les fonctions elliptiques” par M. Chasles, *C. R. Acad. sci. Paris*, 19 (1844), p. 1261–1263.
- [1880] Leçons sur les fonctions doublement périodiques faites en 1847 par M. J. Liouville, *J. reine angew. Math.*, 88 (1880), p. 277–310.

LÜTZEN (J.)

- [1990] *Joseph Liouville, 1809–1882 : master of pure and applied mathematics*, New York : Springer, 1990.

MANSION (P.) et JORDAN (C.)

- [1901] Charles Hermite (1822–1901), *Revue des questions scientifiques*, (II) 19 (1901), p. 353–396.

NOETHER (M.)

- [1902] Charles Hermite, *Mathematische Annalen*, 55 (1902), p. 337–385.

PEIFFER (J.)

- [1978] *Les premiers exposés globaux de la théorie des fonctions de Cauchy, 1840–1860*, Thèse de doctorat, Paris : EHESS, 1978.

- [1983] Joseph Liouville (1809–1882) : ses contributions à la théorie des fonctions d'une variable complexe, *Rev. hist. sci.*, 36 (1983), p. 209–248.

PICARD (E.)

- [1901] L'Œuvre scientifique de Charles Hermite, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, (III) 18 (1901), p. 9–34; *Acta mathematica*, 25 (1901), p. 87–111; reproduit dans Hermite *Œuvres* 1, préface, p. VII–XL.

PUISEUX (V.)

- [1850] Recherches sur les fonctions algébriques, *J. math. pures appl.*, (I) 15 (1850), p. 365–480.

SCHWARZ (H. A.)

- [1885] *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauche der elliptischen Functionen. Nach Vorlesungen und Aufzeichnungen des Herrn K. Weierstrass, erste Abteilung*, Goettingen, 1885; 2^e éd., 1893. Trad. fr. par H. Padé, *Formules et propositions pour l'emploi des fonctions elliptiques d'après des leçons et des notes manuscrites de M. K. Weierstrass*, 1^{re} partie, Paris, 1894.

TANNERY (J.) et MOLK (J.)

- [1893–1902] *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, 4 vol., Paris, 1893–1902.

WHITTAKER (E. T.) et WATSON (G. N.)

- [1902] *A course of modern analysis. An introduction to the general theory of infinite processes and of analytic functions; with an account of the principal transcendental functions*, Cambridge : Cambridge University Press, 1902; 4^e éd., 1927.

ANNEXE

Nous reproduisons dans cette annexe la *Note sur les fonctions elliptiques* présentée par Hermite le 19 septembre 1849 à l'Académie des sciences de Paris et restée jusqu'à ce jour inédite. Le manuscrit de ce mémoire, que l'éditeur des *Œuvres de Charles Hermite*, Émile Picard, considérait à tort comme perdu²⁷, est conservé dans les archives de l'Académie des sciences de Paris²⁸.

NOTE SUR LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

par Charles Hermite²⁹

[*Nous nous proposons de déterminer les deux fonctions périodiques simples, dont la période est a , définies par les développements $\sum A_m e^{2m \frac{i\pi x}{a}}$ et $\sum B_m e^{2m \frac{i\pi x}{a}}$ supposés toujours convergents, de manière que le quotient :*

$$\frac{\sum A_m e^{2m \frac{i\pi x}{a}}}{\sum B_m e^{2m \frac{i\pi x}{a}}}$$

²⁷ Dans les *Œuvres de Charles Hermite*, Émile Picard a publié la note de présentation du mémoire à l'Académie [Hermite 1849] et le rapport de Cauchy sur ce mémoire [Cauchy 1851], en indiquant dans une note infrapaginale : « *Le Mémoire d'Hermite annoncé par la Note précédente n'ayant jamais été publié et ayant disparu des archives de l'Académie, nous croyons devoir réimprimer le Rapport de Cauchy sur ce travail* » [Hermite *Œuvres* 1, p. 75]. En fait, aucune recherche sérieuse ne paraît avoir été faite alors pour le retrouver dans ces archives, où rien n'autorise à penser qu'il n'y était pas déjà au début du siècle.

²⁸ Le manuscrit se trouve dans la pochette de la séance du 19 novembre 1849. Il se présente sous la forme de douze feuillets écrits de la main d'Hermite. Le texte lui-même est incomplet, puisqu'il manque le § 1 et le début du § 2. Sur un papier épinglé au manuscrit, on lit : « *Les premières pages de ce mémoire sont à réclamer à M^r Sturm* » et d'une autre encre : « *L'auteur complétera son mémoire vers le mois de septembre* », ce qui paraît indiquer que cette perte remonte à l'époque où le mémoire a été examiné par les rapporteurs. Le premier feuillet du manuscrit, dont la rédaction n'a pas été harmonisée avec la suite du mémoire (on remarquera ainsi dans le texte la présence de deux formules (1)), a probablement été ajouté après la perte de ces premières pages.

²⁹ Nous nous sommes efforcés de respecter au plus près dans cette édition le texte du manuscrit. Nous avons cependant modernisé l'orthographe aux rares endroits où c'était nécessaire, et modifié la ponctuation chaque fois que la clarté nous a paru l'exiger. Quelques erreurs dans les formules ont été rectifiées, le texte original du manuscrit étant alors reproduit en note.

³⁰ Nous avons restitué le début de la phrase, qui manque dans le manuscrit.

admette, outre la période a , une autre période b . On est ainsi conduit, en faisant pour abrégé :

$$q = e^{i\pi \frac{b}{a}},$$

à l'égalité :

$$\frac{\sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{2m \frac{i\pi x}{a}}}{\sum_{m'=-\infty}^{+\infty} B_{m'} e^{2m' \frac{i\pi x}{a}}} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} q^{2n} A_n e^{2n \frac{i\pi x}{a}}}{\sum_{n'=-\infty}^{+\infty} q^{2n'} B_{n'} e^{2n' \frac{i\pi x}{a}}}$$

ou bien à la suivante :

$$\sum_{- \infty}^{+ \infty} A_m B_{n'} q^{2n'} e^{2(m+n') \frac{i\pi x}{a}} = \sum_{- \infty}^{+ \infty} A_n B_{m'} q^{2n} e^{2(m'+n) \frac{i\pi x}{a}}$$

en chassant les dénominateurs. Cela étant, les coefficients d'une même exponentielle $e^{2\mu \frac{i\pi x}{a}}$, dans le premier et le second membre, seront respectivement les deux séries³¹

$$\sum_{- \infty}^{+ \infty} A_m B_{\mu-m} q^{2(\mu-m)} \quad \text{et} \quad \sum_{- \infty}^{+ \infty} A_n B_{\mu-n} q^{2n},$$

de sorte que pour toutes les valeurs du nombre entier μ , depuis $-\infty$ jusqu'à $+\infty$, on devra poser l'égalité :

$$\sum_{- \infty}^{+ \infty} A_m B_{\mu-m} q^{2(\mu-m)} = \sum_{- \infty}^{+ \infty} A_n B_{\mu-n} q^{2n}.$$

Or aucune méthode ne paraît maintenant pouvoir conduire à tirer de là l'expression générale des fonctions A_m et B_m , mais on peut imaginer un cas particulier de l'égalité des deux séries, le cas par exemple

³¹ *ms* : $\sum_{- \infty}^{+ \infty} A_m B_{\mu-m} q^{2n}$, au lieu de $\sum_{- \infty}^{+ \infty} A_n B_{\mu-n} q^{2n}$.

où elles seraient identiques, en sorte qu'un terme quelconque de l'une tel que $A_m B_{\mu-m} q^{2(\mu-m)}$ ait son égal $A_n B_{\mu-n} q^{2n}$ dans l'autre. Dans cette hypothèse, faisons, quel que soit l'entier μ :

$$A_m B_{\mu-m} q^{2(\mu-m)} = A_n B_{\mu-n} q^{2n}$$

et concevons que n soit exprimé en m de manière à produire la série des nombres entiers, lorsque m prend toutes les valeurs ; par exemple posons :

$$n = m + k.$$

k étant un nombre entier quelconque, l'équation précédente pourra s'écrire :

$$(1) \quad \frac{A_m}{A_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \frac{B_{\mu-m-k}}{B_{\mu-m}} q^{-2(\mu-m)}.$$

Cela étant, comme μ est quelconque, si l'on fait

$$\mu - m - k = m'$$

m' sera un nombre entier variable, entièrement indépendant de m , et l'équation (1) prendra la forme :

$$\frac{A_m}{A_{m+k}} q^{-2(m+k)} = \frac{B_{m'}}{B_{m'+k}} q^{-2(m'+k)}.$$

On voit donc que chaque membre devra être une constante, ce qui conduira à faire dépendre les fonctions A_m et B_m de la même équation aux différences :

$$\frac{z_m}{z_{m+k}} q^{-2m} = \text{Const}^e$$

qui donne facilement :

$$z_m = \Pi(m) q^{-\frac{m^2}{k} - \alpha m}$$

α étant une constante arbitraire, et $\Pi(m)$ une fonction de l'indice entier assujettie à la condition :

$$\Pi(m+k) = \Pi(m).$$

Nous sommes donc conduits aux deux valeurs générales :

$$A_m = \Pi(m)q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m},$$

$$B_m = \Phi(m)q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m},$$

la fonction arbitraire Φ ayant comme la précédente le nombre k pour période, et par suite à l'expression suivante :

$$\frac{\sum \Pi(m)q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}{\sum \Phi(m)q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}}}.$$

¶³²

En mettant la constante sous la forme $q^{2k+\alpha}$, on trouve facilement la solution particulière³³ :

$$z_m = q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m}.$$

Or toutes les solutions possibles se déduiront de celle-là en la multipliant par une fonction périodique de l'indice m , ayant k pour période. Nous arriverons donc finalement à ces deux expressions³⁴ :

$$a_m = \mathfrak{A}_m q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m},$$

$$b_m = \mathfrak{B}_m q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m},$$

où les fonctions \mathfrak{A}_m et \mathfrak{B}_m sont assujetties aux conditions :

$$\mathfrak{A}_{m+k} = \mathfrak{A}_m, \quad \mathfrak{B}_{m+k} = \mathfrak{B}_m.$$

III

Posons pour abrégier :

$$\Pi(x) = \sum \mathfrak{A}_m q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}},$$

$$\Phi(x) = \sum \mathfrak{B}_m q^{-\frac{m^2}{k}-\alpha m} e^{2m\frac{i\pi x}{a}}.$$

³² Ici se termine le premier feuillet du manuscrit.

³³ En changeant de constante α , comme l'indiquait ailleurs Hermite (voir [1848b, p. 73]).

³⁴ Hermite a écrit en marge du manuscrit : «mettre à l'impression pour A et B des lettres allemandes».

L'expression générale des fonctions à double période, à laquelle nous conduit l'analyse précédente sera donc :

$$f(x) = \frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}.$$

On vérifiera aisément la convergence des séries du numérateur et du dénominateur, sous la condition unique que le nombre entier k soit de signe contraire au coefficient de i dans le rapport $\frac{b}{a}$, ce coefficient ne pouvant d'ailleurs jamais être nul.

Les fonctions $\Pi(x)$ et $\Phi(x)$ conduisent donc à une définition analytique complète, pour toutes les valeurs réelles et imaginaires, d'une fonction à double période; l'un des indices de périodicité est en évidence, l'autre résulte des équations :

$$\Pi(x + b) = \Pi(x) e^{\frac{ki\pi}{a}(2x+(1-\alpha)b)},$$

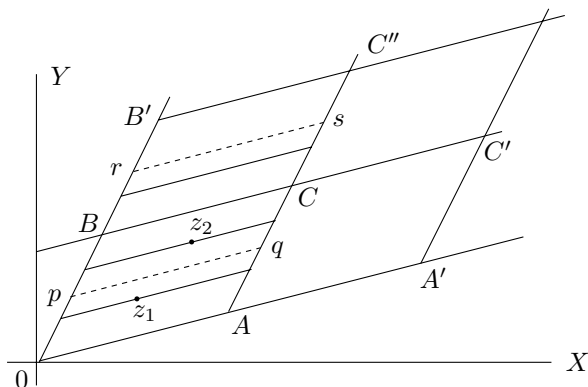
$$\Phi(x + b) = \Phi(x) e^{\frac{ki\pi}{a}(2x+(1-\alpha)b)}$$

qu'on démontre immédiatement, et sur lesquelles repose principalement la théorie des fonctions $f(x)$. Je ne reproduirai pas ici la méthode, que le lecteur peut lire dans une lettre adressée à M^r Jacobi³⁵, pour déduire la théorie des fonctions elliptiques de l'étude de la plus simple des expressions précédentes, celle qui répond à $k = 2$ en valeur absolue. On obtient alors un simple sinus d'amplitude et l'on démontre aisément que le type général $\frac{\Pi(x)}{\Phi(x)}$ des fonctions à double période auquel nous avons été conduits se ramène au développement de toute fonction rationnelle de $\sin \operatorname{am}(x)$ et de sa dérivée. C'est encore ce même genre de fonctions que les considérations suivantes vont nous offrir, mais sous la forme analytique bien différente de séries simples de sinus et de cosinus.

IV

Ayant tracé dans un plan deux axes rectangulaires OX, OY , toute quantité imaginaire $x + iy$ pourra être représentée par le point dont l'abscisse et l'ordonnée sont x et y ; les deux indices de périodicité a et b donneront de la sorte deux points A et B , et il est aisé de voir que ces points ne

³⁵ Voir [Hermite 1846, p. 18-37].



seront point en ligne droite avec l'origine si le rapport $\frac{b}{a}$ est imaginaire comme on doit le supposer. Cela posé, si l'on forme le parallélogramme $OABC$, toutes les valeurs d'une fonction aux deux périodes a et b seront fournies par les quantités imaginaires représentant des points renfermés dans son intérieur. Il est en effet bien facile de voir qu'en composant le plan tout entier de parallélogrammes égaux à $OABC$, par les parallèles équidistantes $AC, A'C', etc.$ d'une part, $BC, B'C'', etc.$ de l'autre, les points situés de la même manière dans les divers parallélogrammes donneront une même valeur de la fonction à double période. Considérant donc seulement l'espace $OABC$, nommons Z_1, Z_2, \dots, Z_n les points correspondant aux diverses valeurs z_1, z_2, \dots, z_n qui rendent la fonction infinie, ces points étant supposés dans tel ordre qu'une droite se mouvant parallèlement à elle-même de OA jusqu'à BC , rencontre d'abord Z_1 puis Z_2 , et ainsi de suite jusqu'à Z_n . Deux cas bien distincts peuvent se présenter, suivant que le nombre et l'ordre de multiplicité des quantités $z_1, z_2, etc.$ est fini ou infini; le premier de ces cas seul peut se traiter par notre analyse, l'autre qui renferme un nombre infiniment plus grand d'espèces différentes de fonctions à double période, est entièrement écarté, nous admettrons d'ailleurs que la fonction considérée n'est jamais discontinue qu'en devenant infinie.

Cela étant, menons par Z_1 et Z_2 deux parallèles à OA ; tous les points du plan compris dans l'intervalle de ces droites seront donnés par une

Théorème sur la réduction d'une fonction elliptique et construction de son parallélogramme des périodes (Hermite, *Note sur les fonctions elliptiques*, manuscrit, f^o 2, v^o, Archives de l'Académie des sciences de Paris).

expression telle que :

$$p + at$$

(t prenant toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$, et p désignant une valeur moyenne entre les ordonnées Z_1 et Z_2 , comptées parallèlement à OB et terminées à OA)³⁶. Si donc $F(x)$ est la fonction proposée aux deux périodes a et b , $F(p + at)$ aura pour période l'unité et ne deviendra infinie pour aucune valeur de t , ainsi on pourra faire :

$$F(p + at) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m e^{2mi\pi t}$$

et on aura comme on sait :

$$A_m = \int_0^1 F(p + at) e^{-2mi\pi t} dt.$$

Or cette intégrale s'obtient facilement par la méthode suivante.

V

Soit pq l'une des droites représentées par $p + at$, en faisant varier t , et achevons le parallélogramme $pqrs$ égal à $OABC$; en désignant par Δ la somme des résidus d'une fonction quelconque $\Pi(z)$, pour des valeurs de z représentant des points contenus dans l'intérieur de $pqrs$, on aura l'équation suivante :

$$(1) \quad a \int_0^1 \Pi(p + at) dt + b \int_0^1 \Pi(p + a + bt) dt \\ = b \int_0^1 \Pi(p + bt) dt + a \int_0^1 \Pi(p + b + at) dt + 2i\pi\Delta.$$

Ce n'est là en effet qu'un cas particulier du théorème donné pour un contour quelconque par M^r Cauchy et dont les travaux de l'illustre géomètre ont fait la proposition la plus importante du calcul intégral. On en déduit immédiatement la valeur de A_m en y supposant :

$$\Pi(x) = F(x) e^{-2mi\pi \frac{x-p}{a}}.$$

³⁶ *ms* : passage biffé.

En effet deux des intégrales se détruisent, puisque $\Pi(x)$ conserve la période a ; d'un autre côté, $F(x)$ ayant la période b , on a :

$$\Pi(p + b + at) = \Pi(p + at)e^{-2mi\pi\frac{b}{a}}.$$

Donc, en faisant pour abrégér :

$$q = e^{i\pi\frac{b}{a}},$$

il vient :

$$aA_m(1 - q^{-2m}) = 2i\pi\Delta,$$

et il ne reste plus qu'à calculer l'expression représentée par Δ .

À cet effet, soit z l'une quelconque des valeurs contenues dans pqr et qui rende $F(x)$ infinie; si l'ordre de multiplicité de cette valeur est $1 + k$, le résidu correspondant sera la limite de :

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{d^k}{d\varepsilon^k} \{\varepsilon^{k+1}\Pi(z+\varepsilon)\} = \frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \frac{d^k}{d\varepsilon^k} \{\varepsilon^{k+1}F(z+\varepsilon)e^{-2mi\pi\frac{\varepsilon+z-p}{a}}\}$$

pour ε infiniment petit. Or on reconnaît de suite que la dérivée d'ordre k de $\varepsilon^{k+1}F(z+\varepsilon)e^{-2mi\pi\frac{\varepsilon}{a}}$ donne alors un polynôme entier en m de degré k , de sorte qu'en le désignant par $\varphi_k(m)$, il vient pour le résidu cherché :

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \dots k} \varphi_k(m) e^{-2mi\pi\frac{z-p}{a}}.$$

Ainsi, en observant que les diverses valeurs de z renfermées dans le parallélogramme pqr sont évidemment :

$$z_2, z_3, \dots, z_n \text{ et } z_1 + b,$$

on trouvera pour Δ l'expression :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{k_1}(m)}{1 \cdot 2 \dots k_1} e^{-2mi\pi\frac{z_1+b-p}{a}} + \frac{\varphi_{k_2}(m)}{1 \cdot 2 \dots k_2} e^{-2mi\pi\frac{z_2-p}{a}} \\ + \dots + \frac{\varphi_{k_n}(m)}{1 \cdot 2 \dots k_n} e^{-2mi\pi\frac{z_n-p}{a}} \end{aligned}$$

dans laquelle l'ordre de multiplicité de z_i a été désigné par $1 + k_i$.

VI

Pour mieux voir comment la fonction doublement périodique $F(x)$ se trouve déterminée dans toute l'étendue des valeurs réelles et imaginaires de la variable par la méthode précédente, mettons Δ sous la forme :

$$e^{2mi\pi\frac{p}{a}} \left\{ \frac{\varphi_{k_1}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_1} e^{-2mi\pi\frac{z_1+b}{a}} + \frac{\varphi_{k_2}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_2} e^{-2mi\pi\frac{z_2}{a}} \right. \\ \left. + \cdots + \frac{\varphi_{k_n}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_n} e^{-2mi\pi\frac{z_n}{a}} \right\}$$

et représentons par Δ_m la quantité entre parenthèses; on aura le développement :

$$F(p+at) = \frac{2i\pi}{a} \sum \frac{\Delta_m}{1-q^{-2m}} e^{2mi\pi(t+\frac{p}{a})},$$

ou si l'on veut :

$$F(z) = \frac{2i\pi}{a} \sum \frac{\Delta_m}{1-q^{-2m}} e^{2m\frac{i\pi z}{a}},$$

z étant une variable imaginaire qui d'après son origine est limitée par les parallèles à OA menées des points Z_1 et Z_2 . Maintenant, la même analyse donnera un résultat tout semblable pour la détermination de $F(x)$ dans l'intervalle défini par les points Z_2 et Z_3 ; on reconnaît de suite qu'il se déduira du premier en mettant dans Δ_m , $z_2 + b$ à la place de z_2 ; et en général, pour l'intervalle défini par les points Z_μ et $Z_{\mu+1}$, la quantité Δ_m sera :

$$\frac{\varphi_{k_1}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_1} e^{-2mi\pi\frac{z_1+b}{a}} + \frac{\varphi_{k_2}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_2} e^{-2mi\pi\frac{z_2+b}{a}} \\ + \cdots + \frac{\varphi_{k_\mu}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_\mu} e^{-2mi\pi\frac{z_\mu+b}{a}} \\ + \frac{\varphi_{k_{\mu+1}}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_{\mu+1}} e^{-2mi\pi\frac{z_{\mu+1}}{a}} + \cdots + \frac{\varphi_{k_n}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_n} e^{-2mi\pi\frac{z_n}{a}}.$$

Mais comment saisir l'expression du caractère de la double périodicité dans ces développements de formes analytiques différentes, dont l'ensemble représente la fonction $F(x)$?

Ce qui se présente le plus immédiatement à l'esprit est de chercher à exprimer $F(x)$ par des séries périodiques simples, mettant en évidence

l'indice b au lieu de l'indice a ; et il est évident qu'il n'y aura rien à changer pour cela à la marche suivie précédemment. Si l'on fait : $q' = e^{i\pi \frac{a}{b}}$ et si l'on désigne par z'_1, z'_2, \dots, z'_n les quantités représentant les mêmes points que z_1, z_2, \dots, z_n , mais en suivant l'ordre où ils seraient successivement rencontrés par une droite se mouvant parallèlement à elle-même de OB à AC , on aura n développements de la forme³⁷ :

$$F(z) = \frac{2i\pi}{b} \sum \frac{\Delta'_m}{1 - q'^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{b}}$$

pour les n intervalles définis par les parallèles à OB menées de tous les points Z_1, Z_2, \dots , etc. L'expression de Δ'_m sera en général, dans l'intervalle défini par les quantités z'_μ et $z'_{\mu+1}$, la somme des résidus de la fonction :

$$F(z) e^{-2m \frac{i\pi z}{b}}$$

correspondant aux valeurs :

$$z'_1 + a, z'_2 + a, \dots, z'_\mu + a, z'_{\mu+1}, \dots, z'_n.$$

D'après cela, on voit que chacun des n développements partiels de la fonction $F(x)$, ayant la période a , peut être transformé, et cela de n manières différentes, en développement périodique ayant la période b . Mais il est essentiel d'observer que chacune de ces transformations n'a lieu que pour les valeurs renfermées dans le parallélogramme commun aux deux bandes infinies qui servent respectivement de limites aux deux développements. Les considérations qui nous restent à exposer feront saisir plus facilement ces propriétés singulières et dont l'analyse n'avait offert aucun exemple avant la découverte des fonctions à double période.

VII

L'expression générale des diverses séries périodiques par lesquelles nous avons représenté la fonction $F(x)$ dans toute l'étendue des valeurs réelles

³⁷ ms : facteur $\frac{2i\pi}{b}$ omis.

et imaginaires de la variable semble mettre en évidence une fonction en quelque sorte élémentaire à laquelle pourrait être ramenée très simplement toute fonction à double période. Reportons nous d'abord au type général de ces développements obtenus plus haut, savoir³⁸ :

$$F(z) = \frac{2i\pi}{a} \sum \frac{\Delta_m}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{a}},$$

Δ_m étant, dans l'intervalle correspondant aux deux points Z_μ et $Z_{\mu+1}$, la somme des résidus de $F(z) e^{-2m \frac{i\pi z}{a}}$ pour les valeurs $z_1 + b, z_2 + b, \dots, z_\mu + b, z_{\mu+1}, \dots, z_n$.

J'observerai en premier lieu que le terme indépendant de z ne peut être donné par l'expression $\frac{\Delta_m}{1 - q^{-2m}}$ pour $m = 0$. En effet, l'équation fondamentale (1) se réduit, en y faisant : $\Pi(z) = F(z)$, à $2i\pi\Delta = 0$, de sorte qu'on est conduit à une expression $\frac{0}{0}$, dont on ne peut songer à découvrir la véritable valeur par la règle ordinaire, m étant un nombre entier et non une variable continue. Convenant donc par la suite d'omettre sous le signe \sum la valeur $m = 0$, nous conserverons pour l'expression de ce terme indépendant de z , l'intégrale définie :

$$\int_0^1 F(p + at) dt.$$

La fonction F ayant la période a , cette intégrale ne change pas pour les valeurs de p comprises entre z_μ et $z_{\mu+1}$, mais elle change brusquement en devenant indéterminée ou infinie lorsque, p prenant par exemple la valeur limite $z_{\mu+1}$, on considère le nouvel intervalle de $z_{\mu+1}$ à $z_{\mu+2}$. Cela posé, l'expression de Δ_m conduit à décomposer $F(z)$ en n séries, savoir :

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\varphi_{k_1}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_1} \frac{e^{-2m \frac{i\pi(z_1+b)}{a}}}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{a}} \\ & \sum \frac{\varphi_{k_2}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_2} \frac{e^{-2m \frac{i\pi(z_2+b)}{a}}}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{a}} \\ & \quad \vdots \\ & \sum \frac{\varphi_{k_\mu}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_\mu} \frac{e^{-2m \frac{i\pi(z_\mu+b)}{a}}}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{a}} \end{aligned}$$

³⁸ ms : facteur $\frac{2i\pi}{a}$ omis.

$$\sum \frac{\varphi_{k_{\mu+1}}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_{\mu+1}} \frac{e^{-2m \frac{i\pi z_{\mu+1}}{a}}}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{a}}$$

$$\vdots$$

$$\sum \frac{\varphi_{k_n}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_n} \frac{e^{-2m \frac{i\pi z_n}{a}}}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{a}}$$

Or toutes ces séries s'expriment à l'aide de la seule fonction

$$\theta(z) = \sum \frac{1}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi}{a}(z-b)}$$

et ses dérivées des divers ordres; il est évident en effet qu'on peut faire par exemple :

$$\sum \frac{\varphi_{k_1}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_1} \frac{e^{-2m \frac{i\pi(z_1+b)}{a}}}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{a}}$$

$$= a_0 \theta(z - z_1) + a_1 \frac{d\theta(z - z_1)}{dz} + \cdots + a_{k_1} \frac{d^{k_1} \theta(z - z_1)}{dz^{k_1}}.$$

les constantes $a_0, a_1, etc.$ se déduisant immédiatement de celles qui entrent dans le polynôme $\varphi_{k_1}(m)$. Dans le cas où l'ordre de multiplicité des valeurs z_1, z_2, \dots, z_n se réduirait à l'unité, on serait donc conduit à cette expression de $F(z)$, savoir :

$$(2) \quad F(z) = \int_0^1 F(p + at) dt$$

$$+ \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_1 \theta(z - z_1) + r_2 \theta(z - z_2) + \cdots + r_\mu \theta(z - z_\mu) \right.$$

$$\left. + r_{\mu+1} \theta(z + b - z_{\mu+1}) + \cdots + r_n \theta(z + b - z_n) \right\},$$

les quantités r_1, r_2, \dots, r_n désignant respectivement les résidus de $F(z)$ pour les valeurs z_1, z_2, \dots, z_n , et par suite, comme nous l'avons vu précédemment, vérifiant la condition :

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n = 0.$$

VIII

La transcendante à laquelle nous venons d'être conduits ne nous étant définie que par le développement périodique :

$$\theta(z) = \sum \frac{e^{2m \frac{i\pi}{a}(z-b)}}{1 - q^{-2m}},$$

il est naturel de rechercher tout d'abord entre quelles limites ce développement reste convergent et détermine une fonction. À cet effet, faisons :

$$\frac{z-b}{a} = g + ih, \quad \frac{b}{a} = \alpha + i\beta.$$

Le terme général de rang m prendra la forme :

$$\frac{e^{2mi\pi(g+ih)}}{1 - e^{-2mi\pi(\alpha+i\beta)}}$$

et aura pour module :

$$h_m = \frac{e^{-2m\pi h}}{\sqrt{1 - 2e^{+2m\pi\beta} \cos 2m\pi\alpha + e^{+4m\pi\beta}}}.$$

On tire facilement de là, pour m infiniment grand, les deux limites³⁹ :

$$(h_m)^{1/m} = e^{-2\pi(h+\beta)}, \quad (h_{-m})^{1/m} = e^{2\pi h}$$

dans le cas où β est positif. Si β au contraire est négatif, on a :

$$(h_m)^{1/m} = e^{-2\pi h}, \quad (h_{-m})^{1/m} = e^{2\pi(h+\beta)}.$$

Maintenant, en écrivant dans ces différents cas que les exposants de e sont négatifs, on trouve par un calcul trop élémentaire pour être détaillé ici, cette condition bien simple que les valeurs de z doivent représenter des points compris dans l'intervalle des parallèles OA , BC , indéfiniment prolongées. Et c'est bien en effet ce qui a lieu dans l'équation (2) si, comme on doit le supposer, la variable reste comprise dans l'intervalle des parallèles à OA et BC menées par les points Z_μ et $Z_{\mu+1}$. Mais on voit que nous avons seulement la définition d'une portion de fonction, qui ne peut nous donner une seule et même expression analytique de la fonction à double période dans toute l'étendue des valeurs de la variable. Il importe donc d'examiner avec soin comment se modifie l'expression de $F(x)$ dans le passage d'un intervalle quelconque à celui qui le suit immédiatement.

³⁹ *ms* : $(h_m)^{1/m} = e^{-2\pi h}$, $h_{-m}^{1/m} = e^{2\pi(h-\beta)}$ dans le cas où β est positif. Si β au contraire est négatif, on a : $h_m^{1/m} = e^{2\pi(\beta-h)}$ et $h_{-m}^{1/m} = e^{2\pi h}$.

IX

À cet effet, considérant les trois parallèles à OA menées par les points $Z_\mu, Z_{\mu+1}, Z_{\mu+2}$, nommons p une quantité représentée par un point compris entre les deux premières et p' une quantité représentée par un point compris entre la seconde et la troisième. Les deux intégrales :

$$\int_0^1 F(p+at)e^{-2mi\pi t} dt \quad \text{et} \quad \int_0^1 F(p'+at)e^{-2mi\pi t} dt$$

auront les valeurs suivantes :

$$\int_0^1 F(p+at)e^{-2mi\pi t} dt = \frac{2i\pi}{a} \frac{\Delta_m}{1-q^{-2m}} e^{2mi\pi \frac{p}{a}},$$

$$\int_0^1 F(p'+at)e^{-2mi\pi t} dt = \frac{2i\pi}{a} \frac{\Delta'_m}{1-q^{-2m}} e^{2mi\pi \frac{p'}{a}}.$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} e^{-2mi\pi \frac{p}{a}} \int_0^1 F(p+at)e^{-2mi\pi t} dt \\ - e^{-2mi\pi \frac{p'}{a}} \int_0^1 F(p'+at)e^{-2mi\pi t} dt \\ = \frac{2i\pi}{a} \frac{\Delta_m - \Delta'_m}{1-q^{-2m}}. \end{aligned}$$

Or, d'après la signification de Δ_m et Δ'_m , leur différence se réduit à :

$$\frac{\varphi_{k_{\mu+1}}(m)}{1 \cdot 2 \cdots k_{\mu+1}} e^{-2mi\pi \frac{z_{\mu+1}}{a}} (1-q^{-2m})$$

de sorte qu'en supposant $m=0$, il vient :

$$\int_0^1 F(p+at) dt - \int_0^1 F(p'+at) dt = \frac{2i\pi}{a} r_{\mu+1},$$

$r_{\mu+1}$ désignant comme précédemment le résidu de $F(z)$ correspondant à la valeur $z_{\mu+1}$.

Cela posé, l'équation (2) devient pour l'intervalle relatif aux points $Z_{\mu+1}, Z_{\mu+2}$:

$$\begin{aligned} F(z) = \int_0^1 F(p'+at) dt \\ + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_1 \theta(z-z_1) + r_2 \theta(z-z_2) + \cdots + r_\mu \theta(z-z_\mu) \right. \\ \left. + r_{\mu+1} \theta(z-z_{\mu+1}) + r_{\mu+2} \theta(z+b-z_{\mu+2}) \right. \\ \left. + \cdots + r_n \theta(z+b-z_n) \right\}, \end{aligned}$$

ou encore, d'après ce qu'on vient d'obtenir :

$$\begin{aligned}
 F(z) = & \int_0^1 F(p + at) dt \\
 & + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_1\theta(z - z_1) + r_2\theta(z - z_2) + \cdots + r_\mu\theta(z - z_\mu) \right. \\
 & \quad \left. + r_{\mu+1}[\theta(z - z_{\mu+1}) - 1] + r_{\mu+2}\theta(z + b - z_{\mu+2}) \right. \\
 & \quad \left. + \cdots + r_n\theta(z + b - z_n) \right\}.
 \end{aligned}$$

En rapprochant maintenant cette expression de l'équation (2), on voit seulement deux termes de forme différente, savoir $\theta(z + b - z_{\mu+1})$ qui est devenu $\theta(z - z_{\mu+1}) - 1$ dans l'autre. Je remarque d'ailleurs que le premier de ces termes est aussi le seul où l'argument dépasse la limite supérieure des valeurs pour lesquelles $\theta(z)$ est donnée, lorsque z varie de $z_{\mu+1}$ à $z_{\mu+2}$. Mais il est évident qu'en définissant alors la fonction θ par la condition :

$$\theta(z + b - z_{\mu+1}) = \theta(z - z_{\mu+1}) - 1$$

on arrive pour les deux intervalles réunis de z_μ à $z_{\mu+2}$ à une forme unique pour la fonction $F(z)$.

X

Cette condition à laquelle nous venons d'être amenés, et qu'on peut écrire plus simplement

$$\theta(z + b) = \theta(z) - 1$$

conduit comme on le voit immédiatement à la définition complète de la transcendante $\theta(z)$, donnée seulement jusqu'ici dans un intervalle limité des valeurs de l'argument. On en déduit cette expression de $F(z)$, remarquable par sa simplicité :

$$F(z) = \text{Const}^e + \frac{2i\pi}{a} \{ r_1\theta(z - z_1) + r_2\theta(z - z_2) + \cdots + r_n\theta(z - z_n) \}.$$

Dans le cas où les quantités z_1, z_2, \dots, z_n , sont d'un ordre quelconque de multiplicité, on aurait en observant que toutes les dérivées de θ ont la

période b :

$$(3) \quad F(z) = \text{Const}^e \\ + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_1 \theta(z - z_1) + A_1 \frac{d\theta(z - z_1)}{dz} + A_2 \frac{d^2\theta(z - z_1)}{dz^2} + \dots + A_{k_1} \frac{d^{k_1}\theta(z - z_1)}{dz^{k_1}} \right\} \\ + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_2 \theta(z - z_2) + B_1 \frac{d\theta(z - z_2)}{dz} + B_2 \frac{d^2\theta(z - z_2)}{dz^2} + \dots + B_{k_2} \frac{d^{k_2}\theta(z - z_2)}{dz^{k_2}} \right\} \\ + \dots \\ + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_n \theta(z - z_n) + K_1 \frac{d\theta(z - z_n)}{dz} + K_2 \frac{d^2\theta(z - z_n)}{dz^2} + \dots + K_{k_n} \frac{d^{k_n}\theta(z - z_n)}{dz^{k_n}} \right\}.$$

On voit dans ces expressions que les différentes valeurs qui rendent infinie la fonction à double période, et qui servent principalement à la caractériser, se trouvent mises en évidence d'une manière bien simple et qu'on pourrait en quelque sorte rapprocher de la forme d'une fraction rationnelle décomposée en fractions à numérateurs constants. Les diverses quantités r, A, B, \dots, K sont des constantes qui dépendent des résidus de $F(z)$ multipliée par une exponentielle, et elles n'ont d'ailleurs d'autre relation que la suivante⁴⁰ :

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0$$

déjà remarquée. Cette relation sert à prouver que $F(z)$ a la période b ; on a en effet, d'après la propriété caractéristique de la fonction θ ,

$$F(z + b) = F(z) - \frac{2i\pi}{a} (r_1 + r_2 + \dots + r_n)$$

et partant :

$$F(z + b) = F(z).$$

Je laisserai au lecteur le soin de comparer les deux expressions d'une fonction à double période auxquelles nous avons été amenés par deux voies si différentes, à savoir celle qui est donnée par l'équation (3), et la suivante :

$$F(z) = \frac{\sum \mathfrak{A}_m e^{2m \frac{i\pi z}{a}} q^{-\frac{m^2}{k} - \alpha m}}{\sum \mathfrak{B}_m e^{2m \frac{i\pi z}{a}} q^{-\frac{m^2}{k} - \alpha m}}$$

que nous avons obtenue tout d'abord, et je passerai de suite à l'étude plus approfondie de la fonction $\theta(z)$.

⁴⁰ ms : $r_1 + r_2 + \dots + r_\mu = 0$.

XI

Le développement périodique $\sum \frac{e^{2m \frac{i\pi}{a}(z-b)}}{1 - q^{-2m}}$ que nous avons considéré en premier lieu représente, comme nous l'avons vu, une fonction continue et finie pour toutes les valeurs de l'argument comprises entre les parallèles indéfinies OA et BC . On voit encore que pour $z = b$ et $z = 0$, il devient infini, comme l'exige la nature des fonctions doublement périodiques dans lesquelles il figure; mais il est essentiel d'observer que pour les points situés sur ces deux parallèles mêmes, ce développement devient divergent, et ne saurait alors déterminer une fonction. Et, en général, les développements périodiques $\sum \frac{\Delta_m}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{a}}$ par lesquels nous avons exprimé la fonction $F(z)$ deviennent illusoires pour les valeurs situées sur les parallèles à OA , menées par les points Z_1, Z_2, Z_3 , etc. Mais dans ces cas il est évident qu'on peut employer les développements de forme analogue $\sum \frac{\Delta'_m}{1 - q^{-2m}} e^{2m \frac{i\pi z}{b}}$, où le second indice de périodicité est mis en évidence; les cas d'exception propres à ces développements ne coïncident avec les précédents qu'aux points où la solution devient par hypothèse infinie. La transcendante θ est elle-même susceptible de ces deux formes de développement, auxquelles on peut parvenir en se donnant seulement les équations :

$$\theta(z + a) = \theta(z), \quad \theta(z + b) = \theta(z) - 1$$

et la condition de ne devenir infinie que pour $z = 0$ ou z égal à une période quelconque. Par là, en effet, la fonction θ se trouve entièrement déterminée à une constante arbitraire près, comme nous allons voir.

Soit, comme au § IV, p une quantité quelconque comprise entre OA et BC , t une variable réelle, on pourra faire :

$$\theta(p + at) = \sum A_m e^{2mi\pi t}$$

et la valeur de A_m , c'est-à-dire l'intégrale définie $\int_0^1 \theta(p + at) e^{-2mi\pi t} dt$, se trouvera par l'équation (1), en y supposant :

$$\Pi(z) = \theta(z) e^{-2mi\pi \frac{z-p}{a}}.$$

On aura en effet :

$$\Pi(z + a) = \Pi(z), \quad \Pi(z + b) = q^{-2m} \left(\Pi(z) - e^{-2mi\pi \frac{z-p}{a}} \right),$$

de sorte qu'il viendra simplement :

$$aA_m(1 - q^{-2m}) = 2i\pi\Delta.$$

Quant à Δ , on obtient, en désignant pour abrégé par r le résidu de $\theta(z)$ correspondant au point B :

$$\Delta = r e^{-2mi\pi \frac{b-p}{a}}.$$

On aura donc le développement déjà obtenu :

$$\theta(z) = \int_0^1 \theta(p + at) dt + \frac{2i\pi}{a} r \sum \frac{e^{2m \frac{i\pi}{a}(z-b)}}{1 - q^{-2m}},$$

z étant une variable comprise entre les droites indéfinies OA et BC . Il reste à prouver que $\frac{2i\pi}{a} r$ se réduit à l'unité. Or c'est ce qu'on obtient en faisant $\Pi(z) = \theta(z)$, car toutes les intégrales se détruisent et il reste seulement : $0 = -a + 2i\pi r$. Pour achever de caractériser d'une manière complète la fonction $\theta(z)$, on pourrait poser :

$$\int_0^1 \theta(p + at) dt = 0,$$

mais il est plus commode, en remarquant que le développement

$$\sum \frac{e^{2m \frac{i\pi}{a}(z-b)}}{1 - q^{-2m}}$$

s'évanouit pour $z = \frac{a+b}{2}$, de faire :

$$\theta\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0.$$

Pour arriver maintenant à la seconde forme de développement, soit :

$$\vartheta(z) = -\frac{z}{a} - \frac{b}{a} \theta(z).$$

On trouvera aisément que :

$$\vartheta(z+b) = \vartheta(z), \quad \vartheta(z+a) = \vartheta(z) - 1.$$

D'ailleurs, ces deux fonctions ne deviennent évidemment infinies que pour les mêmes valeurs, ainsi on aura, en faisant $q' = e^{i\pi\frac{a}{b}}$:

$$\vartheta(z) = \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{b}(z-a)}}{1 - q'^{-2m}} + \text{Const}^e$$

et :

$$\theta(z) = -\frac{z}{b} - \frac{a}{b} \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{b}(z-a)}}{1 - q'^{-2m}} + \text{Const}^e.$$

La constante peut se déterminer en faisant par exemple $z = \frac{a+b}{2}$, car alors les deux développements s'évanouissent, et il vient par suite :

$$\text{Const}^e = \frac{1}{2} + \frac{a}{2b}.$$

XII

Les résultats qui précèdent nous conduisent naturellement à la recherche des formes en nombre infini dont l'expression de la transcendante $\theta(z)$ est susceptible, et auxquelles on arrive de la manière suivante. Soit :

$$A = ma + nb, \quad B = m_0a + n_0b$$

et :

$$\varepsilon = mn_0 - m_0n,$$

m, n, m_0, n_0 désignant des nombres entiers quelconques. On déduit d'abord des équations de définition :

$$\theta(z+a) = \theta(z), \quad \theta(z+b) = \theta(z) - 1$$

les suivantes :

$$\theta(z+A) = \theta(z) - n, \quad \theta(z+B) = \theta(z) - n_0.$$

Or, en faisant :

$$\vartheta(z) = \frac{A}{\varepsilon a} \left(\theta(z) + \frac{nz}{A} \right),$$

elles deviennent :

$$\vartheta(z+A) = \vartheta(z), \quad \vartheta(z+B) = \vartheta(z) - 1.$$

Donc, si les nombres m, n, m_0, n_0 sont tels que ε soit en valeur absolue égal à l'unité, auquel cas $\vartheta(z)$ ne deviendra infini que pour les multiples des nouvelles périodes A et B , on aura, en faisant $Q = e^{i\pi \frac{B}{A}}$:

$$\vartheta(z) = \sum \frac{e^{2m \frac{i\pi}{A}(z-B)}}{1 - Q^{-2m}} + \text{Const}^e.$$

D'où ce type des formes en nombre infini de la transcendante θ , savoir :

$$\theta(z) = -\frac{nz}{A} + \frac{\varepsilon a}{A} \sum \frac{e^{2m \frac{i\pi}{A}(z-B)}}{1 - Q^{-2m}} + \text{Const}^e.$$

La constante se détermine aisément en faisant $z = \frac{A+B}{2}$, ou $z = \frac{B}{2}$, selon que n_0 est pair ou impair. Dans les deux cas, on obtient pour valeur : $\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon a}{2A}$, ce qui conduit à cette équation symétrique :

$$\frac{1}{a} \left\{ \sum \frac{e^{2m \frac{i\pi}{a}(z-b)}}{1 - q^{-2m}} - \frac{1}{2} \right\} = -\frac{nz}{Aa} + \frac{\varepsilon}{A} \left\{ \sum \frac{e^{2m \frac{i\pi}{A}(z-B)}}{1 - Q^{-2m}} - \frac{1}{2} \right\}.$$

L'intervalle dans lequel les diverses séries auxquelles nous arrivons de la sorte restent convergentes, dépend des nombres entiers m, n, m_0, n_0 et tend à se resserrer lorsque ces nombres croissent. Pour avoir la mesure de cet intervalle, cherchons en représentant par les points \mathfrak{A} et \mathfrak{B} les deux indices A et B , la distance du point \mathfrak{B} à la droite $O\mathfrak{A}$; à cet effet soit :

$$A = \alpha + i\alpha', \quad B = \beta + i\beta'$$

et :

$$\Delta = (\alpha\beta' - \beta\alpha').$$

En valeur absolue, on trouvera facilement pour cette distance l'expression :

$$\left(\frac{\frac{1}{2}\Delta}{\text{Module } A} \right).$$

Le numérateur, comme il est facile de le voir, reste le même quels que soient m, n, m_0, n_0 , pourvu qu'on ait $\varepsilon = \pm 1$, et le dénominateur croît indéfiniment avec les nombres m et n . Il est aisé d'ailleurs d'obtenir son minimum par la théorie de la réduction des formes quadratiques ; et il suit d'un résultat connu de cette théorie qu'on pourra toujours faire :

$$\text{Module } A < \sqrt[4]{\frac{4}{3}} \Delta^{\frac{1}{2}}$$

et rendre par suite la distance supérieure à la limite :

$$\frac{1}{2} \sqrt[4]{\frac{3}{4}} \Delta^{\frac{1}{2}}.$$

Dans les mêmes circonstances, le module de la quantité Q ou $\frac{1}{Q}$, suivant que ε sera de même signe que $\alpha\beta' - \beta\alpha'$ ou de signe contraire, sera inférieur à la limite $e^{-\pi\sqrt{3/4}}$.

Les recherches précédentes s'étendent facilement en suivant les mêmes principes au cas où ε , au lieu d'être l'unité, est un nombre entier quelconque. On est alors conduit à la théorie de la transformation, sur laquelle je me propose de revenir prochainement⁴¹. Je donnerai alors la démonstration d'une proposition énoncée par Galois et qui consiste en ce que les équations modulaires du 6^e, 8^e et 12^e degré peuvent être abaissées respectivement aux 5^e, 7^e et 11^e degré.

XIII

Les expressions en nombre infini de $\theta(z)$ auxquelles nous venons d'arriver, conduisent à autant de formes analytiques différentes pour le développement de toute fonction à double période, en partant de l'équation fondamentale :

$$\begin{aligned} F(z) = & \text{Const}^e \\ & + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_1\theta(z-z_1) + A_1 \frac{d\theta(z-z_1)}{dz} + A_2 \frac{d^2\theta(z-z_1)}{dz^2} + \dots + A_{k_1} \frac{d^{k_1}\theta(z-z_1)}{dz^{k_1}} \right\} \\ & + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_2\theta(z-z_2) + B_1 \frac{d\theta(z-z_2)}{dz} + B_2 \frac{d^2\theta(z-z_2)}{dz^2} + \dots + B_{k_2} \frac{d^{k_2}\theta(z-z_2)}{dz^{k_2}} \right\} \\ & + \dots \\ & + \frac{2i\pi}{a} \left\{ r_n\theta(z-z_n) + K_1 \frac{d\theta(z-z_n)}{dz} + K_2 \frac{d^2\theta(z-z_n)}{dz^2} + \dots + K_{k_n} \frac{d^{k_n}\theta(z-z_n)}{dz^{k_n}} \right\}. \end{aligned}$$

Mais il est un autre mode d'expression de la fonction $F(z)$ dont nous allons nous occuper afin de compléter, au point de vue où nous nous sommes placés, l'ensemble des propositions élémentaires concernant les fonctions à double période.

⁴¹ Hermite paraît n'avoir jamais publié, ni présenté à l'Académie, le mémoire ici annoncé.

À cet effet je considérerai d'une manière spéciale la dérivée $\frac{d\theta(z)}{dz}$ que je désignerai dans la suite par $\varphi(z)$. Cette fonction est, comme on le voit, la plus simple de celles qui sont comprises dans l'équation précédente; on y arrive en réduisant les diverses quantités $z_1, z_2, \text{etc.}$ à une seule à laquelle on donne la valeur zéro et en supposant que son degré de multiplicité soit le plus petit possible, c'est-à-dire se réduise à deux. On ne saurait en effet le faire égal à l'unité, car l'équation

$$r_1 + r_2 + \dots + r_n = 0$$

donnerait alors $r_1 = 0$, de sorte qu'on obtiendrait une constante et non une fonction.

Cela étant, l'expression :

$$A + B\varphi(z) + C\varphi'(z) + \dots + K\varphi^{(k-1)}(z)$$

représentera toutes les autres fonctions pour lesquelles l'ordre de multiplicité de la valeur $z = 0$ qui les rend infinies est quelconque et égal à $k + 1$; on aura ainsi comme cas particuliers les fonctions rationnelles et entières de $\varphi(z)$ de degré quelconque μ , en prenant le nombre k égal à $2\mu - 1$. Mais il y a lieu alors d'observer une circonstance importante, c'est que les dérivées d'ordre impair de $\varphi(z)$ doivent disparaître.

Pour le faire voir de la manière la plus simple, je me fonderai sur ce que

$$\theta\left(\frac{b}{2} + z\right) = -\theta\left(\frac{b}{2} - z\right)$$

ce qu'on déduit facilement du développement :

$$\theta(z) = \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}(z-b)}}{1 - q^{-2m}}$$

en le mettant sous la forme :

$$\theta\left(\frac{b}{2} + z\right) = \sum \frac{q^{-m} e^{2m\frac{i\pi}{a}z}}{1 - q^{-2m}} = \sum \frac{e^{2m\frac{i\pi}{a}z}}{q^m - q^{-m}} = \sum \frac{\sin \frac{2m\pi z}{a}}{\sin \frac{m\pi b}{a}}$$

qui est bien une fonction impaire de z . Cela étant, toutes les dérivées d'ordre pair de $\theta(z)$, ou d'ordre impair de $\varphi(z)$, changeront de signe pour les valeurs $\frac{b}{2} + z$ et $\frac{b}{2} - z$, tandis qu'une fonction rationnelle de $\varphi(z)$

conservera dans les mêmes circonstances la même valeur. Ainsi, toute fonction entière de degré μ aura la forme :

$$A + A'\varphi(z) + A''\varphi''(z) + A'''\varphi^{(iv)}(z) + \dots + A^{(\mu)}\varphi^{(2\mu-2)}(z),$$

et en particulier, on pourra poser :

$$\varphi^2(z) = A + A'\varphi(z) + A''\varphi''(z).$$

On en déduit, en multipliant les deux membres par $\varphi'(z)$ et en intégrant, un résultat de la forme :

$$\varphi'^2(z) = p + q\varphi(z) + r\varphi^2(z) + s\varphi^3(z),$$

et nous allons déterminer les constantes p, q, r, s . La marche la plus simple à suivre pour cela est de remarquer que l'équation

$$\theta\left(\frac{b}{2} + z\right) = -\theta\left(\frac{b}{2} - z\right)$$

donne :

$$\varphi'\left(\frac{b}{2} + z\right) = -\varphi'\left(\frac{b}{2} - z\right),$$

d'où l'on tire aisément que :

$$\varphi'\left(\frac{b}{2}\right) = 0, \quad \varphi'\left(\frac{a}{2}\right) = 0, \quad \varphi'\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0.$$

Ainsi, on a en désignant par K une certaine constante :

$$\varphi'^2(z) = K\left(\varphi\left(\frac{a}{2}\right) - \varphi(z)\right)\left(\varphi\left(\frac{b}{2}\right) - \varphi(z)\right)\left(\varphi\left(\frac{a+b}{2}\right) - \varphi(z)\right).$$

Maintenant, pour déterminer K , il n'y a qu'à multiplier les deux membres par z^6 , puis faire z infiniment petit, on trouve aisément :

$$K = \frac{8i\pi}{a}.$$