

**D'UNE VARIABLE À PLUSIEURS VARIABLES EN
ANALYSE COMPLEXE : LES FONCTIONS
PLURISOUSSHARMONIQUES ET LA
POSITIVITÉ (1942–1962)¹**

Pierre LELONG (*)

RÉSUMÉ. — Henri Poincaré, à la fin du XIX^e siècle, pensait déjà que le passage d'une à plusieurs variables complexes en analyse ne se réduisait pas à une simple généralisation de l'analyse à une variable. Lui-même a introduit dans \mathbb{C}^n des techniques de la théorie du potentiel (fonctions sousharmoniques dans \mathbb{R}^{2n}). Cependant, l'étude systématique d'une classe invariante par les isomorphismes analytiques complexes, celle des fonctions plurisousharmoniques, débute seulement en 1942. Une autre classe invariante, celle des courants positifs fermés, est introduite en 1957 comme une conséquence du théorème d'existence d'un opérateur d'intégration sur les ensembles analytiques complexes avec singularités. En se limitant à la période 1942–1962, on relate ici l'introduction de ces classes invariantes d'éléments non holomorphes, objets d'une analyse (et d'une géométrie) complexe où la positivité joue un rôle essentiel.

ABSTRACT. — FROM ONE TO SEVERAL VARIABLES IN COMPLEX ANALYSIS : PLURISUBHARMONIC FUNCTIONS AND POSITIVITY (1942–1962). At the close of the nineteenth century, Henri Poincaré had already been of the opinion that the transition from one to several complex variables would involve no mere generalisation of single-variable analysis. He himself introduced, in \mathbb{C}^n , techniques drawn from potential theory (subharmonic functions on \mathbb{R}^{2n}). However, systematic investigation of an invariant class for complex analytic isomorphisms, i.e. the class of plurisubharmonic functions, was not undertaken until 1942. A further invariant class, that of closed positive currents, was introduced in 1957, as being entailed by the existence theorem for an integration operator on analytic sets with singularities. Keeping to the period 1942–1962, this paper surveys the introduction of such invariant classes of non-holomorphic elements, subject to a branch of complex analysis (and geometry) where positivity is an essential feature.

¹ N.d.R. : ce texte entre dans la catégorie « *des articles de mathématiciens contemporains dont le témoignage et le regard apportent des matériaux pour l'écriture de l'histoire des mathématiques au XX^e siècle* » (voir l'éditorial).

(*) Texte reçu le 13 avril 1994, révisé le 17 octobre 1994.

Pierre LELONG (Académie des sciences), 9, place de Rungis, 75013 Paris.

Courrier électronique : pil@ccr.jussieu.fr.

INTRODUCTION

Le passage d'une à plusieurs variables complexes s'est accompagné d'une transformation profonde de l'analyse, notamment lorsqu'on a voulu étendre les solutions locales en des solutions globales. Une approche de ces problèmes dans un cadre holomorphe, a conduit à l'utilisation d'outils de la topologie algébrique comme les faisceaux ou les groupes d'homologie (voir notamment [Cartan 1953], [Serre 1953]).

Nous présentons ici des travaux effectués dans une autre voie², développée notamment par l'auteur de cet article. Elle a consisté à étendre l'analyse en se plaçant dans un cadre non holomorphe et a aussi débouché sur une géométrie analytique complexe. Une notion de positivité particulière y joue un rôle important et souvent simplificateur.

Déjà, dans ses mémoires de 1883 et 1898, H. Poincaré avait utilisé dans \mathbb{C}^n la théorie des potentiels newtoniens de masses positives, lesquels sont des fonctions sousharmoniques de l'espace réel \mathbb{R}^{2n} support de \mathbb{C}^n . C'est toutefois un demi-siècle plus tard seulement, en 1942, que débute l'étude systématique d'une classe invariante par les isomorphismes analytiques complexes, celle des fonctions plurisousharmoniques (fonctions réelles non nécessairement continues) dans un domaine G de \mathbb{C}^n , dont l'ensemble est noté $\text{PSH}(G)$. Le nom, choisi de préférence à pseudoconvexe, rappelle que, pour $n = 1$, cette classe coïncide avec celle des fonctions sousharmoniques introduites par F. Riesz [1926, 1930] et, chose plus importante, il en évoque les techniques. La classe PSH est le premier objet non holomorphe dans cette analyse complexe, qui apparaît, aujourd'hui, liée étroitement à une géométrie analytique complexe. Cette classe donne une caractérisation géométrique des domaines d'holomorphie univalents et bornés G de \mathbb{C}^n : ce sont les domaines convexes par rapport à $\text{PSH}(G)$. En 1957 est établie l'existence de l'intégrale des formes différentielles sur les ensembles analytiques complexes avec singularités. C'est un opérateur courant fermé. Ce résultat introduit un autre objet de cette géométrie, la classe des courants positifs fermés. Ils peuvent être considérés comme une extension, *via* l'intégration, des ensembles analytiques complexes. Nous avons limité notre étude à la vingtaine d'années 1942–1962 et à ces

² Si ces deux voies ont d'abord pu paraître opposées (voir les divers exposés du colloque de Bruxelles de 1953), elles se sont avérées ensuite plutôt complémentaires.

deux éléments essentiels. Les objets de cette géométrie sont aujourd'hui les classes (de fonctions, d'opérateurs, d'ensembles, etc.) définies sur les variétés et les espaces analytiques complexes, qui sont invariantes par les bijections holomorphes et par elles seulement. Il existe en général une application d'un objet holomorphe dans une telle classe. L'application $F \mapsto \log |F|$ de l'ensemble des fonctions holomorphes dans la classe PSH en donne un exemple.

Au lecteur non spécialiste, il est conseillé de lire d'abord l'Appendice où figurent des rappels et des notations indispensables. Il comparera les définitions équivalentes de la classe PSH. Il constatera l'importance de la notion de positivité, définie d'abord pour les formes hermitiennes, puis étendue aux formes homogènes de type (p, p) de l'algèbre extérieure. On s'est efforcé de limiter ces rappels, mais, pour permettre de prendre contact avec des travaux relativement récents, on a placé dans la bibliographie quelques ouvrages généraux et des séminaires. On peut constater qu'une histoire plus complète exigerait de longs rappels techniques. Des progrès récents ont cependant permis de simplifier et de réordonner des chapitres importants de ce domaine [Range 1986].

1. LE PASSAGE A N VARIABLES ET L'IDÉE DE GÉNÉRALISATION

Comme l'a noté C. Houzel [1994], une des caractéristiques des mathématiques de notre XX^e siècle est «*le passage à plusieurs variables pour un certain nombre de problèmes que le dix-neuvième siècle avait abordés dans le cas d'une seule variable*». On est surpris de constater le peu de publications effectuées dans cette direction en analyse complexe au cours de la période qui va des travaux de Poincaré et de Cousin (fin du XIX^e siècle) à la publication, en 1934, par H. Behnke et P. Thullen, d'un ouvrage qui a servi de base à bien des chercheurs et a marqué le début d'une recherche active.

Faute de problèmes posés par des applications, le passage à plusieurs variables complexes pouvait apparaître d'abord comme une généralisation assez gratuite, où l'on s'efforce de retrouver dans une situation plus générale des propriétés de la dimension un. Suivie pour d'autres extensions de la théorie des fonctions d'une variable, cette voie a connu des succès, tels ceux obtenus par l'étude des applications quasi-conformes. Par ailleurs, au nom d'une pureté de moyens, on a longtemps séparé analyse complexe et

analyse réelle (voir ainsi la démonstration du théorème de Cauchy donnée par E. Goursat dans son *Cours d'analyse* [1924, p. 71]). On évitait alors de changer le corps K de base; de plus, on n'imaginait pas que la géométrie de K^n pouvait varier avec n , et que le passage à plusieurs variables était plus une affaire de géométrie que d'analyse.

Cependant, H. Poincaré avait perçu, dès 1883, que le passage à $n > 1$ variables ne pouvait être une généralisation au sens précisé plus haut. Pour montrer que, dans \mathbb{C}^2 comme dans \mathbb{C} , une fonction méromorphe F est le quotient de deux fonctions entières, il souligne l'intérêt, à l'exemple de Kronecker, de faire appel à la Physique dans une telle recherche et d'introduire des potentiels de masses positives. Dans un domaine G de \mathbb{C}^n , pour $n > 1$, une fonction méromorphe n'est plus une application de G dans $\overline{\mathbb{C}}$, et Poincaré en donne une définition (on y verrait aujourd'hui une section d'un faisceau). Soit un recouvrement de \mathbb{C}^n par des boules B_i et dans B_i un quotient N_i/D_i représentant la fonction méromorphe F . Poincaré construit un potentiel H_1 dans $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, tel que la différence $H_1 - \log |D_i|$ soit harmonique dans B_i . Il calcule alors une fonction harmonique qui, ajoutée à H_1 , donne une fonction H qui est pluriharmonique, donc vérifie $dd^c H = 0$ et est partie réelle d'une fonction holomorphe en dehors de l'ensemble polaire défini dans chaque B_i par $D_i = 0$. Celle-ci donne alors la fonction dénominateur D et la représentation cherchée $F = N/D$, les fonctions N et D étant holomorphes dans tout l'espace. Présentée seulement pour $n = 2$ en 1883, la construction est effectuée en 1898 pour n quelconque. Elle utilise en fait une propriété précise des potentiels newtoniens de couche mince qu'étudie Poincaré. Les masses positives a étant portées par une sous-variété W de codimension réelle 2 dans un espace \mathbb{R}^{2n} , avec une densité continue, le potentiel

$$V(x) = \int d\mu(a) \|x - a\|^{2-2n}$$

se comporte au voisinage de W comme $-\log d(x)$, si $d(x)$ est la distance de x à W .

En 1895, P. Cousin, en utilisant habilement les méthodes employées en dimension un par Mittag-Leffler et Weierstrass, a établi des résultats plus généraux. Il a montré, dans un domaine de \mathbb{C}^n produit de n domaines de \mathbb{C} simplement connexes, l'existence d'une fonction méromorphe ayant des pôles (problème I) ou des zéros (problème II) donnés. Poincaré, après

sa publication de 1898, reviendra néanmoins sur l'idée de généralisation. Il écrit en 1901, dans l'analyse de ses travaux :

«*Il semble d'abord que, pour étudier les fonctions [analytiques] de deux variables, il suffit d'appliquer, sans rien y changer, les principes qui ont servi à établir les propriétés des fonctions d'une variable. Il n'en est rien ; il y a entre les deux théories des différences essentielles et l'on ne saurait passer de l'une à l'autre par une simple généralisation. Cette différence apparaît dès que l'on considère les polynômes entiers qui sont décomposables en facteurs s'il n'y a qu'une variable et ne le sont plus dans le cas contraire*» [1901/1921, p. 140].

On reviendra plus loin sur cet exemple. Un polynôme P est déterminé à une constante multiplicative près par ses zéros, mais, pour $n > 1$, on n'a plus de représentation de P dans tout \mathbb{C}^n ; on en a cependant une de la fonction $\log |P|$, appartenant à $\text{PSH}(\mathbb{C}^n)$, par un potentiel de masses positives portées par l'ensemble $P = 0$. La représentation analytique dépend nécessairement de la géométrie.

Nous avons insisté sur les idées de Poincaré et sur ses deux mémoires. Ils ont été un peu oubliés par les commentateurs à la suite des résultats de P. Cousin. Nous saisissons cette occasion de leur rendre hommage, le mémoire de 1898 en particulier ayant eu une influence directe sur l'auteur³ (voir [Griffiths et Harris 1978, p. 388]).

2. LE CAS DE DEUX VARIABLES

Rappelons qu'une fonction f d'une variable x définie dans un domaine G de \mathbb{R}^m , $m \geq 2$, est dite *sousharmonique* si elle vérifie la propriété (A) rappelée dans l'Appendice où l'on remplace la moyenne sur les bords des

³ Je me permets de donner ici un souvenir personnel. Un soir de l'hiver 1937, seul dans l'immense bibliothèque de l'Institut mathématique de Göttingen, je parcourais le texte de ce second mémoire de Poincaré et un énoncé me frappa : pour une fonction F holomorphe dans un domaine G de \mathbb{C}^n , $\log |F|$ est localement la somme d'une fonction harmonique et d'un potentiel newtonien de \mathbb{R}^{2n} , les masses étant portées par l'ensemble $F = 0$ avec une densité 1 (propriété aujourd'hui classique). J'eus aussitôt le sentiment que les calculs de Poincaré pouvaient être simplifiés compte tenu du théorème de Gauss ; une voie s'ouvrait. J'oubliais ensuite cela pendant plus d'un an jusqu'au moment où, abandonnant l'étude de certaines généralisations au sens indiqué plus haut, je me mis à étudier ce qu'on savait sur les fonctions holomorphes de n variables, en lisant le livre de Behnke et Thullen [1934].

disques de centre x par la moyenne sur les sphères compactes de centre x dans G . (On a donc $\text{SH}(G) = \text{PSH}(G)$ dans le plan complexe.)

Indépendant des travaux de Poincaré, le mémoire de F. Hartogs [1906] apporte une analyse précise dans le cas de deux variables complexes. Soit dans \mathbb{C}^2 le domaine G , produit $G_1 \times G_2$; $x \in G_1$, $y \in G_2$, où G_2 contient l'origine $y = 0$. Pour F holomorphe dans G , le rayon de convergence $R_1(x)$ de la série de Taylor

$$(1) \quad F(x, y) = \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n(x)y^n$$

pour x fixé, diffère en général du rayon $R(x)$ de la convergence uniforme en x . On a

$$-\log R(x) = \limsup_{z \rightarrow x} [-\log R_1(z)],$$

et la fonction $U(x) = -\log R(x)$ est alors semi-continue supérieurement. Pour une fonction discontinue $h(x)$, on notera

$$h^*(x) = \limsup_{z \rightarrow x} h(z)$$

et on dira que h^* est la *régularisée supérieure* de h . On a alors

$$(2) \quad U(x) = \left[\limsup_n \frac{1}{n} \log |A_n(x)| \right]^* .$$

F. Hartogs donne des résultats précis sur les discontinuités de $U(x)$ et il établit que, dans le domaine G_1 du plan, $U(x)$ a la propriété (A) de l'Appendice pour $n = 1$. Un problème était alors posé à l'analyse complexe : la propriété obtenue est-elle caractéristique pour le rayon de convergence uniforme? F. Hartogs ne l'établit que sous des hypothèses restrictives.

Un résultat essentiel a aussi été apporté par F. Riesz [1926, 1930] : si $f(x)$ vérifie la propriété (A) dans un domaine G du plan, f est la somme d'un potentiel de masses positives dans G (le noyau étant $\log|x - a|$) et d'une fonction harmonique. La démonstration à l'époque n'était pas facile; elle demandait la construction d'une mesure $\mu(a)$ positive. Cet énoncé de F. Riesz a été de grande conséquence. Il a justifié le rôle de la théorie du potentiel (au sens d'une mesure positive appliquée à un noyau

ayant une singularité ponctuelle) dans un grand nombre de problèmes mathématiques.

Le résultat de F. Hartogs montrait que, si G est un domaine d'holomorphie de \mathbb{C}^2 et si, pour $z \in G$, on note $\delta(z)$ la distance de z à la frontière de G prise parallèlement à une direction complexe donnée, alors $U(z) = -\log \delta(z)$ est une fonction sousharmonique sur les droites complexes dans G , propriété que retrouve K. Oka [1937]. Il devenait alors important de démontrer la réciproque du théorème de Hartogs : étant donné $U(x)$ sousharmonique dans un domaine G_1 du plan, pouvait-on trouver des fonctions $A_n(x)$ holomorphes dans G_1 de manière à obtenir la relation (2)? Ce résultat a été établi dans notre thèse [Lelong 1941]. Il montrait que les propriétés des fonctions sousharmoniques du plan complexe pouvaient, par l'intermédiaire du rayon $R(x)$, déterminer les singularités de la fonction holomorphe F (le problème des singularités était alors très étudié pour $n = 1$). Cette thèse comportait aussi des énoncés qui, l'année suivante, furent étendus à la classe PSH. La construction de la régularisée supérieure $h^*(x)$ de la fonction $h(x) = \limsup_n h_n(x)$ pour une suite $h_n \in \text{SH}(G)$ uniformément majorée, est faite à partir des moyennes $h_n^r(x)$ de h_n dans un cercle de centre x et de rayon r . Une propriété essentielle d'une telle suite majorée dans G est : ou bien l'ensemble défini par $h(x) = -\infty$ est de capacité intérieure nulle, ou bien une telle suite $h_n(x)$ converge uniformément vers $-\infty$ sur tout compact de G . Pouvait-on remplacer «capacité intérieure» par «capacité» en montrant que, pour de tels ensembles, d'un type topologique élémentaire, les capacités intérieure et extérieure coïncident? G. Choquet auquel je communiquai le problème apporta une réponse générale, positive pour les ensembles considérés, tandis que H. Cartan montrait que l'ensemble des x où l'on a $h(x) < h^*(x)$ est de capacité nulle. De tels ensembles se présentaient comme ensembles exceptionnels dans l'étude de la croissance en y des familles de fonctions entières obtenues à partir de $F(x, y)$ pour x fixe, y parcourant \mathbb{C} . L'emploi des fonctions sousharmoniques du plan complexe donnait donc une méthode pour l'étude de plusieurs problèmes de la dimension complexe deux.

3. LES FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES ET LE PASSAGE A N VARIABLES

Il était visible sur des exemples simples que l'extension à $n > 2$ variables complexes des propriétés obtenues pour deux variables, ne pouvait se faire en remplaçant les fonctions sousharmoniques du plan par celles d'espaces réels \mathbb{R}^m . D'où la recherche d'une classe nouvelle, invariante par les isomorphismes analytiques de \mathbb{C}^n et contenant comme sous-classe les fonctions $\log |F|$ avec F holomorphe. Le résultat est dans les trois Notes [Lelong 1942_{a,b} et 1943], mais c'est seulement dans l'introduction de notre Mémoire [Lelong 1945] qu'est décrit un programme général de recherche. On remarque qu'on recourt à des fonctions réelles semi-continues pour l'étude de propriétés des fonctions holomorphes en notant que l'analyse complexe s'intéresse surtout aux modules de telles fonctions et que la classe PSH en donne une extension. Dès ce travail apparaît un problème essentiel, celui de la densité, dans la classe $\text{PSH}(G)$, de la sous-classe des fonctions $c \log |F|$ pour $c > 0$ et F holomorphe dans G . Comparée à sa sous-classe, la classe PSH a l'avantage d'être invariante par beaucoup plus d'opérations de l'analyse. Cet avantage se retrouvera dans d'autres classes invariantes dont les éléments ne sont pas holomorphes, d'où le nom d'*objets souples*, donné plus tard [Lelong 1985 et 1994].

Une définition différente de (A) pour la classe PSH, se trouve dans la première Note [1942_a] et le Mémoire [1945] : on a $f \in \text{PSH}(G)$ si $f(x)$ est majorée sur tout compact du domaine G de \mathbb{C}^n et si f est sousharmonique (ou la constante $-\infty$) sur chaque droite complexe (la constante $-\infty$ dans G étant exclue). L'étude des moyennes de f sur les arêtes des polycercles de centre $x \in G$ montre que f est semi-continue supérieurement. Cette technique sera poursuivie par V. Avannissian [1961]. Elle montre que toute fonction f de $\text{PSH}(G)$ est limite décroissante de fonctions continues de la classe et fait voir que dans l'espace \mathbb{R}^{2n} support de \mathbb{C}^n , $\text{PSH}(G)$ est une sous-classe de $\text{SH}(G)$. On a donc, en notant $A(G)$ la classe des fonctions holomorphes dans G , la suite d'applications

$$A(G) \longrightarrow \text{PSH}(G) \longrightarrow \text{SH}(G),$$

où la première est donnée par l'application $F \mapsto f$ avec $f = \log |F|$.

L'ensemble $\text{PSH}(G)$ est un cône convexe réticulé car, $f_1, f_2 \in \text{PSH}(G)$ entraîne $\sup(f_1, f_2) \in \text{PSH}(G)$ et $c_1 f_1 + c_2 f_2 \in \text{PSH}(G)$ pour $c_1 \geq 0$,

et $c_2 \geq 0$. De même, lorsque K est un compact dans G , la fonction $g(x) = \sup f(x + y)$ pour y dans K et l'intégrale de $f(x + y)$ par une mesure $\mu(y)$ positive portée par K , appartiennent à la classe PSH dans les ouverts de G où ces fonctions sont définies. La définition (B) est obtenue pour les fonctions dérivables, les autres étant limites de suites décroissantes. Ce premier lot de propriétés suffit pour établir que la classe PSH est un objet de la géométrie complexe : il permet de montrer son invariance par les isomorphismes analytiques $G \rightarrow G'$ dans \mathbb{C}^n . La restriction de $f \in \text{PSH}(G)$ à une sous-variété analytique W dans G appartient à $\text{PSH}(W)$ ou est la constante $-\infty$. Enfin, pour une suite h_n de fonctions de $\text{PSH}(G)$, localement majorée, $h^*(x) = [\limsup_n h_n(x)]^*$ appartient à la classe $\text{PSH}(G)$. Ces propriétés montrent [Lelong 1945] que dans \mathbb{C}^n la distance $\delta(x)$ d'un point x d'un domaine d'holomorphic G à la frontière, vérifie

$$(3) \quad U(x) = -\log \delta(x) \in \text{PSH}(G).$$

Les résultats sur la classe PSH permettent une étude générale de la croissance des fonctions entières. Les résultats partiels de 1941 ont été étendus grâce à un théorème général de fonction plurisousharmonique inverse [Lelong 1968]. Soit $f(x, y) \in \text{PSH}(G \times \mathbb{C})$; $x \in G$ et $y \in \mathbb{C}$, où G est un domaine de \mathbb{C}^n . Soit $M(x, r) = \sup f(x, y)$ pour $|y| = r$. On définit alors $u(x, m) = \sup r$ pour $M(x, r) < m$, puis $V(x, m) = -\log u(x, m)$, fonction déduite de $M(x, r)$. Si l'on pose $\log |z| = -m$, on obtient une fonction $U(x, z) = V(x, -\log |z|)$ appartenant à $\text{PSH}(D)$ où le domaine D est défini dans l'espace des variables (x, z) par $x \in G$ et $\log |z| + f(x, 0) < 0$. La fonction inverse $U(x, z)$ ainsi définie est plurisousharmonique dans le domaine D et l'on a $U(x, z) = -\log r(x, z)$, où $r(x, z) > 0$ est la borne supérieure des $t > 0$ vérifiant $M(x, t) + \log |z| < 0$. La croissance en y des fonctions $y \mapsto f_x(y) = f(x, y)$ dépend de x , mais cette dépendance a des propriétés précises. La méthode s'applique à une fibre \mathbb{C}^p pour $p > 1$.

Donnons-en une conséquence géométrique. En considérant l'ordre de croissance $g(x) = \limsup M(x, r)/(\log r)$ pour x fixé et r croissant, on obtient

$$h(x) = -\frac{1}{g(x)} = \limsup \frac{V(x, m)}{\log m}$$

pour $m \rightarrow +\infty$. La fonction $h(x)$ est définie par une limite supérieure de fonctions de PSH uniformément majorées localement ; $h^*(x)$ est donc la

constante $-\infty$ ou appartient à $\text{PSH}(G)$. Dans ce dernier cas, les maxima de l'ordre de croissance $g(x)$ sur deux ouverts relativement compacts dans G ont des valeurs strictement positives finies. L'application de cette propriété a permis plus tard, à H. Skoda [1977], de donner un exemple d'espace fibré S dont la base et la fibre sont de Stein alors que S lui-même ne l'est pas (la base de S est un domaine de \mathbb{C} et la fibre est \mathbb{C}^2).

La classe PSH possède des propriétés de prolongement. Un ensemble N est dit *pluripolaire* dans G s'il est contenu dans l'ensemble des points où une fonction $f \in \text{PSH}(G)$ prend la valeur $-\infty$. Une fonction f appartenant à $\text{PSH}(G \setminus N)$ et majorée a un prolongement unique au domaine G . Si N est un sous-ensemble analytique de codimension complexe au moins 2, l'hypothèse de majoration est inutile [Grauert et Remmert 1956].

4. LA P -CONVEXITÉ

Une première application de la classe PSH a été de donner une définition simple pour la pseudo-convexité des domaines univalents de \mathbb{C}^n [Lelong 1952], propriété que possèdent les domaines d'existence des fonctions holomorphes (domaines d'holomorphie). Dès 1910, E.E. Levi avait donné des conditions locales vérifiées par la frontière, supposée régulière, d'un domaine d'holomorphie. En fait la propriété de pseudo-convexité d'un domaine G univalent est sa P -convexité, c'est-à-dire sa convexité par rapport aux fonctions de $\text{PSH}(G)$. La P -convexité par rapport à une sous-classe de $\text{PSH}(G)$ entraîne la P -convexité, ce qui est le cas de la convexité holomorphe définie en ne considérant que la sous-classe des $f = \log |F|$, où F est holomorphe. L'équivalence des propriétés caractéristiques de la pseudo-convexité, fort nombreuses, découle des propriétés de la classe PSH . Pour un domaine G borné, univalent dans \mathbb{C}^n , la convexité holomorphe équivaut à la propriété pour G d'être un domaine d'holomorphie. Le problème difficile est le passage de la classe PSH à la sous-classe, ou d'établir qu'une des propriétés de pseudo-convexité entraîne la convexité holomorphe. Ce résultat fondamental a été obtenu par K. Oka [1942]. Sa démonstration, faite dans \mathbb{C}^2 , utilise des recolllements successifs et opère sur des objets holomorphes, l'intégrale de Cauchy étant remplacée par l'intégrale d'André Weil [1935]. Mais l'ensemble sur lequel on intègre est une intersection d'images réciproques données par des applications holomorphes. L'intégration sur de tels ensembles, qu'ils soient

analytiques ou sous-analytiques, n'a été étudiée que bien plus tard. Cette circonstance et le caractère intuitif laissé aux situations géométriques ont créé, durant une dizaine d'années, une expectative que l'auteur a partagée avec H. Behnke et H. Cartan. Ce dernier y a mis fin, en construisant par régularisation une intégrale utilisable [Cartan 1952], ce qui permit à Norguet [1954] de donner une démonstration dans \mathbb{C}^n de ce théorème essentiel.

5. LA CLASSE PSH ET L'ÉTUDE MÉTRIQUE DES ENSEMBLES ANALYTIQUES

Le mémoire [Lelong 1950], écrit dans des conditions difficiles, ne concerne que les ensembles définis par une équation, mais il prépare deux développements :

- l'un donnera la représentation des fonctions entières à partir de leurs zéros dans \mathbb{C}^n ;
- l'autre conduira à la définition d'un opérateur d'intégration sur les sous-ensembles analytiques complexes avec singularités et à celle d'une notion géométrique et métrique (non algébrique) de la multiplicité $\nu(x)$ pour un point x sur un tel ensemble.

Cette seconde direction a abouti en 1957 à la notion de courant positif fermé et à celle appelée aujourd'hui «nombre de Lelong» en un point pour un tel courant [Lelong 1957]. La multiplicité de x sur l'ensemble analytique W est un tel nombre relatif au courant d'intégration $[W]$ de W , ce qu'établira P. Thie [1967]. Les deux recherches aboutiront avant 1962, mais les résultats de la première, donnés dans des Notes en 1953 ont été développés plus tard [Lelong 1964].

Le mémoire de 1950 est consacré à une étude métrique des ensembles W définis par une équation $F(x) = 0$ dans \mathbb{C}^n . Dans une boule de centre x et de rayon r , l'ensemble W possède une aire $\sigma(r)$ qui se calcule à partir de $\log |F| \in \text{PSH}$ par le théorème de Poincaré. Le quotient

$$(4) \quad \nu(r) = \frac{\sigma(r)}{c_n r^{2n-2}}$$

est une fonction croissante de r , c_n étant le volume de la boule unité de \mathbb{R}^{2n-2} . La limite de $\nu(r)$ pour $r = 0$ est alors la multiplicité du

point sur W . Une telle propriété, d'une simplicité remarquable, permet de majorer des recouvrements simpliciaux de W . Depuis 1953, en utilisant la notation des distributions et des courants, on note

$$\sigma = \frac{1}{2\pi} dd^c \log |F| \wedge \beta_{n-1}$$

pour l'aire $F = 0$.

Une représentation des polynômes apparaît dans le travail de 1950. Elle sera généralisée en 1953 dans les Notes dont on a cité la principale [Lelong 1953b]. La représentation de Weierstrass des fonctions entières F par un produit canonique est étendue sous la forme d'une représentation de $f = \log |F| \in \text{PSH}(\mathbb{C}^n)$ par un potentiel, quand la croissance de F est d'ordre fini dans \mathbb{C}^n . On obtient une représentation de F à partir de ses zéros W , soit (si $F(0)$ est non nul)

$$(5) \quad \log |F(x)| = \log |F(0)| + k_n \int d\sigma(a) e_n(a, x, q) + H(x)$$

où σ est l'aire de W , k_n une constante ne dépendant que de n et H la partie réelle d'un polynôme. Le noyau e_n est formé à partir du noyau newtonien $\|a - x\|^{2-2n}$ de manière à assurer la convergence, la donnée des zéros W étant d'ordre fini. Le potentiel est, par construction, une fonction de $\text{SH}(\mathbb{R}^{2n})$ mais la démonstration, en 1953, donne ce fait remarquable qu'il est une fonction plurisousharmonique. Ces résultats ont été développés [Lelong 1964] et ont connu une large extension [Skoda 1972]. Le calcul difficile du défaut de plurisousharmonicité du potentiel dû à H. Skoda explique sa disparition si W est d'ordre de croissance fini. Complétés par des applications, ces résultats ont permis de donner une théorie des fonctions entières de n variables [Lelong et Gruman 1986]. Elle peut étonner le lecteur habitué aux exposés limités à une variable ; certains résultats sont des conséquences de (5) et des propriétés de la classe PSH.

La représentation (5) vaut pour les polynômes avec $H = 0$ et le noyau

$$e_n(a, x, 0) = \|a\|^{2-2n} - \|a - x\|^{2-2n}.$$

Pour une variable, P est un produit de facteurs linéaires (théorème de d'Alembert) et $\log P$ apparaît sous la forme d'une somme. On a tenté d'étendre, à l'aide d'une intégrale, cette représentation au cas de plusieurs

variables, mais elle ne converge pas dans tout \mathbb{C}^n [Stoll 1953]. Le résultat demeure cependant pour $\log |P|$, conséquence du résultat général relatif à la classe PSH.

L'étude de la P -convexité avait confirmé d'autre part l'intérêt d'approcher une fonction $f \in \text{PSH}(G)$ par des fonctions du type $\log |F|$. Passant à l'exponentielle, L. Hörmander [1965] a utilisé une métrique hilbertienne à poids $\exp(-2f)$ en intégrant $|F|^2 \exp(-2f)$, pour F holomorphe dans G , le poids faisant intervenir la fonction f plurisousharmonique. La méthode conduit à une résolution de l'équation $\bar{\partial}u = v$ pour $\bar{\partial}v = 0$ avec majoration des solutions. Après la période étudiée ici, elle fournira une méthode analytique nouvelle, aujourd'hui classique.

6. LES COURANTS POSITIFS FERMÉS

Je me limiterai à décrire l'introduction de ce nouvel objet «souple» né lors du passage à plusieurs variables et dont la positivité est une propriété essentielle. Vers 1950, l'étude précise des ensembles analytiques complexes (ensembles définis dans un domaine de \mathbb{C}^n en annulant des fonctions holomorphes) montrait qu'il existe dans un tel ensemble W un sous-ensemble dense W_1 de points, dits réguliers, au voisinage desquels W est isomorphe à une variété complexe. Les exemples montraient aussi la difficulté d'étudier le sous-ensemble complémentaire W' des points singuliers, et la géométrie de W au voisinage de W' lorsque W est un ensemble analytique *quelconque*. En particulier, pouvait-on intégrer sur W une forme différentielle à support compact, à coefficients continus? Le problème posé était donc celui de l'existence de l'intégration d'une telle forme différentielle φ sur un ensemble analytique complexe *quelconque*. Une première méthode (qui, je crois, fut explorée sans succès) consistait à trianguler W . J'ai préféré partir des propriétés spécifiques du courant d'intégration sur une variété complexe, ce qui faisait du problème un problème de *prolongement d'un opérateur linéaire dans une géométrie particulière*. On notera que, déjà, Wirtinger [1936] avait reconnu des propriétés simples de l'aire des variétés analytiques complexes.

Plus précisément, $[W]$ étant le courant d'intégration cherché sur l'ensemble analytique complexe W , l'opérateur $[W]$ a été construit comme extension du courant $[W_1]$ d'intégration sur l'ensemble W_1 des points réguliers de W (on peut supposer W analytiquement connexe et l'ensemble

des points réguliers formant une variété connexe de dimension constante). Le courant $[W_1]$ est positif, ses coefficients sont donc associés à des mesures. Pour que $[W_1]$ puisse être étendu comme *extension simple* à travers les singularités W' de W en demeurant un *courant fermé*, il doit vérifier une condition métrique au voisinage de celles-ci. L'ensemble W' des singularités est sur W de codimension (réelle) au moins deux. L'étude des propriétés locales des ensembles analytiques [Remmert et Stein 1953] a permis d'établir les majorations utiles de $[W_1]$ au voisinage des singularités W' . Le courant positif fermé $[W_1]$ se prolongeait par extension simple en un courant positif fermé $[W]$ et vérifiait donc : $d[W](\varphi) = [W](d\varphi) = 0$ pour toute forme φ à coefficients dérivables et à support compact dans le domaine où W est définie. Plus tard, cette méthode a permis d'intégrer sur des ensembles analytiques réels, où l'opérateur d'intégration n'est plus fermé. Aujourd'hui, le résultat est devenu classique. Le mémoire [Lelong 1957] introduisait la notion générale de courant positif fermé, et établissait l'existence du nombre ν en un point x pour un tel courant, faisant apparaître une nouvelle notion géométrique définie et calculée par l'analyse complexe. La définition des formes positives (voir Appendice) montre qu'en multipliant une forme positive de bidegré (p, p) par une forme positive de bidegré $(1, 1)$, on obtient une forme positive de bidegré $(p+1, p+1)$. Si donc T est un courant positif fermé de type $(n-p, n-p)$, pour $h \in \text{PSH}$, le produit $T \wedge (dd^c h)^p$ est une mesure positive. Pour $h = (2\pi)^{-1} \log \|z - x\|$ cette mesure est à densité sauf au point x qui porte une masse ponctuelle dont la valeur définit le nombre $\nu(x)$. Il est la multiplicité de x sur W si on a $T = [W]$. Plus tard, Y.T. Siu [1974] montrera que les ensembles de points x tels que $\nu(x) \geq c > 0$ sont des ensembles analytiques sur le support de T . Plus tard encore, J-P. Demailly [1987] généralisera ce «nombre» en remplaçant $\log \|z - x\|$ par une fonction plurisousharmonique plus générale ce qui permet d'étendre le formalisme du calcul à d'autres notions de la géométrie complexe.

CONCLUSION

Aujourd'hui, on ne parle plus guère d'une «théorie des fonctions» mais d'«analyse complexe» : changement de langage significatif, indiquant une évolution dont on a décrit ici quelques aspects. Un cadre naturel d'étude des fonctions holomorphes de plusieurs variables est aujourd'hui donné par

les espaces de Stein X . Ils sont caractérisés par l'existence d'une fonction f plurisousharmonique et exhaustive sur X . Des propriétés de f déterminent celles de l'algèbre des fonctions holomorphes sur X . Le cas où X est isomorphe à une variété algébrique affine correspond à des propriétés de f et de la mesure $(dd^c f)^n$ [Demailly 1985]. D'autre part de nombreux problèmes de prolongement, résolus pour les courants positifs fermés, s'appliquent aux ensembles analytiques avec des résultats optimaux pour ces derniers. Des travaux récents en analyse complexe montrent le rôle qu'y jouent, à côté de l'holomorphicité, les propriétés liées à la positivité. Ainsi enrichie, cette analyse complexe intervient dans les progrès de la géométrie algébrique et de la géométrie arithmétique.

APPENDICE

Dans un domaine G de \mathbb{C}^n , on désignera par $A(G)$ l'algèbre des fonctions holomorphes et par $\text{PSH}(G)$ la classe des fonctions *plurisousharmoniques*, dont on rappelle les trois définitions équivalentes (A), (B), (C) suivantes :

(A) On a $f \in \text{PSH}(G)$ si $f : G \rightarrow -\infty \cup \mathbb{R}$ n'est pas la constante $-\infty$, si elle est semi-continue supérieurement et si, de plus, elle vérifie la «propriété du disque»

$$(6) \quad f(x) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x + e^{i\theta}) d\theta$$

pour tout disque compact de centre x dans G ,

$$D(x, y) = \{x' = x + uy ; |u| \leq 1, u \in \mathbb{C}\}.$$

(B) On a $f \in \text{PSH}(G)$ si f appartient à $L^1_{\text{loc}}(G)$, si la forme hermitienne (au sens des distributions)

$$(7) \quad \ell(f, z) = d'd''f = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 f}{\partial z_p \partial \bar{z}_q} dz_p d\bar{z}_q$$

vérifie $\ell(f, z) \geq 0$ et si f est semi-continue en mesure (c'est-à-dire, si pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble des x tels que $f(x) < f(x_0) + \varepsilon$ est de mesure nulle dans un voisinage de x_0).

(C) La classe $\text{PSH}(G)$ est formée des fonctions dérivables vérifiant (7) ou (6), et de leurs limites décroissantes (la constante $-\infty$ exceptée).

On dit qu'un domaine G de \mathbb{C}^n est *convexe par rapport à la classe* $\text{PSH}(G)$ si tout compact K dans G a son *enveloppe plurisousharmonique*

$$K'(G) = \left\{ x \in G; f(x) < \sup_K f \text{ pour toute } f \in \text{PSH}(G) \right\}$$

relativement compacte dans G .

On dit qu'une fonction f de $\text{PSH}(G)$ est *exhaustive* si pour tout c réel, l'ensemble des x où l'on a $f(x) < c$ est relativement compact dans G .

Une forme différentielle extérieure des $dz_p, d\bar{z}_q$ est dite *positive* de bi-degré $(n-p, n-p)$ ou de dimension complexe p si elle est homogène de type $(n-p, n-p)$ et si, pour tout système $a = \{a_1, \dots, a_p\}$ de formes \mathbb{C} -linéaires à coefficients dans \mathbb{C} , on a

$$(8) \quad \varphi \wedge ia_1 \wedge \bar{a}_1 \wedge \dots \wedge ia_p \wedge \bar{a}_p = T(\varphi, a)\beta_n$$

avec $T(\varphi, a) \geq 0$, β_n étant l'élément de volume de \mathbb{C}^n . Pour une forme avec coefficients associés à des distributions (*courants* de G. de Rham), cette définition entraîne que les seconds membres de (8) et par suite les coefficients de φ sont associés à des distributions qui sont des mesures, le second membre de (8) étant alors une mesure positive. Dans la définition (B) plus haut, la condition (7) exprime la positivité du courant

$$(9) \quad dd^c f = 2i \partial \bar{\partial} f$$

en notant $\partial, \bar{\partial}$ les différentielles extérieures relatives aux seuls z_p, \bar{z}_q respectivement, et $d = \partial + \bar{\partial}$, $d^c = i(\bar{\partial} - \partial)$.

BIBLIOGRAPHIE

AVANISSIAN (V.)

[1961] Fonctions plurisousharmoniques et fonctions doublement sousharmoniques, *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, (III) 78 (1961), p. 101-161.

BEHNKE (H.) et THULLEN (P.)

[1934] *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*, Berlin-Heidelberg : Springer (Ergebnisse der Mathematik), 1934.

CARTAN (H.)

- [1940] Sur les matrices holomorphes de n variables complexes, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (IX) 19 (1940), p. 1–26.
- [1952] Intégrale d'André Weil, *Séminaire H. Cartan*, t. IV (1951–1952), exposé 6, de M. Hervé, Paris : École normale supérieure.
- [1953] Variétés analytiques complexes et cohomologie, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* (Bruxelles 1953), Centre belge de Recherches mathématiques, p. 41–55.

COUSIN (P.)

- [1895] Sur les fonctions de n variables complexes, *Acta mathematica*, 19 (1895), p. 1–62.

DEMAILLY (J.-P.)

- [1985] Mesure de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines, *Mémoire de la Société mathématique de France*, (n.s.) 19 (1985), p. 1–124.
- [1987] Nombres de Lelong généralisés, théorèmes d'intégrabilité et d'analyticité, *Acta math.*, 159 (1987), p. 153–169.
- [1995] *Analytic geometry*, Springer, 1995.

DOLBEAULT (P.)

- [1956] Formes différentielles et cohomologie sur une variété analytique complexe (part. I), *Annals of mathematics*, 64 (1956), p. 83–130; (part. II), *Ibid.*, 65 (1957), p. 232–330.

GRAUERT (H.) et REMMERT (R.)

- [1956] Plurisubharmonische Funktionen in komplexen Räumen, *Mathematische Zeitschrift*, 65 (1956), p. 175–194.

GOURSAT (E.)

- [1924] *Cours d'analyse mathématique*, t. 2, 4^e éd., Paris : Gauthier-Villars, 1924.

GRIFFITHS (P.) et HARRIS (G.)

- [1978] *Principles of algebraic geometry*, New York : John Wiley, 1978.

GUNNING (R.C.) and ROSSI (H.)

- [1965] *Analytic functions of several complex variables*, Prentice-Hall, 1965.

HARTOGS (F.)

- [1906] Zur Theorie der analytischen Funktionen mehrerer unabhängiger Veränderlichen [...], *Mathematische Annalen*, 62 (1906), p. 1–88.

HÖRMANDER (L.)

- [1965] L^2 estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator, *Acta math.*, 113 (1965), p. 89–152.
- [1966] *An introduction to complex analysis in several complex variables*, D. Van Nostrand, 1966; 3^e éd., North-Holland, 1990.

HOUZEL (C.)

- [1994] D'une variable à plusieurs variables complexes : les fonctions abéliennes, *Géométrie complexe* [colloque de 1992], prépubl. math. n° 77, Université Paris VII (1994), 14 p.

KODAIRA (K.) and SPENCER (D.C.)

- [1953] Groups of complex line bundles over compact Kähler varieties, *Proceedings of the National Academy of sciences of the U.S.A.*, 39 (1953), p. 868–877.

LELONG (P.)

- [1941] Sur quelques problèmes de la théorie des fonctions de deux variables complexes, *Ann. scient. École norm. sup.*, 58 (1941), p. 83–177.

- [1942a] Définition des fonctions plurisousharmoniques, *Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences*, 215 (1942), p. 398–400.
- [1942b] Sur les suites de fonctions plurisousharmoniques, *C. R. Acad. sci. Paris*, 215 (1942), p. 454–457.
- [1943] Sur une propriété de la frontière d'un domaine d'holomorphic, *C. R. Acad. sci. Paris*, 216, (1943), Paris, p. 107–111.
- [1945] Les fonctions plurisousharmoniques, *Ann. scient. École norm. sup.*, 62 (1945), p. 301–338.
- [1950] Propriétés métriques des variétés analytiques complexes définies par une équation, *Ann. scient. École norm. sup.*, 67 (1950), p. 393–419.
- [1952] Domaines convexes par rapport aux fonctions plurisousharmoniques, *Journal d'analyse mathématique*, 2 (1952), p. 178–208.
- [1953a] Fonctions plurisousharmoniques; mesures de Radon associées. Applications aux fonctions analytiques, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* (Bruxelles 1953), Centre belge de Recherches mathématiques, p. 21–40.
- [1953b] Sur l'extension aux fonctions entières de n variables d'ordre fini d'un développement canonique de Weierstrass, *C. R. Acad. sci. Paris*, 237 (1953), p. 865–867.
- [1957] Intégration sur un ensemble analytique complexe, *Bulletin de la Société mathématique de France*, 85 (1957), p. 239–262.
- [1959–1967] *Séminaire d'analyse* (dir.), vol. 1 à 7, Paris : Faculté des sciences.
- [1963] Fonctions plurisousharmoniques et formes différentielles positives, *Colloque du C.I.M.E.* (1963); rééd. 1968, New York : Gordon and Breach.
- [1964] Fonctions entières (n variables) et fonctions plurisousharmoniques d'ordre fini dans \mathbb{C}^n , *J. analyse math.*, 12 (1964), p. 365–407.
- [1968] *Fonctionnelles analytiques et fonctions entières (n variables)*, Presses de l'Université de Montréal, 1968.
- [1968–1990] *Séminaire d'analyse* (dir.), Springer (Lecture Notes).
- [1985] Les objets souples de l'analyse complexe, *Expositiones mathematicae*, 3 (1985), p. 149–164.
- [1994] Quelques remarques sur la recherche et la création des objets souples en analyse mathématique, dans *Les Grands Systèmes des sciences et de la technologie*, Paris : Masson, 1994, p. 461–475.
- LELONG (P.) and GRUMAN (L.)
- [1986] *Entire functions of several complex variables*, Springer (Grundlehren), 1986.
- LEVI (E. E.)
- [1910] Studii sui punti singolari essenziali delle funzioni analitiche di due o più variabili complesse, *Annali di matematica pura ed applicata*, (III) 17 (1910), p. 61–87.
- NORQUET (F.)
- [1954] Sur les domaines d'holomorphic des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global), *Bull. Soc. math. France*, 82 (1954), p. 137–159.
- [1994] Résidus : de Poincaré à Leray, un siècle de suspense, *Géométrie complexe* [colloque de 1992], prépubl. math. n° 77, Université Paris VII (1994), 23 p.
- OKA (K.)
- [Fonct. ana.] *Sur les fonctions analytiques de plusieurs variables*, Tokyo : Iwanami Shoten, 1961 [recueil d'articles].
- [1937] Domaines d'holomorphic, *Journal of science of the Hiroshima University*, 7 (1937), p. 115–130; *Fonct. anal.*, part. II, p. 12–27.

- [1942] Domaines pseudoconvexes, *The Tôhoku mathematical journal*, 49 (1942), p. 15–52; *Fonct. Anal.*, part. VI, p. 54–92.
- POINCARÉ (H.)
 [Œuvres] *Œuvres de Henri Poincaré*, 11 vol., Paris : Gauthier-Villars, 1916–1956.
- [1883] Sur les fonctions de deux variables, *Acta math.*, 2 (1883), p. 97–113; *Œuvres IV*, p. 147–161.
- [1898] Sur les propriétés du potentiel et sur les fonctions abéliennes, *Acta math.*, 22 (1898), p. 89–178; *Œuvres IV*, p. 162–243.
- [1901/1921] Analyse des travaux scientifique, § VII, *Acta math.*, 38 (1921), p. 70–73; *Œuvres IV*, p. 139–143.
- RANGE (R.M.)
 [1986] *Holomorphic functions and integral representations in several complex variables*, Springer (Graduate Texts), 1986.
- REMMERT (R.) und STEIN (K.)
 [1953] Über die wesentlichen Singularitäten analytischer Mengen, *Math. Ann.*, 126 (1953), p. 263–306.
- RIESZ (F.)
 [1926] Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel (I), *Acta math.*, 48 (1926), p. 329–343.
 [1930] Sur les fonctions subharmoniques et leur rapport à la théorie du potentiel (II), *Acta math.*, 54 (1930), p. 321–360.
- SERRE (J.-P.)
 [1953] Quelques problèmes globaux relatifs aux variétés de Stein, *Colloque sur les fonctions de plusieurs variables* (Bruxelles 1953), Centre belge de Recherches mathématiques, p. 57–68.
- SIU (Y. T.)
 [1974] Analyticity of sets associated to Lelong numbers and the extension of closed positive currents, *Inventiones mathematicae*, 27 (1974), p. 53–156.
- SKODA (H.)
 [1972] Sous-ensembles analytiques d'ordre fini ou infini dans \mathbb{C}^n , *Bull. Soc. math. France*, 100 (1972), p. 353–408.
 [1977] Fibrés holomorphes à base et à fibre de Stein, *Invent. math.*, 43 (1977), p. 97–107.
- STEIN (K.)
 [1956] Überlagerungen holomorph-vollständiger komplexer Räume, *Archiv der Mathematik*, 7 (1956), p. 354–361.
- STOLL (W.)
 [1953] Ganze Funktionen endlicher Ordnung mit gegebenen Nullstellenflächen, *Math. Z.*, 57 (1953), p. 211–237.
- THIE (P.)
 [1967] The Lelong number of a point of a complex analytic set, *Math. Ann.*, 172 (1967), p. 266–312.
- WEIL (A.)
 [1935] L'intégrale de Cauchy et les fonctions de plusieurs variables, *Math. Ann.*, 111 (1935), p. 178–182.
- WIRTINGER (W.)
 [1936] Eine Determinantenidentität und ihre Anwendung auf analytische Gebilde [...], *Monatshefte für Mathematik und Physik*, 44 (1936), p. 343–365.